



Universidade Federal Fluminense

Medidas Físicas de Dirac

Matheus Manso Del Valle

Niterói

Março de 2021

Medidas Físicas de Dirac

Matheus Manso Del Valle

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Bruno Rodrigues Santiago

Niterói
Março de 2021

Ficha catalográfica automática - SDC/BCV
Gerada com informações fornecidas pelo autor

D331m Del valle, Matheus Manso
Medidas Físicas de Dirac / Matheus Manso Del valle ; Bruno
Rodrigues Santiago, orientador. Niterói, 2021.
177 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Niterói, 2021.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPBI.2021.m.14732284760>

1. Sistemas dinâmicos. 2. Teoria ergódica. 3. Produção
intelectual. I. Rodrigues Santiago, Bruno, orientador. II.
Universidade Federal Fluminense. Instituto de Biologia. III.
Título.

CDD -

Dissertação de Mestrado da Universidade Federal Fluminense

por

Matheus Manso Del Valle

apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requisito parcial para a
obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Medidas Físicas de Dirac

Medidas Físicas de Dirac

Defendida publicamente em 29 de março de 2021.

Diante da banca examinadora composta por:

Bruno Rodrigues Santiago	IME-UFF	Orientador
Khadim Mbacke War	IMPA	Examinador
Pablo Andrés Guarino Quiñones	IME-UFF	Examinador
Pierre-Antoine Guihéneuf	Sorbonne Université	Examinador

DECLARAÇÃO DE CIÊNCIA E CONCORDÂNCIA DO(A) ORIENTADOR(A)

Autor(a) da Dissertação: Matheus Manso Del Valle

Data da defesa: 29/03/2021

Orientador(a): Bruno Rodrigues Santiago

Para os devidos fins, declaro **estar ciente** do conteúdo desta **versão corrigida** elaborada em atenção às sugestões dos membros da banca examinadora na sessão de defesa do trabalho, manifestando-me **favoravelmente** ao seu encaminhamento e publicação no **Repositório Institucional da UFF**.

Niterói, 18/05/2021.

Bruno Santiago

Bruno Rodrigues Santiago

Em memória de meu pai, Leopoldo

AGRADECIMENTOS

Este trabalho jamais seria possível sem a presença de pessoas extraordinárias que passaram pela minha vida, e sem o apoio e a dedicação destas pessoas não teria chegado até aqui.

Agradeço ao meu orientador, Bruno, por ser um incrível matemático e um grande amigo com quem pude contar em todos os momentos do mestrado. Não só aprendi muita matemática em nossos encontros, como também lições valiosas, que vou carregar para o resto da carreira e da minha vida.

Agradeço a todos do Programa de Pós-graduação em Matemática da UFF, em especial a Tayene, Jacqueline e Max, que se dedicam a oferecer e a criar o melhor ambiente de trabalho possível, e que estão sempre dispostos a ajudar.

Agradeço também a todos os meus amigos e colegas da UFF, em especial a Átila, Bruno, Edson, Felipe, Gabriel, Gheisa, João, Odylo, Paulo, Rodrigo, Samuel e Victor, que sempre estiveram do meu lado e com quem compartilhei muitas ideias matemáticas (e filosóficas) ao longo da graduação e do mestrado. O entusiasmo e a alegria destas pessoas trouxe vida ao ambiente universitário e foi muito gratificante compartilhar a mesma experiência com elas.

Deixo este trabalho em homenagem ao meu pai, que dedicou parte da sua vida a minha educação, e cujo maior sonho até o fim de sua vida era me ver tendo sucesso na carreira acadêmica. Homenageio também minha mãe, que sempre se dedicou a cuidar de mim e a me tornar em um adulto consciente e íntegro. Aos meus irmãos e a toda minha família, expresso aqui enorme gratidão por todos esses anos de convivência e carinho.

Agradeço também aos meus amigos de longa data, Leandro, Vinícius e Thadeu, que tornaram a minha vida numa fonte de alegria e felicidade, e que me acompanham desde o início da minha juventude.

A Isabela, minha companheira, agradeço por ser o amor da minha vida todos os dias.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço também a CAPES pela bolsa de financiamento de estudos dos processos 88882.456666/2019-01 e 88887.473866/2020-00, bem como a Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pela bolsa de financiamento de estudos de processo E-26/201.208/2020 (258116), pertencente ao programa de fomento "Mestrado Nota 10".

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo estudar sistemas dinâmicos que são caóticos do ponto de vista da dinâmica topológica, porém munidos de uma medida física de Dirac, isto é, medidas invariantes cuja bacia estatística de atração tem medida de Lebesgue positiva, suportadas em um ponto fixo. Neste sentido, provamos o teorema de Saghin-Sun-Vargas, que exhibe uma deformação do fluxo linear no toro, cuja única medida ergódica é uma delta de Dirac com massa concentrada num ponto fixo; em particular, essa medida é física, e sua bacia estatística de atração coincide com o toro. Em seguida, estudamos os mapas com pontos fixos neutrais do intervalo e provamos o teorema sobre aplicações Maneville-Pomeau, que afirma o seguinte: existe uma medida infinita que é invariante e absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, e sua única medida física é uma delta de Dirac concentrada no ponto fixo com derivada igual a 1. Para finalizar, estudamos o teorema de Lai-Sang e Hu sobre difeomorfismos quase-Anosov; difeomorfismos que podem ser vistos como deformações de um anosov linear no toro no qual a direção instável no ponto fixo na origem fica indiferente.

ABSTRACT

The work presented here has the objective to study dynamical systems that are chaotic from the point of view of topological dynamics, provided with a Dirac physical measure, that is, invariant measures whose statistical basin has positive Lebesgue measure and are supported in a fixed point. After, we prove the Saghin-Sun-Vargas theorem, exhibiting a perturbation of a linear flow in the torus, whose unique ergodic measure is a Dirac delta supported in a fixed point; in particular, we conclude that this measure is physical, and its statistical basin is the whole torus. From that point on, we study maps of the interval with neutral fixed points, and we prove a theorem about Maneville-Pomeau maps that states the following claim: that exists an infinite invariant measure that is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, and its only physical measure is a Dirac delta supported in the fixed point whose derivative is equal to 1. We finish this work studying the Lai-Sang and Hu theorem about almost Anosov diffeomorphisms; these can be seen as a perturbation of an Anosov linear diffeomorphism in which the unstable direction in the fixed point at the origin is indifferent.

Lista de Figuras

1.1	Exemplo do olho de Bowen	18
1.2	Mapa com um ponto fixo neutral na origem	21
2.1	A figura acima mostra um exemplo de um fluxo irracional. Cada linha inclinada representa uma órbita típica do fluxo	28
2.2	A primeira e a segunda imagem representam as órbitas de um ponto $x \neq p$ pelos fluxos X^t e Y^t respectivamente. Observe que as trajetórias são as mesmas, mas o tempo que as órbitas de x com respeito aos fluxos X^t e Y^t levam para chegar ao ponto y são possivelmente distintos	30
2.3	Ideia da prova de que o fluxo obtido é topologicamente misturador	30
4.1	Aplicação expansora por partes do exemplo 4.3.2	83
4.2	Exemplo 4.3.3	84
4.3	a aplicação do exemplo 4.4.2 não é expansora por partes e seu operador de Perron-Frobënus não está bem definido	86
4.4	Exemplo de uma aplicação expansora por partes com mais de uma medida invariante absolutamente contínua	97
5.1	Mapa com um ponto fixo neutral na origem	100
5.2	Ideia da prova do item a)	102
5.3	Ideia da prova do item a)	102
5.4	O ponto x que pertence ao intervalo η_6 leva 6 iterados para chegar ao intervalo $[c_1, f(c_1)]$	103
5.5	Exemplo de uma \hat{f} para um mapa com ponto fixo neutral	103
5.6	Um mapa do intervalo, que não é um mapa com ponto fixo neutral, onde a convergência da sequência c_j é exponencial.	105
6.1	Exemplo de uma aplicação de holonomia entre duas folhas instáveis	141
6.2	Exemplo de uma folheação que não é Lipschitz	142
6.3	Ideia da demonstração do teorema 6.4.3	143
6.4	Ideia da demonstração do primeiro lema geométrico. Na figura, o caminho poligonal (em vermelho) aproxima a curva γ (em azul) e o caminho em verde representa a projeção do segmento s_i na reta r	145
6.5	Ideia da prova do segundo lema geométrico	146

6.6	Prova da proposição 6.4.10	151
6.7	O retângulo Q cruza markovianamente o retângulo R	151
6.8	Ideia da demonstração da proposição 6.4.14	152
6.9	$\tilde{\gamma}_j$ são disjuntos dois-a-dois	155
6.10	Ideia da prova do teorema 6.1.2	160
6.11	Ideia da prova do lema 6.6.1	162
6.12	A componente de $f^j(U)$ em azul não é uma <i>crossing component</i> e a componente de $f^j(U)$ em vermelho é uma <i>crossing-component</i>	163
6.13	Na figura acima, $y \in \hat{W}^s$ e $z \in f(\hat{W}^s) = g(\hat{W}^s)$	164

