UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Biomedicina e Ciências Ambientais

Primeira Avaliação

Professor: Bruno Santiago

Escreva suas respostas apontando claramente todos os raciocínios que conduziram a solução, bem como todos os resultados e referências utilizadas. Cada questão vale 3 pontos.

Questão 1. *Reações bioquímicas são muitas vezes baseadas na ação de proteínas enzimáticas (ou somente enzimas) que agem como catalizadores da reação (ou seja, fazem a reação "andar mais rápido"). Em geral, temos um substrato que ao se juntar com a enzima forma um complexo, o qual, ao final da reação, se separa em um produto e a enzima original que pode atuar mais uma vez. Na primeira lista de exercícios do curso vimos o* ***modelo de Michalis-Menten*** *que propunha descrever a velocidade de uma reação como função da concentração de substrato por uma função do tipo*

$$v(x) = \frac{bx}{a+x},$$

onde $a, b > 0$ são parâmetros a serem ajustados caso a caso. Há também o modelo ***sigmoidal*** *que propõe utilizar ao invés a função*

$$f(x) = \frac{bx^2}{a+x^2}.$$

(a) *Faça um esboço dos gráficos das funções v e f, analisando as assíntotas horizontais, o sinal da derivada e os pontos de inflexão (quando houverem).*
(b) *Explique a diferença entre uma reação modelada pela função v com uma reação modelada pela função f.*
(c) *O que acontece com os gráficos das funções v e f se o parâmetro a é mantido fixo e o parâmetro b aumenta? E se o parâmetro b é mantido fixo e o parâmetro a aumenta?*

Solução. Começamos esboçando o gráfico da função $v(x)$. Primeiro, observe que o domínio de interesse aqui é $[0, \infty)$, pois concentrações negativas não tem significado nessa modelagem. Vamos avaliar a derivada primeira e a derivada segunda de v nesse intervalo bem como as assíntotas horizontais. Observe que v não possui assíntota vertical no intervalo de interesse, pois o denominador não se anula nesse intervalo. Para determinar se há assíntota horizontal, calculamos o limite no infinito:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{bx}{a+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a/x+1} = b.$$

Agora calculamos a derivada primeira, aplicando a regra do quociente.

$$v'(x) = \frac{b(a+x) - bx}{(a+x)^2} = \frac{ab}{(a+x)^2}.$$

Observe que $v'(x) > 0$ para todo $x \in [0, \infty)$. Em particular, v é uma função crescente e não possui pontos críticos. Observe ainda que

$$\lim_{x\to\infty} v'(x) = 0.$$

Ou seja, a função v possui taxa de crescimento positiva mas ela vai diminuindo a medida que x aumenta. Para quantificar melhor a queda da derivada, calculamos a derivada segunda.. Para isso, aplicamos mais uma vez a regra do quociente obtendo

$$v''(x) = \frac{-2ab}{(x+a)^3} < 0,$$

o que demonstra que a derivada de v é sempre decrescente.

Resumindo o que os cálculos nos mostram até aqui temos que v é uma função com derivada sempre positiva mas que vai diminuindo a medida que x aumenta. Veja a Figura 1 abaixo, na qual esboçamos o gráfico de v em vermelho.

Vamos agora esboçar o gráfico da função f. Procedemos de forma análoga. Veja que não há assíntota vertical no domínio de interesse da função, pois o denominador da fração nunca se anula ali. Para a assíntota horizontal calculamos o limite no infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{bx^2}{a+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{b}{a/x^2+1}=b.$$

Temos portanto uma assíntota horizontal no infinito. Agora calculamos a derivada, aplicando a regra do quociente.

$$f'(x)=\frac{2bx(a+x^2)-2bx^3}{(a+x^2)^2}=\frac{2abx}{a^2+2ax^2+x^4}.$$

Vemos que $f'(0)=0$ e $f'(x)>0$ se $x>0$. Ou seja, o gráfico de f começa tangente a horizontal na origem e depois passa a ter a reta tangente com inclinação positiva a medida que x aumenta. Para quantificar melhor a variação da derivada calculamos a derivada segunda.

$$f''(x)=\frac{2ab(a^2+2ax^2+x^4)-2abx(4ax+4x^3)}{(a^2+2ax^2+x^4)^2}=\frac{2ab(a-3ax^2-3x^4)}{(a^2+2ax^2+x^4)^2}.$$

Para encontrar os pontos de inflexão e estudar o sinal da derivada segunda de f devemos resolver a equação biquadrática

$$a-3ax^2-3x^4=0$$

Para isso fazemos a mudança de variável $y=x^2$, o que nos leva a resolver a equação quadrática

$$a-3ay-3y^2=0,$$

cuja solução pode ser determinada diretamente pela fórmula de Bhaskara

$$y=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2+12a}}{-6}$$

Observe que $\sqrt{9a^2+12a}>\sqrt{9a^2}=3a$, logo, como $y=x^2$ deve ser positivo, vemos que a solução da equação biquadrática é

$$x^\star=\sqrt{\frac{3a-\sqrt{9a^2+12a}}{-6}}.$$

Agora, observe que $f''(0)>0$. Concluímos então que a derivada segunda de f começa positiva e diminui até atingir zero no ponto $x^\star$ acima e depois continua a diminuir. Assim, a derivada primeira de f é nula e crescente na origem e continua assim até o ponto de inflexão $x^\star$. A partir daí, a derivada começa diminuir, visto que a derivada segunda é negativa, e tende a zero quando x tende a infinito. Na Figura 1

