UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Biomedicina e Ciências Ambientais

Lista de exercícios 5

Professor: Bruno Santiago

1. Aplicação da derivada: fluxo de água num reservatório

Nesta lista vamos discutir a situação hipotética de uma indústria química que trabalha com um grande reservatório de água com capacidade de 80.000 litros. Todos os dias o reservatório precisa estar cheio antes de começar a produção e em vários momentos ao longo do dia é necessário interromper a produção para encher o reservatório, processo que usualmente leva em torno de 20 minutos. Para encher o reservatório uma bomba é usada para levar a água até uma torneira. A bomba sempre trabalha próxima de sua vazão máxima (que é de 80 litros por segundo), mas não consegue manter a vazão constante. Essa lista tem como objetivo explorar a aplicação do conceito de derivada ao seguinte problema: como controlar a vazão da bomba de forma a evitar que ela ultrapasse $80\ell/s$?

Como vimos na aula a ideia é utilizar um sensor para medir a altura da água no reservatório (que tem a forma de um cilindro) e com essa informação plotar o gráfico Volume x tempo. A derivada da função da função $V(t)$ é igual a vazão de água que sai da torneira. Assim, controlando o valor da derivada podemos certificar o bom funcionamento da bomba.

2. Questões

Questão 1. *Suponha que ao plotar o gráfico vemos que $V(t) = 15t^3 - 2t^2$. Nesse caso, a vazão da bomba vai ultrapassar o limite de $80\ell/s$ antes de o tanque ficar cheio? Caso isso aconteça, vai ser depois de quantos minutos?*

Solução. A vazão instantânea da bomba é dada, em cada instante de tempo, pela derivada da função $V(t)$ que descreve o volume do tanque em cada instante de tempo. Assim sendo, uma vez que

$$V'(t) = 45t^2 - 4t,$$

devemos determinar o menor valor positivo de t para o qual $45t^2 - 4t = 80$. Como esta é uma equação do segundo grau, basta aplicar a fórmula de Baskhara:

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 45 \times 80}}{90}$$

O único valor positivo dado pela expressão acima é $t \simeq 1.37$. Vemos portanto que a vazão da bomba, nesse caso, seria extrapolada em menos de 2 segundos. □

Questão 2. *Suponha agora que a função que dá o volume de água no reservatório em cada segundo seja*

$$V(t) = \frac{40000 + 2t^2}{1 + t^{0.1}}.$$

Ignorando o limite da vazão, em quanto tempo o reservatório ficaria cheio nesse caso? O limite de vazão da bomba seria extrapolado antes de o reservatório ficar cheio?

Solução. Nesse caso, devemos resolver a equação $V(t) = 80000$, ou seja, devemos achar t tal que

$$\frac{40000 + 2t^2}{1 + t^{0.1}} = 80000.$$

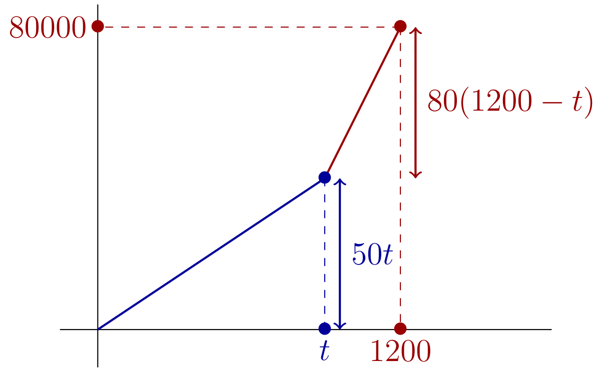
Nesse caso, por não se tratar de uma equação de primeiro, ou de segundo grau não há fórmulas para se encontrar as soluções. Podemos obter, no entanto, valores aproximados para a solução por diversos métodos. O mais simples deles é por **tentativa e erro:** colocamos a fórmula numa calculadora e substituímos valores para t até que o resultado chegue próximo de 80000. Nesse caso, encontramos $t \simeq 301$. Para saber se o limite da vazão seria atingido antes de o reservatório ficar cheio, devemos tomar a derivada da função $V(t)$. Aplicando a regra do quociente e tendo em vista a regra da cadeia,

$$V'(t) = \frac{4t(1 + t^{0.1}) - 0.1^{-0.9}(40000 + 2t^2)}{(1 + t^{0.1})^2} = \frac{4t + 3.8t^{1.1} - 4000t^{-0.9}}{(1 + t^{0.1})^2}$$