Sumário

Lista de Figuras	10
1 Introdução	15
1.1 Definições básicas	16
1.2 Medidas SBR e difeomorfismos quase-Anosov	21
2 Medidas físicas de Dirac em fluxos transitivos	27
2.1 O fluxo irracional	27
2.2 Medidas absolutamente contínuas de um fluxo modificado	31
2.3 Medidas assintóticas de uma reparametrização	38
2.4 O fluxo irracional modificado	42
3 Existência de Medidas Físicas para Aplicações Expansoras	45
3.1 Introdução	45
3.2 Propriedades topológicas das aplicações expansoras	46
3.3 Cones e métricas Projetivas	49
3.4 O operador de Perron-Frobënus de uma aplicação expansora	59
3.5 Existência de medidas invariantes absolutamente contínuas	62
4 Aplicações Expansoras Por Partes com Infinitos Ramos	71
4.1 Funções de variação limitada do intervalo	72
4.2 O Teorema de Helly	78
4.3 Aplicações expansoras por partes do intervalo	82
4.4 O operador de Perron-Frobënus	85
4.5 Medidas invariantes absolutamente contínuas	91
5 Mapas com pontos fixos neutrais	99
5.1 Introdução	99
5.2 Propriedades elementares	101
5.3 Propriedades de distorção	107
5.4 Medidas invariantes absolutamente contínuas	110
5.5 Comportamento estatístico das órbitas	118

6	Difeomorfismos quase-Anosov	131
6.1	introdução	131
6.2	Decomposição Dominada	133
6.3	Propriedades básicas	138
6.4	Propriedades das folheações estável e instável	141
6.5	Estimativas de Distorção	153
6.6	Não-existência de medidas SBR	157
6.7	Comportamento estatístico das órbitas	161
6.8	Construção de um quase-Anosov no toro	167
6.9	Discussão	172
	Bibliografia	175

Introdução

Um dos objetivos da teoria de sistemas dinâmicos é estudar o comportamento assintótico de sistemas que evoluem através do tempo de forma discreta ou contínua, como as soluções de uma equação diferencial. Grande parte da motivação que originou esta área da matemática surgiu da física; um dos exemplos de sistemas dinâmicos mais importantes são os chamados sistemas Hamiltonianos, que descrevem a evolução de sistemas conservativos na mecânica Newtoniana. Por outro lado, a teoria ganha ainda mais importância quando se leva em conta que a maioria dos fenômenos sociais, naturais e econômicos, como o crescimento populacional, a previsão do tempo e dinâmica de preços por exemplo, podem ser modelados por sistemas de equações diferenciais. Por este motivo, a existência de uma teoria que estude a evolução e o comportamento assintótico de sistemas de uma forma bem geral é fundamental.

Existem várias maneiras de abordar a teoria de sistemas dinâmicos. Uma delas é através da dinâmica topológica, que preocupa-se com o estudo da estrutura do espaço de fase de sistemas que agem em um espaço munido de uma topologia. Fundada por Poincaré, tinha como objetivo estudar o comportamento qualitativo das soluções de equações diferenciais que não poderiam ser resolvidas analiticamente. Um dos primeiros triunfos da teoria foi a classificação de Poincaré dos homeomorfismos do círculo e o estudo global de campos de vetores em superfícies.

Outra maneira de abordar a teoria é através da teoria ergódica, que se dedica ao estudo do comportamento a longo prazo de sistemas dinâmicos a partir do ponto de vista estatístico e à evolução de sistemas que preservam alguma medida invariante. Suas origens estão intimamente relacionadas à famosa hipótese ergódica de Boltzmann o qual postulou que para quase todo ponto do espaço de fase de um sistema, a média temporal coincide com a média espacial. Esta célebre hipótese, por mais que tenha surgido motivada por problemas da mecânica estatística, ganhou significado matemático quando Birkhoff provou que esta hipótese é verdadeira para sistemas que preservam alguma medida invariante e ergódica, para quase todos os pontos que a medida enxerga, em seu famoso teorema ergódico.

Como podemos ver, grande parte do sucesso da teoria se originou a partir da mudança de abordagem dada aos problemas de recorrência, que em vez de procurar soluções explícitas para sistemas que evoluem com o tempo (e que podem apresentar um comportamento extremamente complexo, imprevisível e inviável de calcular mesmo para os melhores supercomputadores), estuda-se o comportamento qualitativo de suas soluções o qual pode ser feito tanto do ponto de vista topológico quanto estatístico ou ambos. Pensando nestes dois tipos de comportamento, uma pergunta natural que surge é se a estrutura do espaço de fase de um sistema e de suas soluções se relacionam com o comportamento estatístico de suas órbitas. De fato, é verdade que o estudo das medidas invariantes de um sistema e de seu comportamento estatístico

conduza a informações importantes sobre seu comportamento do ponto de vista topológico. Um dos primeiros resultados nesta direção por exemplo, é o teorema de recorrência de Poincaré, que concluiu que a existência de uma medida invariante para um sistema determina em grande parte a recorrência das soluções.

A questão que levantamos neste trabalho motivada por esta pergunta é sobre o seguinte problema: é possível que existam sistemas que apresentem comportamento totalmente determinístico do ponto de vista estatístico, mas cujo comportamento dinâmico-topológico é extremamente caótico? A resposta para essa pergunta é positiva e com o objetivo de explorá-la mais a fundo, vamos introduzir ao longo do texto os conceitos necessários para estudar as técnicas desenvolvidas ao longo dos últimos anos e obter uma resposta completa a este problema.

1.1 Definições básicas

Neste trabalho, vamos sempre supor que um sistema dinâmico é um mapa $f : M \rightarrow M$ ou um fluxo $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ (que podem ser mensuráveis, contínuos, de classe C^r etc.) onde M é uma variedade Riemanniana compacta e conexa, com ou sem bordo. Sempre vamos denotar por $C^0(M)$ como o espaço das funções contínuas reais de M e denotamos por $\mathcal{M}(M)$ o espaço das medidas de probabilidade borelianas (isto é, o espaço das medidas de probabilidade regulares) munido com a topologia fraca-*. Em alguns casos particulares, também vamos denotar por $\mathcal{M}^+(M)$ o espaço das medidas borelianas com sinal de M . É conhecido (veja lema 2.1.1 em [OV10]) que uma sequência de medidas $\mu_n \in \mathcal{M}(M)$ converge para uma medida $\mu \in \mathcal{M}(M)$ se e somente se para toda função contínua $\varphi \in C^0(M)$ vale a seguinte propriedade:

$$\int \varphi d\mu_n \rightarrow \int \varphi d\mu \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

Dada uma aplicação contínua $f : M \rightarrow M$ definida em M , podemos definir um mapa $f_* : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathcal{M}(M)$ chamado de **pushforward de f** definido por $(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A))$ para todo boreliano $A \subset M$. Dizemos que uma medida $\mu \in \mathcal{M}(M)$ é **f-invariante** se $f_*\mu = \mu$, ou seja, se $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo boreliano $A \subset M$. De forma análoga, dado um fluxo contínuo $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ e denotando por $X^t : M \rightarrow M$ o homeomorfismo definido por $X^t(p) = X(t, p)$ para cada $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$, dizemos que uma medida $\mu \in \mathcal{M}(M)$ é **X-invariante** se $X_*^t\mu = \mu$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

De modo geral, podemos pensar em um sistema dinâmico discreto $f : M \rightarrow M$ ou contínuo $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ como um modelo que descreve algum fenômeno físico que evolui com o tempo e as quantidades que podemos medir fisicamente (chamados de observáveis) se correspondem a funções contínuas reais φ definidas no espaço de fase M . Portanto, obter informações experimentais sobre o modelo físico é equivalente a obter informações intrínsecas sobre o sistema a partir da sequência de medições $\varphi(f^j(x))$ ou $\varphi(X^t(x))$ para alguma condição inicial $x \in M$ em tempo $j \geq 0$ ou $t > 0$. Mais especificamente, gostaríamos de estudar a sequência de **médias temporais** para cada $x \in M$:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \text{ com } n \geq 1$$

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(X^s(x)) ds \text{ com } t > 0$$

Exemplo 1.1.1. Considere a função $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = x^3$. Então, $f^n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ para todo $x \neq 1$ e $f(1) = 1$. Por este motivo, é possível checar que para toda função contínua $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e toda condição inicial $x \neq 1$ a média temporal satisfaz:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \rightarrow \varphi(0) \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

Ou seja, exceto um conjunto de medida nula, a média temporal existe e independe da condição inicial tomada.

Dada uma aplicação mensurável $f : M \rightarrow M$ e $x \in M$ qualquer fixado, definimos para cada $n \geq 1$ a medida de probabilidade:

$$\mu_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} \quad (1.1)$$

A sequência de medidas definida acima é chamada de **sequência de medidas orbitais de x com respeito a f** . Supondo que $\mu \in \mathcal{M}(M)$ seja uma medida f -invariante, definimos a **bacia estatística de atração de f** como o conjunto:

$$\mathcal{B}_f(\mu) = \left\{ x \in M; \mu_n(x) \rightarrow \mu \text{ quando } n \rightarrow +\infty \right\} \quad (1.2)$$

Onde o limite acima é com respeito à topologia fraca-* em $\mathcal{M}(M)$. Observe que por definição da topologia fraca-*, um ponto $x \in M$ pertence à bacia estatística de atração de μ se e somente se para toda função contínua $\varphi \in C^0(M)$ temos:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \rightarrow \int \varphi d\mu \text{ quando } n \rightarrow +\infty \quad (1.3)$$

Definição 1.1.2. Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação mensurável e $\mu \in \mathcal{M}(M)$ uma medida f -invariante. Dizemos que μ é uma **medida física** se a bacia estatística de atração de μ tem medida de Lebesgue positiva, isto é, $m(\mathcal{B}_f(\mu)) > 0$

As medidas físicas que são absolutamente contínuas são objetos de estudo recentes na teoria ergódica e têm chamado a atenção de grandes matemáticos. Estas medidas são as medidas invariantes mais compatíveis com volume quando a medida de volume ambiente da variedade (Lebesgue) não é preservada e oferecem um mecanismo para explicar como a instabilidade local de atratores pode produzir estatísticas coerentes para órbitas que começam em grandes conjuntos da bacia de atração (leia [You02] para mais detalhes).

