UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE
Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Biomedicina e Ciências Ambientais
Lista de exercícios 7
Professor: Bruno Santiago

Exercício 1. *A medida que uma árvore de grande porte vai crescendo a parte viva do seu tronco vai diminuindo e sendo "tomada" por células mortas, que viram madeira. O objetivo desse problema é analisar a redução da fração do tronco que é ocupada por células vivas ao longo do tempo. Considere uma porção do tronco de uma árvore, que vamos assumir ter o formato cilíndrico, com uma certa altura e um certo raio. Suponha ainda que a parte viva tenha o formato de um anel cilíndrico envolvendo a parte morta, cilíndrica, do tronco. Finalmente, suponha que a espessura da parte viva permaneça constante ao longo*

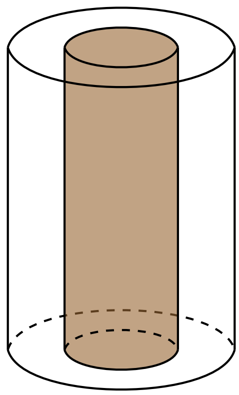


Figura 1. Modelagem cilíndrica de um tronco de árvore. A parte marrom representa as células mortas que viram madeira.

do tempo, ao passo que o raio total do tronco aumente a uma taxa constante ao longo do tempo. Calcule a taxa de variação da proporção de matéria viva dentro do tronco no instante exato em que o raio total do tronco seja 5 vezes a espessura do "anel de matéria viva".

Solução. O primeiro passo é formalizar a modelagem da situação proposta no enunciado. Seja d a espessura

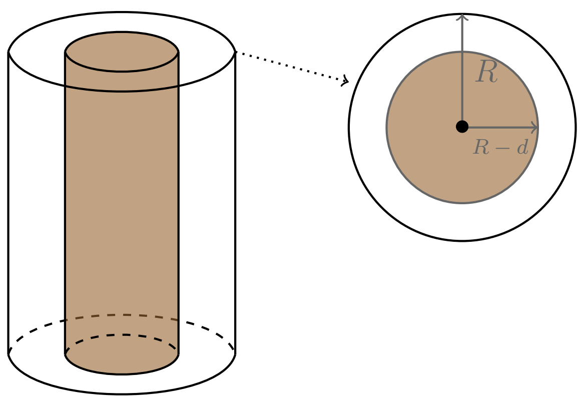


Figura 2. Modelagem cilíndrica de um tronco de árvore: identificação das variáveis que formalizam a modelagem.

do anel de matéria viva. Note que, por hipótese, d permanece constante ao longo do tempo. Seja $R(t)$ a espessura total do tronco no instante de tempo t. Em particular, a espessura do cilindro de matéria morta no tronco ao longo do tempo é $R(t)-d$. Em particular, denotando por h a altura do tronco, o volume de matéria viva é dado por

$$\pi h(R(t)^2 - (R(t)-d)^2).$$

Já o volume total do tronco é $\pi h R(t)^2$. Assim, a função que calcula a fração de matéria viva no tronco ao longo do tempo é

$$F(t) = \frac{\pi h(R(t)^2 - (R(t) - d)^2)}{\pi h R(t)^2} = \frac{R(t)^2 - (R(t)^2 - d)^2}{R(t)^2} = \frac{2d}{R(t)} - \frac{d^2}{R(t)^2}.$$

Uma das hipóteses do modelo é que o raio total do tronco cresce a uma taxa constante. Isso se traduz matemática pela hipótese de que a derivada da função $R(t)$ é constante. Seja c essa constante. Então $R'(t) = c$, para todo $t > 0$.

O objetivo final do problema é calcular $F'(t)$ no instante de tempo t para o qual $R(t) = 5d$. Para isso, aplicamos a regra da cadeia para expressar $F'(t)$ em termos de $R(t)$:

$$F'(t) = \frac{-2dR'(t)}{R(t)^2} + \frac{2d^2 R'(t)}{R(t)^3} = c\left(\frac{-2d}{R(t)^2} + \frac{2d^2}{R(t)^3}\right).$$

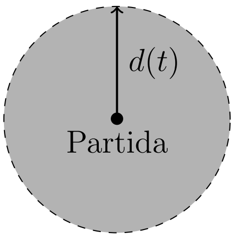
Portanto, quando $R(t) = 5d$ temos que

$$F'(t) = c\left(\frac{-2d}{25d^2} + \frac{2d^2}{125d^3}\right) = \frac{c(2 - 10d)}{125}.$$

□

Exercício 2. *Um criador de pombos selvagens acidentalmente deixou escapar sua população que rapidamente começou a se espalhar e aumentar de tamanho, ocupando uma área cada vez maior. Em um artigo clássico de ecologia, o cientista Skellam*[1] *fez um modelo que previa que a raiz quadrada da área ocupada cresce a uma taxa constante. Supondo que a área ocupada pela população de pombos seja circular, com o centro na fazendo de onde eles foram liberados, determine a velocidade com a qual a população de pombos se afasta do ponto de partida.*

Solução. Seja $d(t)$ a distância em relação ao ponto de partida no instante t. A velocidade de afastamento é portanto a derivada dessa função. A área ocupada pela população em cada instante de tempo é dada



por $\pi d(t)^2$. Por hipótese, a raiz quadrada dessa expressão, i.e. a função $f(t) = d(t)\sqrt{\pi}$, tem derivada constante constante. Como

$$f'(t) = d'(t)\sqrt{\pi},$$

se essa derivada for denotada por c, temos então que

$$d'(t)\sqrt{\pi} = c, \ \forall \ t.$$

Portanto, $d'(t) = \frac{c}{\sqrt{\pi}}$. □

[1]Skellam, J. G. 1951. Random dispersal in theoretical populations. Biometrika 38:196-218