Para determinar em quanto tempo a vazão é atingida devemos resolver a equação $V'(t) = 80$. Mais uma vez, só podemos resolver por métodos de aproximação. A solução aproximada é $t \simeq 61.5$. □

Questão 3. *Após alguns anos de funcionamento da indústria a engenheira responsável conseguiu comprar uma nova bomba, a qual ainda que deixe de funcionar se a vazão ultrapassar 80ℓ/s* ***consegue manter a vazão constante****. Um estagiário recém chegado não percebeu que ligou a bomba na vazão baixa de 50ℓ/s. No entanto a bomba nova não pode ficar ligada por mais de 20 minutos. Antes dos 20 minutos o estagiário se deu conta do descuido e mudou a vazão instantaneamente para o máximo de 80ℓ/s. No entanto isso não foi suficiente para encher o reservatório. Pelo menos quanto tempo o estagiário tem que ter levado para se dar conta?*

Solução. Seja t o tempo que o estagiário levou para se dar conta. Se foi o maior tempo possível então o tanque ficou cheio em exatamente 1200 segundos (=20 minutos). Analisando o gráfico vemos que temos

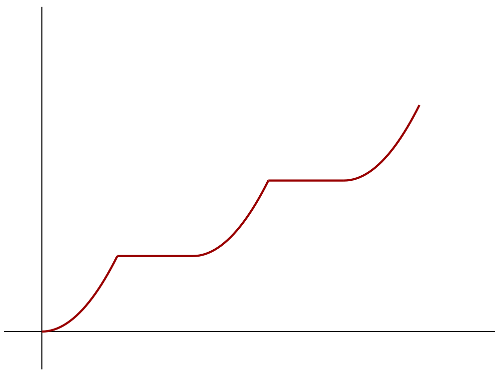


que resolver a equação

$$
\begin{aligned}
50t + 80(1200 - t) &= 80000 \\
50t + 96000 - 80t &= 80000 \\
-30t &= -16000 \\
t &\simeq 533.33
\end{aligned}
$$

□

Questão 4. *Após o incidente com o estagiário, a engenheira responsável pela indústria comprou um sistema automatizado que funciona da seguinte maneira: a vazão começa em zero quando o tanque está vazio e aumenta até atingir a vazão máxima de 80ℓ/s. Quando isso acontece, a bomba se desliga automaticamente durante cinco segundos e a vazão volta a aumentar de novo até atingir o máximo, quando a bomba se desliga por cinco segundos. Esse processo continua até o tanque ficar cheio. Invente uma função $V(t)$ que descreva o volume do tanque ao longo tempo em acordo com o comportamento da nova bomba.*



Solução. □

3. Comentários

Na segunda questão aparece a função $f(x) = 1 + x^{0.1}$. A derivada dessa função satisfaz a mesma regra para potências do tipo x^n. Assim, $f'(x) = 0.1x^{-0.9}$. Fique atento às unidades de tempo nas questões. Observe que a vazão da bomba sempre é dada em litros x segundo, e muitos dados estão em minutos, porque é uma escala de tempo que tem mais apelo.[1] Você deve trabalhar sempre na mesma unidade de medida. A quarta questão possui infinitas soluções diferentes, todas corretas. Use uma calculadora e se

[1] Afinal, assim de cabeça você tem ideia se 533s é muito ou pouco tempo?

possível uma calculadora gráfica (`https://www.transum.org/Maths/Activity/Graph/Desmos.asp`) ou uma linguagem de programação (há informações sobre elas na página do curso).