Podemos fazer definições análogas para fluxos contínuos $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ da seguinte forma: para cada $t > 0$ e $x \in M$ fixados, observe que a aplicação definida por $C^0(M) \ni \varphi \mapsto \varphi_t(x) \in \mathbb{R}$ é um funcional linear e contínuo no espaço $C^0(M)$. Como M é um espaço métrico compacto, então pelo

teorema de Representação de Riesz ¹, existe uma única medida $m_{X,t}(x) \in \mathcal{M}(M)$ que satisfaz para toda função contínua $\varphi \in C^0(M)$:

$$\int \varphi dm_{X,t}(x) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(X^s(x)) ds \quad (1.4)$$

Dizemos que $m_{X,t}(x)$ é uma **medida orbital de x no tempo t** . Dada uma medida X -invariante, definimos a **bacia estatística de atração de μ com respeito ao fluxo X** como o conjunto:

$$\mathcal{B}_X(\mu) = \left\{ x \in M; m_{X,t}(x) \rightarrow \mu \text{ quando } t \rightarrow +\infty \right\} \quad (1.5)$$

Onde novamente, o limite acima é com respeito à topologia fraca*. Desta forma, dizemos que uma medida X -invariante $\mu \in \mathcal{M}(M)$ é uma **medida física** se $m(\mathcal{B}_X(\mu)) > 0$.

No exemplo 1.1.1, a delta de Dirac δ_0 uma medida invariante e ergódica suportada na origem e sua bacia estatística é o conjunto $\mathcal{B}_f(\mu) = [0, 1)$. Em particular, δ_0 é uma medida física. Entretanto, observe que o comportamento dinâmico deste exemplo é trivial no sentido de que, com exceção do ponto fixo em $x = 1$, os iterados de todos os outros pontos do intervalo $[0, 1]$ convergem para o ponto fixo na origem. Assim, tanto o comportamento estatístico quanto o dinâmico são triviais. Da mesma forma, também é possível obter fluxos contínuos que não possuem medidas físicas:

Exemplo 1.1.3. O fluxo ² descrito na figura 1.1 é dado por um campo de vetores X do plano com dois pontos-sela A e B que limitam uma região L contendo uma singularidade atratora em C . Sob hipóteses apropriadas nos ângulos dos pontos-sela em A e B , a trajetória de todo ponto $z \in L \setminus \{C\}$ se acumula no bordo de L quando $t \rightarrow +\infty$. Por outro lado, dada qualquer função contínua φ com $\varphi(A) \neq \varphi(B)$, a média temporal:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(X^t(z)) dt$$

Não existe para nenhum $z \in L \setminus \{C\}$.

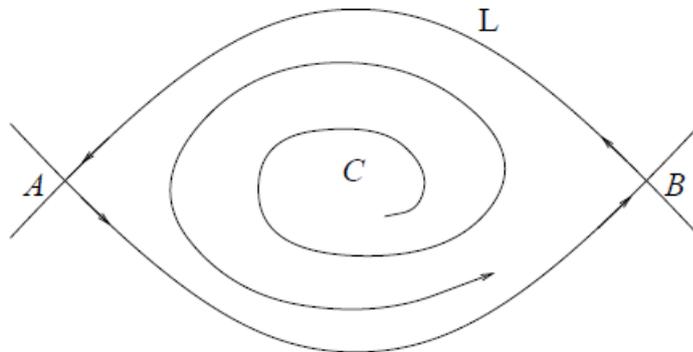


Figura 1.1: Exemplo do olho de Bowen

¹Este teorema é bastante conhecido e pode ser encontrado em qualquer livro de Teoria da medida. Uma boa referência se encontra na sessão 21.5 em [RF88]

²A construção deste exemplo é atribuída a Bowen e é conhecido na literatura em sistemas dinâmicos como *Olho de Bowen*. Veja [Tak94] para mais detalhes.

Reformulando a pergunta feita no final da sessão anterior, é possível que existam exemplos de sistemas dinâmicos $f : M \rightarrow M$ ou $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ que apresentem comportamento caótico (como a transitividade ou infinitos pontos periódicos, por exemplo), mas que apresente uma medida física suportada em um ponto fixo ou em uma união finita de pontos periódicos?

O exemplo que vamos exibir no primeiro capítulo deste trabalho, que responde afirmativamente a esta pergunta é de um fluxo de classe C^∞ no toro \mathbb{T}^2 com exatamente um ponto fixo, obtido a partir de uma pequena modificação do fluxo irracional, satisfazendo as seguintes propriedades: todas as suas órbitas, com exceção do ponto fixo são densas no toro e a delta de Dirac com suporte no ponto fixo é a única medida física deste fluxo. Mais especificamente, vamos estudar com detalhes a demonstração do seguinte teorema, provado na sessão 2 em [SSV10].

Teorema 1.1.4 (Saghin, Sun, Vargas). *Seja X o campo que gera o fluxo irracional em \mathbb{T}^2 e seja $p \in M$ fixado. Então, existe uma função $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ de classe C^∞ de modo que o fluxo Y^t gerado pelo campo $Y = \varphi X$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) Y^t é um fluxo transitivo.
- (ii) $B_Y(\delta_p) = \mathbb{T}^2$.

A construção do exemplo anterior envolve técnicas mais gerais que serão exploradas no capítulo 2 e que surgem do estudo do seguinte problema: se X é um campo de vetores de \mathbb{T}^2 que gera um fluxo X^t cujo comportamento estatístico é bem conhecido e $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ é uma função de classe C^∞ qualquer, o que podemos dizer sobre a estatística do novo fluxo Y^t obtido a partir do campo $Y = \varphi X$? Mais especificamente, quais medidas invariantes pelo fluxo X^t sobrevivem após mudar o fluxo para Y^t e como isso depende da função φ ? O exemplo que vamos obter no teorema 1.1.4 funciona porque o fluxo é construído de modo que ele seja unicamente ergódico e sua única medida invariante é a delta de Dirac no ponto p . Em outras palavras, este fluxo construído tem uma delta de Dirac como medida física por *escassez* de medidas invariantes.

Aplicações expansoras

A questão sobre a existência ou não de medidas físicas em sistemas dinâmicos é um problema relativamente recente e até o momento, existem poucos resultados que exploram esta questão em grande generalidade. Acredita-se que medidas físicas existam para a grande maioria dos sistemas (ver [Via97]), mas construções explícitas são conhecidas apenas para alguns casos. Além da existência, é pertinente se perguntar quais destas medidas são medidas de volume ou que em algum sentido, capturam a hiperbolicidade do sistema, pelo menos em um conjunto com medida de Lebesgue positiva do espaço de fase.

Pensando neste problema, no segundo capítulo iremos explorar esta questão para uma classe bastante ampla de aplicações chamadas de **aplicações expansoras**, que são funções de classe $C^{1+\alpha}$ cuja derivada expande os vetores do espaço tangente em cada ponto. No terceiro capítulo, também vamos explorar esta mesma questão para uma classe de aplicações no intervalo $[0, 1]$ chamadas de **aplicações expansoras por partes com infinitos ramos**, que são aplicações semelhantes à transformação de Gauss e que são expansoras em cada intervalo de monotonicidade. Vamos provar os seguintes teoremas, que também estão presentes em [Via97].

Teorema 1.1.5. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação expansora de classe C^1 tal que $|\det df|$ seja ν_0 -Hölder para algum $\nu_0 \in (0, 1]$. Então, existe uma única medida μ_0 que é f -invariante e absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Além disso, μ_0 é ergódica (exata) e sua derivada de Radon-Nykodim $d\mu_0/dm$ é estritamente positiva. Em particular, μ_0 é a única medida física de f .*

Teorema 1.1.6 (Existência de medidas invariantes absolutamente contínuas). *Se $f : I \rightarrow I$ é uma aplicação expansora por partes com taxa de expansão uniforme $\lambda > 3$ então existe uma medida de probabilidade μ invariante por f que é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue e com densidade de variação limitada.*

A técnica principal usada para provar os dois teoremas acima é estudar um operador especial, o **Operador de Perron-Frobënus de f** (ou **Operador de Transferência**) que age nas densidades das medidas de probabilidade absolutamente contínuas do sistema. No contexto do teorema 1.1.5 por exemplo, é definido no espaço das funções integráveis $L^1(M, m)$ por:

$$(\mathcal{L}\varphi)(y) = \sum_{y=f(x)} \frac{\varphi(x)}{|\det df(x)|}$$

O que distingue esse operador e o torna útil para as aplicações, é a propriedade de dualidade, consequência da fórmula de mudança de variáveis:

$$\int (\mathcal{L}\varphi)\psi dm = \int \varphi(\psi \circ f) dm$$

A relação anterior implica em particular, o fato surpreendente de que pontos fixos do operador de Perron-Frobënus estão associados a medidas invariantes absolutamente contínuas do sistema. Nos teoremas 1.1.5 e 1.1.6 exploramos as propriedades intrínsecas destes sistemas dinâmicos para garantir que seus respectivos operadores de transferência possuem um ponto fixo.

Gostaríamos de comentar que, neste trabalho, a importância do papel das aplicações expansoras e expansoras com infinitos ramos é duplo: primeiro, elas servem como um contraponto ao exemplo estudado no capítulo 2 pois são sistemas caóticos em ambas as direções (topológica e ergódica/estatística). Além disso, elas vão servir nos capítulos seguintes de base para a construção de exemplos triviais estatisticamente, mas complexos do ponto de vista topológico.

