UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Biomedicina e Ciências Ambientais
Lista de exercícios 4
Professor: Bruno Santiago

Questão 1. *O guepardo é um dos animais mais rápidos da natureza. Devido a sua anatomia privilegiada ele consegue manter uma aceleração constante que o faz ir de zero a 108Km/h em apenas 3 segundos. No entanto, ao atingir essa velocidade máxima ele sempre tem que desacelerar até atingir a metade dessa velocidade, de modo a evitar superaquecimento dos órgãos. Suponha que um guepardo aviste uma gazela a 50m de distância correndo a uma velocidade constante, igual a metade da velocidade máxima que o guepardo consegue atingir. Após quanto tempo o guepardo encontra a gazela?* ***Dica:*** *Suponha em seu modelo que toda aceleração/desaceleração do guepardo tem sempre o mesmo valor absoluto, e que quando precisar desacelerar o guepardo consegue fazer isso instantaneamente.*

Solução. Observe que a velocidade do guepardo é sempre maior do que a velocidade da gazela, exceto nos instantes nos quais ele atinge a velocidade mínima, quando as duas velocidades são iguais. Exceto por esses instantes o guepardo está sempre mais rápido e por isso eventualmente ele consegue capturá-la. Para determinar o instante de tempo exato no qual isso acontece devemos escrever analiticamente a função $f(t)$ que calcula a posição da gazela decorridos t segundos, e a função $g(t)$ que calcula a posição do guepardo.

Assumimos no nosso modelo que o guepardo se encontra na posição inicial 0, e portanto a gazela está na posição 50. Observe que como a gazela se desloca a uma velocidade constante de 15m/s (54Km/h) sua posição é descrita pela função

$$f(t) = 50 + 15t.$$

A dificuldade do problema reside no fato de que a função que descreve o movimento do guepardo é uma função definida por partes. Como efeito, o modelo proposto no enunciado afirma que o movimento do guepardo é composto de ciclos de aceleração seguidos de ciclos de desaceleração. Em cada ciclo de aceleração é de 10m/s^2 e em cada ciclo de desaceleração ela vale $-10m/s^2$. Então vamos construir etapa por etapa e função g.

1º ciclo: movimento acelerado–. A função que descreve a velocidade nesse caso é $v_0(t) = 10t$, pois a velocidade inicial é nula. Logo, como a função posição é a antiderivada da velocidade, vemos que a função posição nesse primeiro ciclo vai ser dada por

$$g_0(t) = 5t^2.$$

Como $v_0(3) = 30m/s$, e essa é a velocidade máxima do guepardo o 1º ciclo dura apenas 3 segundos. Como $g_0(3) = 5 \times 3^2 = 45$, vemos que o guepardo percorreu 45m metros nesse primeiro ciclo. A posição da gazela depois de 3 segundos é $f(3) = 50 + 15 \times 3 = 95$. A distância entre eles continua de 50 metros.

2º ciclo: movimento desacelerado–. Agora, depois dos primeiros 3 segundos, a função que descreve a velocidade do guepardo vai ser $v_1(t) = 30 - 10(t-3)$, pois a velocidade inicial do movimento uniformemente desacelerado é 30m/s e a desaceleração é constante igual a $-10m/s^2$. Como a posição é a antiderivada da velocidade e como a posição inicial nesse caso é 45 (o final do 1º ciclo) temos que a posição do guepardo nesse ciclo vai ser descrita pela função

$$g_1(t) = 45 + 30(t-3) - 5(t-3)^2.$$

Como $v_1(4.5) = 15m/s$, a velocidade mínima do guepardo, o 2º ciclo dura apenas 1.5s (de 3s a 4.5s). Observe que $g_1(4.5) = 78.75$. Como $f(4.5) = 117,5$, vemos que o guepardo ainda não alcançou a gazela. A distância entre eles agora é de 38.75m.

3^o ciclo: movimento acelerado–. Agora, depois dos primeiros 4.5 segundos, a função que descreve a velocidade do guepardo vai ser $v_1(t) = 15 + 10(t - 4.5)$, pois a velocidade inicial do movimento uniformemente acelerado é 15m/s e a aceleração é constante igual a $-10m/s^2$. Como a posição é a antiderivada da velocidade e como a posição inicial nesse caso é 78.75 (o final do 1^o ciclo) temos que a posição do guepardo nesse ciclo vai ser descrita pela função

$$g_2(t) = 78.75 + 15(t - 4.5) + 5(t - 4.5)^2.$$

Como $v_2(6) = 30m/s$, a velocidade máxima do guepardo, o 3^o ciclo dura apenas 1.5s (de 4.5s a 6s). Observe que $g_2(6) = 112.5$. Como $f(6) = 140$, vemos que o guepardo ainda não alcançou a gazela. A distância entre eles agora é de 27.5m

4^o ciclo: movimento desacelerado–. Agora, depois dos primeiros 6 segundos, a função que descreve a velocidade do guepardo vai ser $v_3(t) = 30 - 10(t - 6)$, pois a velocidade inicial do movimento uniformemente desacelerado é 30m/s e a desaceleração é constante igual a $-10m/s^2$. Como a posição é a antiderivada da velocidade e como a posição inicial nesse caso é 112.5 (o final do 1^o ciclo) temos que a posição do guepardo nesse ciclo vai ser descrita pela função

$$g_3(t) = 112.5 + 30(t - 6) - 5(t - 6)^2.$$

Como $v_3(7.5) = 15m/s$, a velocidade mínima do guepardo, o 4^o ciclo dura apenas 1.5s (de 6s a 7.5s). Observe que $g_3(7.5) = 146.25$. Como $f(7.5) = 162.5$, vemos que o guepardo ainda não alcançou a gazela. A distância entre eles agora é de 16.25m.

