UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Biomedicina e Ciências Ambientais

Lista de exercícios 8

Professor: Bruno Santiago

Questão 1. *Wesley não resistiu à tentação da super promoção que oferecia o novo iPhone 11 por apenas 3500 reais, que deveriam ser pagos de uma única vez no mês seguinte. Wesley estava num bom emprego, com salário de 6000 reais e ainda morava com os pais. No entanto, surgiu uma emergência e ele ficou com o orçamento muito apertado. Agora só pode comprometer, no máximo, 600 reais a cada mês para pagar essa dívida. Assim, ele decide pagar em cada mês a fatura mínima do cartão de crédito, a qual é sempre 15% da dívida. Sabendo-se que o cartão cobra juros de 15,2% ao mês sobre o saldo devedor, determine em quantos meses Wesley conseguirá quitar a dívida e quanto terá custado o celular novo ao final.*

Solução. A cada mês que passa a dívida sofre, ao mesmo tempo, um abatimento de 15% em relação ao valor do mês anterior e um acréscimo de 15,2% em relação ao mesmo montante. Assim, a cada mês que passa a dívida fica multiplicada por $0.85 \times 1.152 = 0.9792$. Como esse fator é < 1 vemos que a dívida vai se reduzindo exponencialmente até que chegue a um montante menor do que 600 reais, quando Wesley pode quitá-la integralmente. Vamos supor que Wesley se acomode em pagar sempre a fatura mínima do cartão. Nesse caso, pelo que discutimos, após t meses o montante da dívida será

$$M(t) = 3500(0.9792)^t.$$

Para saber em quantos meses o montante da dívida será de 600 reais, devemos resolver a equação

$$3500(0.9792)^t = 600 \implies t \simeq 83.9$$

Portanto, o montante da dívida só fica menor do que 600 reais após 84 meses. Para calcular quanto foi pago no total devemos somar as parcelas que são pagas a cada mês. A primeira, que foi de 0.15×3500 e as demais que foram de $0.15 \times 3500(0.9792)^t$. Aplicando a fórmula da soma para progressões geométricas vemos que

$$\text{dívida} = \frac{3500 \times 0.15(1-(0.9792)^{85})}{1-0.9792} \simeq 20922.$$

Na fórmula da soma dos termos da PG devemos considerar o termo final como 85 pois o primeiro mês é o mês "zero" quando a dívida é de 3500. □

Questão 2. *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \log(\frac{x-1}{(x+1)^2})$ *definida no intervalo* $(1, +\infty)$.

Solução. Primeiro calculamos a derivada da função f. Para isso, aplicamos a regra da cadeia. Observe que $f(x) = \log(g(x))$, com $g(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$. Pela regra da cadeia, temos que

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \times g'(x).$$

Pela regra do quociente, vemos que

$$g'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2(x+1)(x-1)}{(x+1)^4} = \frac{x^2+2x+1-2x^2+2}{(x+1)^4} = \frac{-(x+1)(x+3)}{(x+1)^4} = \frac{3-x}{(x+1)^3}.$$

Logo,

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \times g'(x) = \frac{(x+1)^2}{x-1} \times \frac{3-x}{(x+1)^3} = \frac{3-x}{(x+1)(x-1)} = \frac{3-x}{x^2-1}.$$

Estudo do sinal da derivada de f. Observe que $x^2 - 1 > 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$. Logo, pela expressão de $f'(x)$ vemos que

- $f'(x) = 0 \iff x = 3$
- $f'(x) > 0$ se $x \in (1, 3)$
- $f'(x) < 0$ se $x \in (3, +\infty)$

Passamos agora a analisar a derivada segunda de f. Para calcular $f''(x)$ basta uma aplicação direta da regra do quociente, assim

$$f''(x) = \frac{-x^2 + 1 - 2x(3 - x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 + 1 - 6x + 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 6x + 1}{(x^2 - 1)^2}.$$

Estudo do sinal de f''. Como o denominador da fração $\frac{x^2-6x+1}{(x^2-1)^2}$ é sempre positivo, sinal da derivada segunda de f fica determinado pelo sinal da expressão $x^2 - 6x + 1$ no intervalo $(1, +\infty)$. Pela fórmula de Báskhara, as raízes do polinômio $x^2 - 6x + 1$ são

$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 4 \times 1 \times 1}2 = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Observe que $3 - 2\sqrt{2} < 1$. Logo, podemos fazer a seguinte análise do sinal da derivada segunda de f:

Pela expressão de f'' vemos que

- $f''(x) = 0 \iff x = 3 + 2\sqrt{2}$
- $f''(x) < 0$ se $x \in (1, 3 + 2\sqrt{2})$
- $f''(x) > 0$ se $x \in (3 + 2\sqrt{2}, +\infty)$

Por essas análises e pelo Teste da Derivada Segunda, vemos que **o ponto crítico $x = 3$ é um ponto de máximo local**.

Estudo das assíntotas de f. Observe que a função $g(x)$ é contínua em todo o intervalo $[1, +\infty)$. Além disso, note que $g(1) = 0$. Como "$\log 0 = -\infty$" deduzimos que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty.$$

Portanto, f possui uma assíntota vertical em $x = 1$. Note que como f é uma composição de funções contínuas no intervalo $(1, +\infty)$, vemos que f é contínua em todo esse intervalo logo não possui outras assíntotas verticais. Nos resta analisar $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Para isso, primeiro analisamos

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0 - 0}{1 + 0 + 0} = 0.$$

Como $\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$, e como $f(x) = \log(g(x))$ somos levados a concluir que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$. Juntando as informações, podemos esboçar o gráfico de f: $\square$