Mapas com pontos fixos neutrais

No capítulo 5, voltamos a questão proposta no início deste capítulo, refinando o problema com base nos exemplos anteriores. Com base nos teoremas 1.1.5, 1.1.6, que garantem a existência de medidas físicas absolutamente contínuas para aplicações que apresentam um comportamento de expansão em todo o espaço de fase, propomos a seguinte pergunta: até que ponto podemos relaxar a condição de expansão e garantir a existência de medidas físicas absolutamente contínuas? O seguinte teorema, provado no capítulo 4 mostra que esta é uma questão extremamente delicada (ver [Via97]):

Teorema 1.1.7. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma aplicação do intervalo $[0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *Existe $c \in (0, 1)$ tal que f é crescente e de classe C^2 nos intervalos $[0, c]$ e $(c, 1]$, onde $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = 0$, $f^2(c) > c$ e existe o limite lateral $\lim_{x \rightarrow c^+} f''(x)$.*

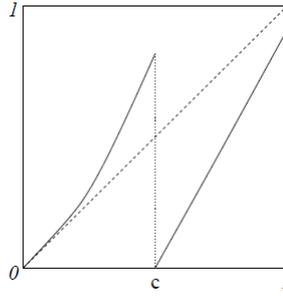


Figura 1.2: Mapa com um ponto fixo neutral na origem

(ii) $f'(0) = 1$, $f''(0) > 0$ e $|f'(x)| > 1$ para todo $x \neq 0$

Então, existe uma medida μ invariante, absolutamente contínua, que é σ -finita, mas **não é finita**. Mais ainda, μ é única a menos de uma multiplicação por uma constante positiva e tem densidade de variação limitada. Além disso, dada qualquer função contínua $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vale:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \rightarrow \varphi(0)$$

para $x \in [0, 1]$ lebesgue q.t.p. Em particular, a delta de Dirac δ_0 no ponto fixo $x = 0$ é a única medida física de f .

O exemplo que vamos apresentar neste capítulo e que satisfaz as hipóteses deste teorema (figura 1.2), é de uma aplicação diferenciável por partes no intervalo $[0, 1]$ que é expansora em quase todos os pontos do domínio, com excessão do ponto fixo na origem, semiconjugada ao mapa $2x \pmod{1}$ do intervalo. Em particular, é transitivo e seus pontos periódicos são densos no intervalo. Por outro lado, este sistema dinâmico não possui medidas absolutamente contínuas finitas e sua única medida física é uma delta de Dirac com suporte na origem. Ou seja, por mais que ela apresente um comportamento expansor em todos os pontos exceto na origem, isso não é suficiente para garantir a existência de medidas físicas absolutamente contínuas.

1.2 Medidas SBR e difeomorfismos quase-Anosov

No último capítulo deste trabalho, vamos levar o problema discutido acima para o contexto parcialmente hiperbólico, onde será investigada uma classe bastante interessante de aplicações do toro que também apresentam um comportamento hiperbólico em todo seu espaço de fase com excessão de um único ponto fixo. Esta classe de aplicações no toro pode ser pensada como uma versão em dimensão dois da classe de aplicações apresentadas no capítulo 5. Antes, vamos introduzir algumas terminologias que serão utilizadas neste capítulo. Suponha que $f : M \rightarrow M$ seja um difeomorfismo de classe C^1 em M . O seguinte teorema, originalmente publicado em [Ose68] é um resultado bastante conhecido de teoria ergódica diferenciável:

Teorema 1.2.1. *Se μ é uma medida ergódica para f , então existem números reais $\chi_1 < \dots < \chi_k$ e um subconjunto $R_\mu(f)$ que é f -invariante com μ -medida total de modo que para todo $x \in R_\mu(f)$ existe uma decomposição $T_x M = E^1(x) \oplus \dots \oplus E^k(x)$ onde cada E^i é um fibrado df -invariante, isto é,*

$df(x)(E^i(x)) = E^i(f(x))$ para todo $i = 1, \dots, k$. Além disso, $x \mapsto E^i(x)$ são mensuráveis e para cada $v \in E^i(x) \setminus \{0\}$ existem os seguintes limites:

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v\| = \chi_i \quad (1.6)$$

Os números χ_i são chamados de **expoentes de Lyapunov** e todo ponto $x \in R_\mu(f)$ é chamado de **ponto regular de f** . Uma pergunta bastante frequente na teoria diferenciável de sistemas dinâmicos é como podemos recuperar informações dinâmicas sobre um difeomorfismo, conhecendo o comportamento de suas derivadas. Dado $x \in M$, definimos a **variedade instável no ponto x com respeito a f** como o conjunto:

$$\mathcal{W}^u(x) = \{y \in X; d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty\} \quad (1.7)$$

Definimos de forma análoga a **variedade estável no ponto x com respeito a f** :

$$\mathcal{W}^s(x) = \{y \in X; d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty\} \quad (1.8)$$

As variedades instável e estável refletem o comportamento a nível das derivadas de f . De fato, é provado em [Pes76] que se μ é ergódica e f tem expoentes de Lyapunov positivos quase todo ponto (respectivamente negativos) então a variedade instável (respectivamente, estável) está bem definida quase todo ponto e é uma subvariedade imersa tangente ao fibrado com expoentes positivos.

Se ν é uma medida de probabilidade em M , dizemos que $\xi = \{A_i; i \in I\}$ é uma **partição de M** se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ e satisfaz a seguinte propriedade:

$$\nu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1$$

Quando I é finito ou enumerável, dizemos que a partição ξ é **finita** ou **enumerável**, respectivamente. Dadas partições ξ, η de M , dizemos que ξ é **menos fina** do que η e denotamos por $\xi \prec \eta$ se $\eta(x) \subset \xi(x)$ para ν -q.t.p. onde $\xi(x), \eta(x)$ denotam os elementos de ξ e η respectivamente que contém x . Dada uma sequência de partições $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de M , definimos:

$$\xi = \bigvee_{n=1}^{+\infty} \xi_n \quad (1.9)$$

Como a partição menos fina tal que $\xi_n \prec \xi$ para todo $n \geq 1$. Dizemos que uma partição ξ é **mensurável** se restrita a um conjunto de ν -medida total $M_0 \subset M$, existe uma sequência de partições mensuráveis $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfaz 1.9. O próximo teorema cuja prova pode ser encontrado no teorema 5.1.11 em [OV10] diz que associada a uma partição mensurável, toda medida de probabilidade ν em M pode ser desintegrada e escrita como uma combinação convexa de medidas de probabilidade indexadas pelos átomos da partição.

Teorema 1.2.2 (Desintegração de Rohklin). *Nas condições acima, se ξ é uma partição mensurável então existe uma família de medidas de probabilidade $\{\nu_x^\xi; x \in M\} \subset \mathcal{M}(M)$ tais que:*

(i) $\nu_x^\xi(\xi(x)) = 1$ para todo $x \in X$

(ii) Para todo $B \in M$ mensurável, a função $x \mapsto \nu_x^\xi(B)$ é mensurável.

(iii) $\nu(B) = \int \nu_x^\xi(B) d\nu(x)$ para todo $B \subset M$ mensurável.

As variedades instável e estável induzem uma partição em M . Por outro lado, são conhecidos exemplos de difeomorfismos cuja partição por variedades instáveis não é mensurável (veja o apêndice B em [Bro+18]). Para contornar situações como esta, introduzimos o que chamamos de **partições subordinadas a variedades instáveis**.

Definição 1.2.3. Dizemos que uma partição mensurável ξ é **subordinada a variedades instáveis** se $\xi(x) \subset \mathcal{W}^u(x)$ para $x \in M$ μ -q.t.p. e existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap \mathcal{W}^u(x) \subset \xi(x)$ para $x \in M$ μ -q.t.p. Mais ainda, dizemos que μ tem **medidas condicionais absolutamente contínuas em variedades instáveis** se para toda partição mensurável ξ subordinada a variedades instáveis, temos $\mu_x^\xi \ll m_x^u$ para $x \in M$ μ -q.t.p. onde m_x^u é a medida de Lebesgue de $\mathcal{W}^u(x)$.

Voltando à questão de como o comportamento estatístico influencia a dinâmica no espaço de fase, na tentativa de desenvolver uma noção de hiperbolicidade não-uniforme que pudesse ser expressa em termos de expoentes de Lyapunov, Sinai, Bowen e Ruelle introduziram, na década de 70, uma classe muito especial de medidas invariantes, as chamadas **medidas SBR** (que leva o nome destes três últimos citados):

Definição 1.2.4. Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo numa variedade compacta M . Dizemos que uma medida de probabilidade μ que é f -invariante é uma **medida SBR** (Sinai-Bowen-Ruelle) se:

- (i) (f, μ) tem expoentes de Lyapunov positivos μ -q.t.p.
- (ii) μ tem medidas condicionais absolutamente contínuas em variedades instáveis.

Desde a década de 70, muitos resultados importantes foram provados sobre medidas SBR ergódicas que mostram que elas são de fato, uma classe de medidas físicas muito especiais: além de descrever o comportamento caótico do sistema e revelar ricas propriedades dinâmicas e estatísticas, as medidas SBR também caracterizam suas propriedades *geométricas* (veja os teoremas 3,4 e 5 em [You02]). Como a existência de uma medida SBR para um sistema dinâmico diz muito sobre o próprio sistema, muitos matemáticos famosos têm procurado condições necessárias para a existência destas medidas desde então. Sinai, por exemplo, provou em [Sin72] que todo difeomorfismo de Anosov de classe C^2 em uma variedade compacta admite uma medida SBR. Resultados parecidos também foram estendidos por Bowen e Ruelle em [Bow75]) para difeomorfismos axioma A. Isso gerou expectativas de que a dinâmica de muitos atratores pudesse ser descrita por medidas SBR.