5^o ciclo: movimento acelerado–. Agora, depois dos primeiros 7.5 segundos, a função que descreve a velocidade do guepardo vai ser $v_4(t) = 15 + 10(t - 4.5)$, pois a velocidade inicial do movimento uniformemente acelerado é 15m/s e a aceleração é constante igual a $-10m/s^2$. Como a posição é a antiderivada da velocidade e como a posição inicial nesse caso é 146.25 (o final do 4^o ciclo) temos que a posição do guepardo nesse ciclo vai ser descrita pela função

$$g_4(t) = 146.25 + 15(t - 7.5) + 5(t - 7.5)^2.$$

Como $v_4(9) = 30m/s$, a velocidade mínima do guepardo, o 3^o ciclo dura apenas 1.5s (de 7.5s a 9s). Observe que $g_4(9) = 180$. Como $f(6) = 185$, vemos que o guepardo ainda não alcançou a gazela. A distância entre eles agora é de 5m.

6^o ciclo: movimento desacelerado–. Agora, depois dos primeiros 9 segundos, a função que descreve a velocidade do guepardo vai ser $v_5(t) = 30 - 10(t - 9)$, pois a velocidade inicial do movimento uniformemente desacelerado é 30m/s e a desaceleração é constante igual a $-10m/s^2$. Como a posição é a antiderivada da velocidade e como a posição inicial nesse caso é 180 (o final do 5^o ciclo) temos que a posição do guepardo nesse ciclo vai ser descrita pela função

$$g_5(t) = 180 + 30(t - 9) - 5(t - 9)^2.$$

Como $v_5(10.5) = 15m/s$, a velocidade mínima do guepardo, o 6^o ciclo dura apenas 1.5s (de 9s a 10.5s). Observe que $g_5(10.5) = 213.75$. Como $f(10.5) = 207.5$, vemos que o guepardo alcançou a gazela em algum momento durante o 6^o ciclo. Para determinar o valor exato desse momento, precisamos resolver a equação $g_5(t) = f(t)$, onde sabemos que t está entre 9 10.5. Pelas expressões de g_5 e f a equação $g_5(t) = f(t)$ equivale a equação do segundo grau

$$180 + 30(t - 9) - 5(t - 9)^2 = 50 + 15t$$

Essa equação é equivalente a

$$30 + 6(t - 9) - (t - 9)^2 = 10 + 3t$$

Fazendo a mudança de variável $x = t - 9$ para simplificar, chegamos a equação

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Como $x = t - 9$, e como o valor máximo de t no 6^o ciclo é 10.5, devemos a raiz da equação acima que seja positiva e seja menor do que 1.5. Pela fórmula de Báskhara, a solução que estamos procurando é

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Como $t = 9 + x$, vemos que o tempo de captura é de aproximadamente 9.3819 segundos. $\square$

Questão 2. *Aplique o Método de Newton para achar uma aproximação com 4 casas decimais de* $\sqrt{7}$.

Demonstração. Observe que $\sqrt{7}$ é a única raiz positiva da função $f(x) = x^2 - 7$. O método de Newton para encontrar essa raiz consiste em aplicar a fórmula recursiva

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

levando em conta um chute inicial. Como $f(x_n) = x_n^2 - 7$ e como $f'(x_n) = 2x_n$, vemos que a fórmula recursiva do método de Newtn no caso em que estamos procurando é

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 7}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 7}{2x_n}$$

Vamos considerar o valor inicial $x_1 = 3$. Calculamos então

$$x_2 = \frac{3^2 + 7}{2 \times 3} = 2.66666...$$

Com o valor de x_2 calculamos x_3:

$$x_3 = \frac{(2.6666...)^2 + 7}{2.66666...} = 2.6458333...$$

Com o valor de x_3 calculamos x_4:

$$x_4 = \frac{(2.6458333...)^2 + 7}{2.6458333...} = 2.645751312$$

Como uma aproximação de $\sqrt{7}$ com 9 casas decimais é 2.645751311, vemos que com apenas 4 iterações do método de Newton obtemos uma aproximação da ordem de 10^{-9}!

Em Julia, é possível implementar o método com um algoritmo muito simples. Basta definir uma função:

function Newton(n)
if n==0
return 0
elseif n==1
return 3
else return ((Newton(n-1))$^2 + 7)/(2 * Newton(n-1))$
end
end

E em seguida calcular Newton(4). □