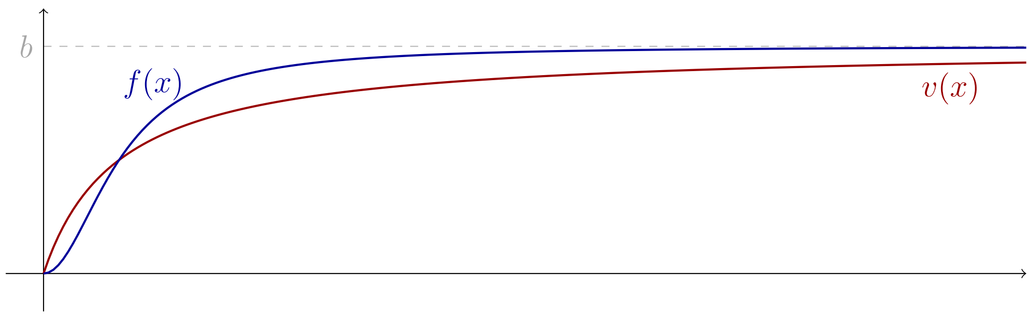


Figura 1. Gráficos das funções $f(x)$ e $v(x)$ no intervalo $[0,\infty)$.

esboçamos o gráfico de $f(x)$ em azul. A reação modelada pelo gráfico azul começa mais devagar do que a reação modelada pelo gráfico vermelho. Porém como a derivada segunda de $f(x)$ é positiva no começo (antes do ponto de inflexão $x^\star$), a inclinação da reta tangente aumenta, enquanto a inclinação da reta tangente ao gráfico vermelho de $v(x)$ só diminui. Assim, eventualmente a reação em azul fica mais rápida do que a reação em vermelho. Por fim, observe que os parâmetros a e b mudam os valores das derivadas das funções. Mais, precisamente o parâmetro b determina a assíntota horizontal dos gráficos que é a velocidade de saturação da reação em ambos os modelos. Ao passo que aumentar o parâmetro a muda as derivadas e faz o ponto de encontro dos gráficos ocorrer mais cedo. $\square$

Questão 2. *Uma indústria química trabalha com um grande reservatório de água com capacidade de 80.000 litros. Todos os dias o reservatório precisa estar cheio antes de começar a produção e em vários momentos ao longo do dia é necessário interromper a produção para encher o reservatório, processo que usualmente leva em torno de 20 minutos. Para encher o reservatório uma bomba é usada para levar a* *água até uma torneira. A bomba sempre trabalha próxima de sua vazão máxima (que é de 80 litros por segundo), mas não consegue manter a vazão constante. Suponha que o volume de água no reservatório em cada segundo seja descrito pela função*

$$V(t) = \frac{40 + 2t^2}{1 + t^{0.1}}.$$

Essa função ultrapassa a vazão máxima permitida antes do tempo necessário para encher o tanque. Utilizando o ***método de Newton****, determine com uma precisão de duas casas decimais em quantos segundos a vazão máxima será atingida.*

Solução. A derivada da função $V(t)$ pode ser calculada com a regra do quociente.

$$V'(t) = \frac{4t(1 + t^{0.1}) - (40 + 2t^2)0.1t^{-0.9}}{(1 + t^{0.1})^2} = \frac{4t + 4t^{1.1} - 4t^{-0.9} - 0.2t^{1.1}}{(1 + t^{0.1})^2} = \frac{4t + 3.8t^{1.1} - 4t^{-0.9}}{(1 + t^{0.1})^2}$$

Para descobrir em quanto tempo a vazão máxima será atingida temos que resolver a equação $V'(t) = 80$. Vamos escrever essa equação no formato $\varphi(t) = 0$, para uma função $\varphi(t)$ adequadamente construída. De fato,

$$\begin{aligned} V'(t) = 80 \quad &\iff \quad 4t + 3.8t^{1.1} - 4t^{-0.9} = 80(1 + t^{0.1}) \\ &\iff \quad 4t + 3.8t^{1.1} - 4t^{-0.9} - 80(1 + t^{0.1}) = 0. \\ &\iff \quad \varphi(t) = 0, \end{aligned}$$

onde $\varphi(t) = 4t + 3.8t^{1.1} - 4t^{-0.9} - 80(1 + t^{0.1})$. A derivada da função φ é

$$\varphi'(t) = 4 + 4.18t^{0.1} + 3.6t^{-1.9} - 80(0.2t^{-0.9} + 0.2t^{-0.8}).$$

Para encontrar uma aproximação para a raiz de φ, aplicamos o algoritmo do método de Newton. Observe que

$$\varphi(70) = 170.9093.$$

Com isso, definimos $x_1 = 70$ e recursivamente definimos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}.$$