Por mais que resultados de existência sejam conhecidos no contexto uniformemente hiperbólico, como no caso dos difeomorfismos de Anosov, a questão de existência destas medidas no contexto mais amplo da teoria parcialmente hiperbólica ainda é pouco conhecida, ainda que nos últimos anos tenham sido desenvolvidas algumas técnicas para estudar este problema (veja [ABV00] e [Hu00]). Voltando à questão principal trazida neste trabalho, dentro deste contexto, dado um difeomorfismo que aparenta ser hiperbólico em quase todo o seu espaço de fase, é possível determinar a existência de medidas físicas SBR? Procurando responder a esta pergunta, vamos introduzir neste capítulo uma classe de difeomorfismos muito especial, chamados de *difeomorfismos quase-Anosov*.

Definição 1.2.5. Seja M uma variedade Riemanniana e compacta de dimensão 2. Dizemos que um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^2(M)$ é **quase-Anosov** se f satisfaz as seguintes propriedades:

(i) f possui um ponto fixo $p \in M$.

(ii) Existe uma constante $0 < \kappa^s < 1$ e uma função contínua $\kappa^u : M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $\kappa^u(p) = 1$ e $\kappa^u(x) > 1$ para todo $x \in M$ tal que $x \neq p$, e existe uma decomposição $TM = E^s \oplus E^u$ de modo que para todo $x \in M$ e $v = v^s + v^u \in T_x M$ com $v^s \in E^s$, $v^u \in E^u$:

$$\|df(x)v^s\| \leq \kappa^s \|v^s\|$$

$$\|df(x)v^u\| \geq \kappa^u \|v^u\|$$

$$\|df(p)v^u\| = \|v^u\|$$

onde $df(x)(E^s(x)) = E^s(f(x))$ e $df(x)(E^u(x)) = E^u(f(x))$ para todo $x \in M$.

(iii) f é topologicamente transitivo.

Os difeomorfismos *quase-Anosov* têm este nome pois são hiperbólicos em quase todos os pontos de seu espaço de fase, com exceção de um único ponto fixo p , onde tem uma direção contrativa e outra indiferente, como na definição acima. Um exemplo simples de um difeo quase-Anosov numa superfície e que mostraremos com mais detalhes no capítulo 6, é de uma pequena deformação do Arnold Cat map na origem do toro \mathbb{T}^2 até que tenha um auto-valor igual a um e outro estritamente menor do que um. Mais ainda, este difeomorfismo pode ser feito topologicamente conjugado a um difeomorfismo de Anosov no toro. O próximo teorema originalmente provado por Huyi Hu e Lai-Sang Young em [HY95] será tema do capítulo 6 e mostra que a existência de medidas SBR para difeomorfismos quase-Anosov não pode ser garantida, mesmo com a presença de comportamento caótico como no exemplo anterior.

Teorema 1.2.6 (Hu, Young). *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo quase-Anosov numa superfície compacta então existe uma medida $\bar{\mu}$ que é f -invariante, **infinita** satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) Para toda vizinhança aberta $U \ni p$ de p temos $\bar{\mu}(M \setminus U) < +\infty$.

(ii) $\bar{\mu}$ tem medidas condicionais absolutamente contínuas em variedades fracamente instáveis.

Por outro lado, f não admite medidas SBR. Além disso, para $x \in M$ lebesgue quase todo ponto, temos que para toda função contínua $\varphi \in C^0(M)$ vale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \varphi(p) \quad (1.10)$$

Em particular, a medida delta de Dirac no ponto p é a única medida física de f .

Por mais que seja possível obter exemplos de difeomorfismos quase-Anosov que são topologicamente muito caóticos, com existência de infinitos pontos periódicos por exemplo, do ponto de vista estatístico estes difeomorfismos são totalmente determinísticos no seguinte sentido: a trajetória de quase toda condição inicial passa assintoticamente, cem por cento do seu tempo arbitrariamente perto da origem. Além disso, ainda que esta classe de aplicações não admita medidas SBR, a medida $\bar{\mu}$ garantida no teorema 1.2.6 pode ser pensada como uma medida SBR **infinita** que, assim como o exemplo visto no último capítulo, dá peso infinito ao ponto fixo $p \in M$.

Pré-requisitos

Com exceção dos capítulos 4 e 5, que dependem um do outro, os capítulos restantes são independentes e é possível que eles sejam lidos em qualquer ordem, ficando a critério do leitor a ordem de leitura. Para acompanhar o texto, exigimos que o leitor esteja familiarizado com a teoria das variedades diferenciáveis, ao nível de [Lee13], e que tenha noções básicas de geometria Riemanniana, para o qual apenas o capítulo um presente em [Car92] será suficiente. Além disso, recomendamos ao leitor que ele esteja habituado às técnicas da teoria da medida e análise funcional, ao nível do texto presente em [RF88], bem como às ideias básicas de teoria ergódica presentes nos primeiros capítulos de [OV10].

Medidas físicas de Dirac em fluxos transitivos

Como vimos na introdução deste trabalho, existe uma grande quantidade de técnicas desenvolvidas para estudar medidas físicas, especialmente se elas são absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue da variedade ou com respeito a sua desintegração em variedades instáveis. Contudo, gostaríamos de explorar situações onde as medidas físicas do sistema são triviais, ou seja, medidas físicas cujo suporte está contido em um ponto fixo. Para evitar exemplos onde dinâmica também se comporta de forma trivial como o exemplo visto na introdução, é de grande interesse que o exemplo obtido tenha boas propriedades dinâmicas e que apresente alguma recorrência, como exigir que o sistema seja transitivo por exemplo, isto é, ter uma órbita futura que seja densa no espaço de fase.

Com este objetivo, neste capítulo, apresentamos um exemplo ¹ de um fluxo transitivo no toro \mathbb{T}^2 obtido por meio de uma pequena modificação do fluxo irracional, cuja única medida física é uma delta de Dirac com suporte em um ponto fixo. A ideia para fazer isso é criar uma singularidade do fluxo irracional a partir de uma reparametrização que, dentro de certas condições que serão exploradas mais a frente, cria uma medida física. Antes de esboçar algumas ideias sobre isso, vamos introduzir alguns conceitos e notações que serão necessários para compreender o problema mais profundamente.

2.1 O fluxo irracional

Nesta sessão, vamos sempre identificar o toro por $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e denotar a projeção canônica por:

$$\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$$

Quando não houver confusão, no decorrer do texto será frequente o uso da notação $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ para denotar um ponto qualquer do toro. Usando a projeção definida acima e sabendo que π é um homeomorfismo local, podemos munir o toro com uma estrutura diferenciável de classe C^∞ cujas cartas são dadas por $((\pi|_U)^{-1}, \pi(U))$, onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma vizinhança na qual a restrição $\pi|_U : U \longrightarrow \pi(U)$ é um homeomorfismo. Uma propriedade importante que o toro \mathbb{T}^2 apresenta é o fato de existir uma trivialização global de seu fibrado tangente. De fato, existe um par de campos de vetores definidos por:

¹Este fluxo foi bastante usado para dar contraexemplos em outros contextos em sistemas dinâmicos e sua construção pode ser atribuída a Katok (ver [Kwa07] e [Han89]). Agradeço o professor Pierre pelas referências.

$$\frac{\partial}{\partial x}(p) = d\pi(x, y)e_1 \text{ e } \frac{\partial}{\partial y}(p) = d\pi(x, y)e_2$$

Onde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto qualquer tal que $\pi(x, y) = p$, de tal modo que para todo $p \in \mathbb{T}^2$ os campos acima geram o espaço tangente $T_p M$. Em particular, existe um difeomorfismo $\Phi : T\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$ (que trivializa o fibrado tangente de \mathbb{T}^2) definido por:

$$\Phi\left(p, v\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial y}\right) = (x, y, v, w)$$

Agora, dados $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ não-nulos tais que:

$$\theta = \frac{\theta_1}{\theta_2} \notin \mathbb{Q}$$

Defina o seguinte campo de vetores em \mathbb{T}^2 :

$$X(p) = \theta_1 \frac{\partial}{\partial x}(p) + \theta_2 \frac{\partial}{\partial y}(p) \tag{2.1}$$

Definição 2.1.1. Dizemos que o fluxo X^t associado ao campo de vetores X é um **fluxo irracional com inclinação θ** .

Observe que as órbitas deste fluxo são as soluções maximais da equação diferencial:

$$\begin{cases} x' = X(x) \\ x(0) = p \end{cases} \tag{2.2}$$

Que neste caso, podem ser calculadas explicitamente e são dadas por $X^t(x, y) = (x + \theta_1 t, y + \theta_2 t)$ para todo $p = (x, y)$ e $t \in \mathbb{R}$.

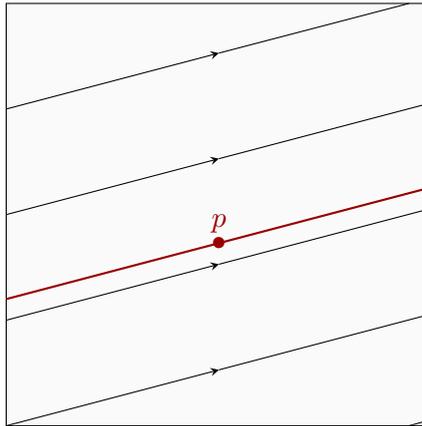


Figura 2.1: A figura acima mostra um exemplo de um fluxo irracional. Cada linha inclinada representa uma órbita típica do fluxo

Uma das características mais importantes deste fluxo, tanto do ponto de vista dinâmico quanto estatístico/ergódico é sua indivisibilidade: de fato, ele é minimal, ou seja, os únicos subconjuntos compactos invariantes de \mathbb{T}^2 são os triviais e a única medida invariante e ergódica pelo fluxo é a medida de Lebesgue do toro.

Teorema 2.1.2 (minimalidade do fluxo irracional ²). *Suponha que $K \subset \mathbb{T}^2$ seja um compacto X^t -invariante, isto é, $X^t(K) = K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então $K = \mathbb{T}^2$ ou $K = \emptyset$. Em particular, para todo ponto $p \in \mathbb{T}^2$, sua órbita $\mathcal{O}_X(p) = \{X^t(p); t \in \mathbb{R}\}$ é densa em \mathbb{T}^2 .*

Teorema 2.1.3 (Unicidade ergódica ³). *A medida de Lebesgue m do toro \mathbb{T}^2 é a única medida invariante e ergódica do fluxo irracional X^t .*

Levando em conta estas propriedades, propomos o seguinte experimento: suponha que $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ seja uma função de classe C^∞ definida no toro, positiva em todos os pontos exceto em um ponto $p \in \mathbb{T}^2$ fixado, ou seja, $\varphi(x) > 0$ para todo $x \neq p$ e $\varphi(p) = 0$. Com isto, defina o campo $Y = \varphi X$, onde X é o campo definido em 2.1 e seja Y^t o novo fluxo gerado pelo campo Y . Como as órbitas deste novo fluxo se comportam depois desta pequena modificação no campo? A resposta para esta pergunta reside no seguinte lema de equações diferenciais:

Lema 2.1.4 (Lema de Equações diferenciais). *Sejam φ e Y como acima e suponha que para alguma $x \neq p$, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{T}^2$ seja uma solução da equação diferencial 2.2. Então, existe uma reparametrização $s : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que $\gamma \circ s$ é solução da equação diferencial:*

$$\begin{cases} x' = Y(x) \\ x(0) = x \end{cases} \quad (2.3)$$

Em particular, $\mathcal{O}_X(x) = \mathcal{O}_Y(x)$ para todo $x \notin \mathcal{O}_X(p)$ e $\mathcal{O}_Y(p) = \{p\}$.

Demonstração. Suponha que $s : (-\delta, \delta) \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ seja uma reparametrização de γ tal que $\gamma \circ s$ satisfaz a equação diferencial 2.3. Então:

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma(s(t)))X(\gamma(s(t))) &= Y(\gamma(s(t))) = (\gamma \circ s)'(t) \\ &= \gamma'(s(t))s'(t) \\ &= s'(t)X(\gamma(s(t))) \end{aligned}$$

Assim, s deve ser uma reparametrização que satisfaz $\varphi(\gamma(s(t))) = s'(t)$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Em particular, observando que:

$$(s \circ s^{-1})'(t) = s'(s^{-1}(t)) \cdot (s^{-1})'(t) = 1$$

Obtemos a partir das observações acima a seguinte igualdade:

$$(s^{-1})'(t) = \frac{1}{\varphi(\gamma(t))} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

Logo, basta definir a reparametrização:

$$s^{-1}(t) = \int_0^t \frac{1}{\varphi(\gamma(s))} ds$$

□

²Uma prova deste teorema pode ser encontrada na proposição 1.5.1 em [KH97]

³A prova deste teorema pode ser adaptada a partir da demonstração da proposição 4.2.1 em [KH97]

O lema anterior diz basicamente que, multiplicando o campo original por uma função φ positiva que se anula em um ponto p , o fluxo do novo campo, com exceção da órbita de p onde é criada uma singularidade, tem as mesmas órbitas do fluxo original. Por outro lado, a velocidade das trajetórias das órbitas do novo fluxo deixa de ser constante (como era no fluxo original) e passa a depender da função φ , como mostram as figuras abaixo:

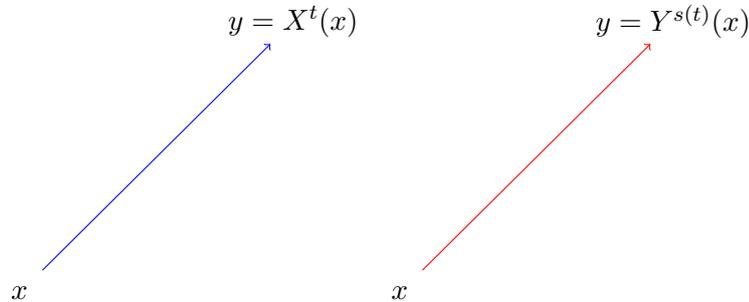


Figura 2.2: A primeira e a segunda imagem representam as órbitas de um ponto $x \neq p$ pelos fluxos X^t e Y^t respectivamente. Observe que as trajetórias são as mesmas, mas o tempo que as órbitas de x com respeito aos fluxos X^t e Y^t levam para chegar ao ponto y são possivelmente distintos

Como consequência do lema 2.3 e da discussão acima, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1.5. Ainda dentro das hipóteses do lema 2.1.4, o fluxo Y^t obtido a partir do campo $Y = \varphi X$ é transitivo. Isto é, existe um ponto $x \notin \mathcal{O}_X(p) \subseteq \mathbb{T}^2$ tal que $\mathcal{O}_Y(x)$ é um conjunto denso em \mathbb{T}^2 .

Demonstração. Dado $x \neq p$, pelo lema 2.3 temos que $\mathcal{O}_X(x) = \mathcal{O}_Y(x)$. Logo, como todas as órbitas do fluxo irracional X^t são densas, segue em particular que $\mathcal{O}_Y(x)$ também é densa, concluindo que Y^t é transitivo. \square

Gostaríamos de comentar um fato surpreendente sobre este exemplo: além deste fluxo construído ser transitivo, com uma única singularidade e sem órbitas periódicas, também é possível provar que este fluxo é **topologicamente misturador**. Uma demonstração completa deste fato se encontra no exemplo 3.1.2 em [San15] e na figura 5.1, se encontra uma ideia da prova.

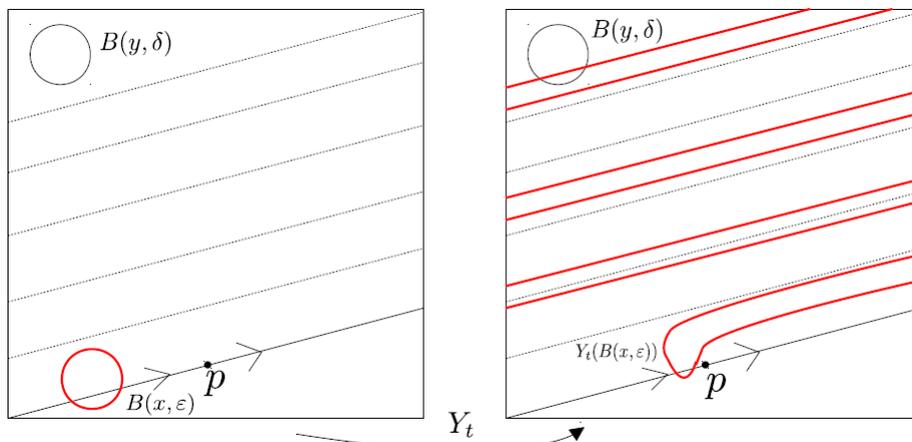


Figura 2.3: Ideia da prova de que o fluxo obtido é topologicamente misturador

Para complementar o que foi discutido, vamos mostrar no lema abaixo como é possível obter uma função $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ que satisfaz as propriedades acima.

Lema 2.1.6 (Existência de uma função no toro que possui exatamente um ponto fixo). *Para todo $p \in \mathbb{T}^2$ e $\delta > 0$ de tal modo que $\mathcal{B}(p, \delta) \subseteq \mathbb{T}^2$, existe uma função $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ de classe C^∞ , satisfazendo $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = p$ e $\varphi(x) = 1, \forall x \notin \mathcal{B}(p, \delta)$.*

Demonstração. Considere inicialmente, a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$\begin{cases} g(t) = e^{-\frac{1}{t}}; t > 0 \\ 0; t \leq 0 \end{cases}$$

Temos que g é uma função de classe C^∞ . Defina $h : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ por $h(t) = \frac{g(2-t)}{g(2-t) + g(t-1)}$. Então,

$$\begin{cases} h(t) = 1; t \leq 1 \\ 0; t \geq 2 \end{cases}$$

Além disso, $0 < h(t) < 1, \forall t \in (1, 2)$. Novamente, defina outra função $h_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ por $h_0(t) = h(2-t)$ e finalmente, tome a seguinte função no toro, definida por $\varphi(x, y) = h_0(\frac{1}{\delta^2} \cdot ((x-a)^2 + (y-b)^2))$, onde $p = (a, b)$. Então, φ é a função desejada pois φ é de classe C^∞ e fora da bola centrada em p de raio δ , φ é igual a função constante igual a 1. \square

2.2 Medidas absolutamente contínuas de um fluxo modificado

Passando agora para um contexto mais geral, suponha que $X \in \mathfrak{X}(M)$ seja um campo de vetores sem singularidades numa variedade Riemanniana M compacta e conexa, e suponha que $\varphi : M \rightarrow [0, +\infty)$ seja uma função C^∞ não-negativa. Com isto, considere um novo campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ definido por $Y = \varphi X$ e denote por X^t e Y^t os fluxos associados aos campos X e Y respectivamente. Partindo de uma análise parecida com que foi feita para o caso do fluxo irracional, conclui-se de forma análoga que a órbita por Y^t de um ponto $x \in M$ que não se anula em φ , é uma reparametrização da órbita de X^t deste mesmo ponto.