Assim, vemos que $x_2 = 51.60720$ e $\varphi(x_2) = 3.8286$ (observe a redução com relação ao valor de $\varphi(x_1)$). Em seguida, substituindo o valor de x_2 obtemos $x_3 = 51.18463$ e $\varphi(x_3) = 0.00273$. Finalmente, vemos que $V'(51.18463) = 80.00044$, e que portanto $x_3 = 51.18463$ fornece uma aproximação com (mais do que) duas casas decimais para o ponto onde a vazão atinge o valor máximo permitido de 80 ℓ/s. □

Questão 3. *A* ***equação força-velocidade de Hill*** *é um modelo que descreve a velocidade de contração de um músculo em função da carga a ele aplicada. Se v é a velocidade de contração e x é a carga, o modelo propõe que*

$$v(x) = \frac{b(p - x)}{x + a},$$

onde $b, p, a > 0$ são parâmetros positivos. A teoria prevê que ao se aplicar uma carga muito grande a um músculo ele se alonga ao invés de se contrair e, em particular, deve apresentar velocidade de contração negativa nesse caso. Esboce o gráfico da função v e verifique se ele é coerente com a teoria.

Solução. Vamos aplicar o roteiro de esboço de gráficos que vimos no curso. Começamos analisando as assíntotas. Como o denominador da fração que define v se anula em $x = -a$ temos uma assíntota vertical nesse ponto. Como $\lim_{x \to -a} b(p - x) = bp + ba > 0$, vemos que $\lim_{x \to -a^+} v(x) = +\infty$. Analogamente vemos que $\lim_{x \to -a^-} v(x) = -\infty$.

Agora determinamos as assíntotas horizontais.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{bp - bx}{x + a} = \lim_{x \to \infty} \frac{bp/x - b}{1 + a/x} = -b.$$

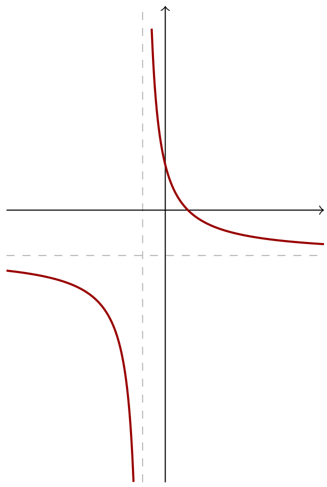
Passamos ao estudo das derivadas

$$v'(x) = \frac{-b(x + a) - b(p - x)}{(x + a)^2} = \frac{-ab - bp}{(x + a)^2} < 0.$$

Vemos assim que v é uma função estritamente decrescente em todo seu domínio. Para analisar a variação da derivada, calculamos a derivada segunda.

$$v''(x) = \frac{(-ab - bp)2(x+a)}{(x+a)^2}.$$

Vemos assim que $v''(x) > 0$ se $x > -a$ e $v''(x) < 0$ se $x < -a$. Em particular, v não possui pontos de inflexão. Como o limite no infinito é igual a $-b$, vemos que a velocidade fica negativa a partir de um certo



valor de x. $\square$

Questão 4. *Físicos gostam de interpretar o gráfico da função*

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

como uma paisagem com morros e vales. Imagine uma bola deslizando com atrito nela. Devido ao atrito a à força da gravidade, eventualmente a bola se encontrará em repouso em algum dos vales. Determine as coordenadas (x, y) no plano cartesiano dos únicos dois lugares possíveis onde a bola poderá ser encontrada em repouso.

Solução. Vamos esboçar o gráfico de $f(x)$. Note que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, porque f é um polinômio de grau par. A derivada de f é

$$f'(x) = 4x^3 - 4x.$$

Os pontos críticos de f satisfazem

$$4x^3 - 4x = 0 \iff 4x(x^2-1) = 0 \iff x = 0, \pm 1.$$

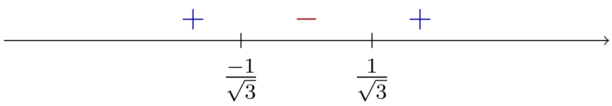
Para entender o caráter desses pontos críticos, recorremos à derivada segunda.

$$f''(x) = 12x^2 - 4.$$

Os pontos de inflexão satisfazem

$$12x^2 - 4 = 0 \iff 3x^2 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Analisando o sinal da derivada segunda, podemos fazer o diagrama Em particular, concluímos que os



pontos críticos ± 1 são pontos de mínimo local e o ponto $x = 0$ é um ponto de máximo local. Vemos assim que os pontos onde a bola vai parar são os pontos de mínimo global do gráfico. $\square$