Entretanto, o que pode ser dito sobre as medidas invariantes de Y^t conhecendo as medidas invariantes de X^t ? De que forma isso depende de φ ? Para responder a estas perguntas, vamos explorar a ação de φ no espaço das medidas borelianas com sinal de M e entender como as medidas invariantes de X^t e Y^t se relacionam. Logo depois, vamos explorar o **conjunto das medidas assintóticas de um ponto $x \in M$ com respeito ao fluxo Y^t** :

$$\mathcal{M}_Y(x) = \{\mu \in \mathcal{M}^+(M); \text{ existe } t_n \rightarrow +\infty \text{ tal que } m_{Y, t_n}(x) \rightarrow \mu \text{ quando } n \rightarrow +\infty\} \quad (2.4)$$

E entender a relação existente entre a bacia estatística de atração de X e o conjunto definido abaixo:

$$\mathcal{B}_Y(Z) = \{x \in M; \text{supp}(\mu) \subset Z \text{ para toda } \mu \in \mathcal{M}_Y(x)\} \quad (2.5)$$

Onde $Z = \{x \in M; \varphi(x) = 0\}$. Primeiramente, vamos explorar a ação de φ no espaço das medidas borelianas com sinal $\mathcal{M}^+(M)$. Com este objetivo, defina o seguinte operador:

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{M}^+(M) &\longrightarrow \mathcal{M}^+(M) \\ \mu &\mapsto \varphi\mu\end{aligned}$$

Onde $\varphi\mu \in \mathcal{M}^+(M)$ é a medida definida por:

$$(\varphi\mu)(A) = \int_A \varphi d\mu \quad (2.6)$$

Para cada boreliano $A \subset M$.

Observação 2.2.1. Dada $\mu \in \mathcal{M}^+(M)$, sejam $\mu^+, \mu^- \in \mathcal{M}(M)$ medidas borelianas não-negativas tais que $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Então, segue do teorema de decomposição de Jordan que:

$$\varphi\mu = \varphi\mu^+ - \varphi\mu^-$$

De fato, pelo teorema de decomposição de Jordan, existe uma única decomposição $\varphi\mu = (\varphi\mu)^+ - (\varphi\mu)^-$, onde $(\varphi\mu)^+, (\varphi\mu)^- \in \mathcal{M}(M)$ são medidas borelianas não-negativas. Por outro lado, para todo boreliano $A \subset M$ qualquer, temos:

$$(\varphi\mu)(A) = \int_A \varphi d\mu = \int_A \varphi d\mu^+ - \int_A \varphi d\mu^- = \varphi\mu^+(A) - \varphi\mu^-(A)$$

Logo, segue por unicidade que $(\varphi\mu)^+ = \varphi\mu^+$ e $(\varphi\mu)^- = \varphi\mu^-$, como queríamos provar.

Observação 2.2.2. Sejam $\mu, \nu \in \mathcal{M}(M)$ tais que $\nu = \varphi\mu$ e $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável com respeito a σ -álgebra de Borel. Então, temos a seguinte igualdade:

$$\int g d\nu = \int g\varphi d\mu$$

Isto segue como consequência do teorema de Radon-Nikodym.

Observação 2.2.3. Suponha que $\mu \in \mathcal{M}(M)$ e $A \subset M$ seja um boreliano com μ -medida nula, isto é, $\mu(A) = 0$. Então, para toda função $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ mensurável com respeito a σ -álgebra de Borel não-negativa, temos:

$$\int_A g d\mu = 0$$

Esta é uma propriedade bastante elemental, pois sua demonstração segue diretamente da definição de integração, mas seu uso será muito útil no decorrer do texto.

Na próxima proposição, vamos estabelecer algumas propriedades gerais sobre este operador que serão úteis. Lembre-se de que se $\mu \in \mathcal{M}^+(M)$ então definimos a medida boreliana não-negativa $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$.

Proposição 2.2.4. O operador Φ definido acima satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) Φ é um operador linear e contínuo com respeito à norma da variação total $\|\cdot\|$ em $\mathcal{M}^+(M)$.
- (2) $\varphi\mu$ é uma medida absolutamente contínua com respeito à medida μ .

(3) $\mu \in \ker \Phi$ se e somente se $\text{supp}(\mu) \subset Z$.

(4) Dado $\nu \in \mathcal{M}^+(M)$ então existe $\mu \in \mathcal{M}^+(M)$ tal que $\varphi\mu = \nu$ se e somente se:

$$\int \frac{1}{\varphi} d|\nu| < +\infty$$

Demonstração. (1) Observe que dados $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}^+(M)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quaisquer, então para todo boreliano $A \subset M$ temos:

$$\Phi(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)(A) = \int_A \varphi d(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2) = \alpha \int_A \varphi d\mu_1 + \beta \int_A \varphi d\mu_2$$

Isso prova a linearidade de Φ . Para provar a continuidade, lembre-se de que a norma da variação total $\|\cdot\|$ de uma medida $\mu \in \mathcal{M}^+(M)$ é definida como:

$$\|\mu\| = \mu^+(M) + \mu^-(M)$$

Onde $\mu^+, \mu^- \in \mathcal{M}(M)$ são medidas borelianas não-negativas tais que $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Assim, usando a observação 2.2.1, obtemos:

$$\begin{aligned} \|\Phi(\mu)\| &= \|\varphi\mu\| = (\varphi\mu)^+(M) + (\varphi\mu)^-(M) \\ &= \varphi\mu^+(M) + \varphi\mu^-(M) \\ &= \int \varphi d\mu^+ + \int \varphi d\mu^- \\ &= \text{leq} \|\varphi\|_{C^0} (\mu^+ + \mu^-) \\ &= \|\varphi\|_{C^0} \|\mu\| \end{aligned}$$

Isso mostra que Φ é um operador linear e contínuo.

(2) Se $\mu = \mu^+ - \mu^- \in \mathcal{M}^+(M)$ então as medidas μ^+ e μ^- são absolutamente contínuas com respeito às medidas $\varphi\mu^+$ e $\varphi\mu^-$ respectivamente, por definição. Agora vamos checar que $\varphi\mu$ também é absolutamente contínua com respeito à medida μ . Dado $A \subset M$ um boreliano tal que $|(\varphi\mu)(A)| = 0$, usando novamente a observação 2.2.1, obtemos:

$$|(\varphi\mu)(A)| = (\varphi\mu^+)(A) + (\varphi\mu^-)(A) = 0$$

Em particular, $(\varphi\mu^+)(A) = (\varphi\mu^-)(A) = 0$ e portanto, $\mu^+(A) = \mu^-(A) = 0$, concluindo assim que $|\mu(A)| = 0$. Isso mostra que $\varphi\mu \ll \mu$.

(3) Supondo primeiramente que $\mu \in \mathcal{M}^+(M)$ seja uma medida com sinal que satisfaz $\text{supp}(\mu) \subset Z$, vamos mostrar que nessas condições temos $\mu \in \ker \Phi$. Seja $A \subset M$ um boreliano arbitrário fixado e considere os seguintes subconjuntos:

$$A_1 = A \cap \text{supp}(\mu) \text{ e } A_2 = A \cap (M \setminus \text{supp}(\mu))$$

Então, $A = A_1 \cup A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Além disso, $\varphi|_{A_1} \equiv 0$ e $|\mu|(A_2) = 0$, pois $|\nu|(M \setminus \text{supp}(\mu)) = 0$. Logo,

$$\int_A \varphi d|\mu| = \int_{A_1} \varphi d|\mu| + \int_{A_2} \varphi d|\mu| = 0$$

Concluindo então que $|(\varphi\mu)|(A) = 0$. Em particular, $\varphi\mu(A) = 0$ e assim, como A foi um boreliano arbitrário, segue que $\Phi(\mu) = \varphi\mu = 0$. Logo, $\mu \in \ker \Phi$.

Para mostrar a recíproca, suponha que $\mu \in \mathcal{M}^+(M)$ seja uma medida tal que $\text{supp}(\mu) \not\subset Z$. Então, existe $a \in \text{supp}(\mu)$ tal que $a \notin Z$, ou seja, $\varphi(a) > 0$ e $\mu(U) > 0$ para toda vizinhança $U \subset M$ de a . Pela continuidade de φ , existe uma vizinhança aberta V de a de modo que $\varphi(x) \geq c > 0$, para todo $x \in V$, onde $c > 0$ é alguma constante positiva. Como $a \in \text{supp}(\mu)$, por hipótese, então $|\mu|(V) > 0$ e portanto:

$$|\varphi\mu|(V) = \int_V \varphi d|\mu| = \int_M \varphi \cdot \chi_V d|\mu| \geq \int_M c \cdot \chi_V d|\mu| = c \cdot |\mu|(V) > 0$$

Logo, $|\varphi\mu|(V) > 0$ para algum aberto $V \subset M$ e isso mostra que $\mu \notin \ker \Phi$, o que conclui a demonstração deste item.

(4) Supondo que $\nu = \varphi\mu$ para alguma $\mu \in \mathcal{M}^+(M)$, vamos mostrar que:

$$\int \frac{1}{\varphi} d|\nu| < +\infty$$

Primeiro, pela observação 2.2.3, temos que $|\nu|(Z) = 0$ pois $\nu = \varphi\mu$. Assim, como $\frac{1}{\varphi}$ é uma função mensurável não-negativa, temos pela observação 2.2.3 que:

$$\int_Z \frac{1}{\varphi} d|\nu| = 0$$

Além disso, observando que φ é positiva em $M \setminus Z$ então pela observação 2.2.2:

$$\int_{M \setminus Z} \frac{1}{\varphi} d|\nu| = \int_{M \setminus Z} \frac{1}{\varphi} \varphi d|\mu| = |\mu|(M \setminus Z) < +\infty$$

Logo, escrevendo $M = Z \cup (M \setminus Z)$ concluímos então que:

$$\int \frac{1}{\varphi} d|\nu| = \int_{M \setminus Z} \frac{1}{\varphi} d|\nu| + \int_Z \frac{1}{\varphi} d|\nu| = |\mu|(M \setminus Z) < +\infty$$

Reciprocamente, supondo que $\frac{1}{\varphi}$ seja uma função integrável com respeito à medida $|\nu|$, defina a medida $\mu = \frac{1}{\varphi}\nu$. Então, esta é uma medida com sinal boreliana que satisfaz $\varphi\mu = \nu$. Para ver que isso é verdade, observe que $\nu(Z) = 0$ pois $\frac{1}{\varphi}$ é ν -integrável. Além disso, novamente pela observação 2.2.2 se $A \subset M$ é um boreliano qualquer, então:

$$\int_{A \setminus Z} \varphi d\mu = \nu(A \setminus Z)$$

Portanto, obtemos:

$$\int_A \varphi d\mu = \int_{A \cap Z} \varphi d\mu + \int_{A \setminus Z} \varphi d\mu = \nu(A \setminus Z)$$

Como $A \subset M$ foi um boreliano arbitrário, segue que $\nu = \varphi\mu$ onde $\mu \in \mathcal{M}^+(M)$ como queríamos mostrar. □

Observe que os itens (3) e (4) da proposição anterior fornecem uma caracterização da imagem e do núcleo do operador linear Φ . Em outras palavras, a imagem e o núcleo deste operador podem ser descritos como:

$$\ker \Phi = \{\mu \in \mathcal{M}^+(M); \text{supp } \mu \subset Z\}$$

$$\text{Im } \Phi = \{\nu \in \mathcal{M}^+(M); \varphi^{-1} \in L^1(M, |\nu|)\}$$

Outra propriedade importante deste operador é que ele possui uma inversa à direita definida na imagem de Φ por:

$$\Psi : \text{Im}(\Phi) \longrightarrow \mathcal{M}(M)$$

$$\nu \mapsto \varphi^{-1}\nu$$

Este operador leva medidas de $\text{Im}(\Psi)$ em medidas borelianas de M que não "enxergam" o conjunto Z . Em outras palavras, se $\mu = \Psi(\nu)$ para algum $\nu \in \text{Im}(\Phi)$ então $\mu|_Z \equiv 0$. Sendo X^t e Y^t os fluxos induzidos pelos campos de vetores X e Y como no início desta sessão, vamos denotar por \mathcal{M}_X e \mathcal{M}_Y , os conjuntos de todas as medidas borelianas finitas de M que são invariantes por X^t e Y^t , respectivamente.

Observação 2.2.5. *Se X^t é um fluxo em M e $\mu \in \mathcal{M}(M)$ uma medida boreliana, então μ é uma medida X -invariante se e somente se para toda função contínua $g \in C^0(M)$ e $t \in \mathbb{R}$ temos:*

$$\int g \circ X^t d\mu = \int g d\mu$$

A prova deste resultado é análoga à prova do do lema 2.2.1 em [OV10] e sua prova pode ser adaptada sem maiores dificuldades.

A próxima proposição garante que o operador Φ leva medidas invariantes de Y^t em medidas invariantes de X^t .

Proposição 2.2.6. *Se $\mu \in \mathcal{M}(M)$ é uma medida Y -invariante tal que $\mu \notin \ker \Phi$ então $\Phi(\mu)$ é uma medida X -invariante. Analogamente, se $\nu \in \text{Im}(\Phi)$ é X -invariante tal que $\nu \notin \ker \Psi$ então $\Psi(\nu)$ é Y -invariante.*

Demonstração. Suponha que $\mu \in \mathcal{M}(M)$ seja uma medida invariante pelo fluxo Y^t . Então, pela observação 2.2.5 para mostrar que $\Phi(\mu)$ é invariante pelo fluxo X^t é necessário e suficiente que para toda função contínua $g \in C^0(M)$ e $t \in \mathbb{R}$:

$$\int g \circ X^t d(\Phi\mu) = \int g d(\Phi\mu)$$

Vamos mostrar primeiramente que a igualdade acima é válida para funções de classe C^1 . Seja $g \in C^1(M)$. Por hipótese, como μ é Y -invariante então novamente a observação 2.2.5 garante que:

$$\int g \circ Y^t d\mu = \int g d\mu$$

Logo, para todo $t \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$\int g \circ Y^t d\mu - \int g d\mu = \int (g \circ Y^t - g) d\mu = 0$$

Em particular, para todo $t \neq 0$:

$$\frac{1}{t} \int (g \circ Y^t - g) d\mu = 0$$

Assim, tomando uma sequência $t_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ e usando o fato de que a derivada de g é limitada em M então o teorema da convergência dominada garante que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int (g \circ Y^t - g) d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int (g \circ Y^{t_k} - g) d\mu = \int \left. \frac{d}{dt} (g \circ Y^t) \right|_{t=0} d\mu = 0$$

Denote por $X(g)(x) := \left. \frac{d}{dt} (g \circ X^t) \right|_{t=0} = dg(x)X(x)$ para cada $x \in M$ (ou seja, $X(g)$ é a derivada de g na direção do fluxo). Das observações anteriores concluímos que:

$$\int X(g) d(\Phi\mu) = \int \varphi \cdot X(g) d\mu = \int Y(g) d\mu = \int \left. \frac{d}{dt} (g \circ Y^t) \right|_{t=0} d\mu = 0$$

Portanto, mostramos que

$$\int X(g) d(\Phi\mu) = 0 \tag{2.7}$$

Para toda função $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Agora, defina a seguinte função:

$$I(t) = \int g \circ X^t d(\Phi\mu)$$

Afirmção 2.2.7. Temos que para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$I'(t) = \int X(g \circ X^t) d\mu = 0$$

Demonstração. Basta observar que para todo $t \in \mathbb{R}$ e $h \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{I(t+h) - I(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int (g \circ X^{t+h} - g \circ X^t) d(\Phi\mu) \\ &= \frac{1}{h} \int (g \circ X^t) \circ X^h - (g \circ X^t) d(\Phi\mu) \end{aligned}$$

Logo, fazendo $h \rightarrow 0$ e usando o teorema da convergência dominada, obtemos:

$$I'(t) = \int \left. \frac{d}{dh} (g \circ X^{t+h}) \right|_{h=0} d(\Phi\mu)$$

Como X^t é um difeomorfismo para cada $t \in \mathbb{R}$, então $g \circ X^t$ também é de classe C^1 e portanto por 2.7, concluímos que para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$I'(t) = \int X(g \circ X^t) d(\Phi\mu) = 0$$

Isso mostra a afirmação. □

Disso, concluímos que I é uma função constante e em particular, para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\int g \circ X^t d(\Phi\mu) = \int g \circ X^0 d(\Phi\mu) = \int g d(\Phi\mu)$$

Como $g \in C^1(M)$ foi tomada arbitrária, então a igualdade acima é válida para toda função de classe $C^1(M)$. Entretanto, como $C^1(M)$ é um subespaço denso de $C^0(M)$, segue que a igualdade também é válida para toda função $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $t \in \mathbb{R}$. Assim, concluímos que $\Phi(\mu)$ é X -invariante. A demonstração da recíproca é análoga. □

Proposição 2.2.8. *O operador Φ leva medidas ergódicas de Y^t , que não estão em seu núcleo, em medidas ergódicas de X^t . Ou seja, Se μ é Y -invariante, ergódica e $\mu \notin \ker \Phi$ então $\Phi(\mu)$ é X -invariante e ergódica. Analogamente, Ψ também leva medidas ergódicas de X^t , que não estão em seu núcleo, em medidas ergódicas de Y^t .*

Demonstração. Supondo que μ seja uma medida Y -invariante e ergódica com $\mu \notin \ker \Phi$, vamos mostrar que $\Phi(\mu)$ é ergódica com respeito a ao fluxo X^t . Para isso, vamos mostrar que toda função mensurável que é invariante por X^t $\Phi(\mu)$ -q.t.p. é constante $\Phi(\mu)$ -q.t.p. Por simplicidade, vamos denotar por $\nu = \Phi(\mu)$. Dada $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e X -invariante ν -q.t.p. considere os seguintes conjuntos:

$$Y_\alpha = \{x \in M; \alpha(Y^t(x)) = \alpha(x) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

$$X_\alpha = \{x \in M; \alpha(X^t(x)) = \alpha(x) \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

Suponha que $x \notin Z$. Então, como o fluxo Y^t é obtido por multiplicação ponto a ponto por φ e X segue pelo lema de equações diferenciais 2.1.4 que existe uma reparametrização $s(t)$ tal que $X^{s(t)}(x) = Y^t(x)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, se $x \in X \setminus Z$ então:

$$\alpha(Y^t(x)) = \alpha(X^{s(t)}(x)) = \alpha(x)$$

Portanto, $X_\alpha \setminus Z \subset Y_\alpha$. Por hipótese, como $\nu(Z) = 0$ então $\nu(X_\alpha \setminus Z) = 1$ e assim, temos que $X_\alpha \setminus Z$ tem medida μ positiva pois ν é absolutamente contínua com respeito a μ . Em particular, $\mu(Y_\alpha) > 0$ e logo, como Y_α é um conjunto Y -invariante segue da ergodicidade de μ que $\mu(Y_\alpha) = 1$, ou seja, α é uma função Y -invariante μ -q.t.p. Usando mais uma vez a ergodicidade de μ obtemos que α é constante μ -q.t.p. e portanto, segue do fato de que ν é absolutamente contínua com respeito a μ que α também é constante ν -q.t.p. como queríamos provar. Isso mostra que $\Phi(\mu)$ é ergódica. □

2.3 Medidas assintóticas de uma reparametrização

Na última sessão introduzimos o operador Φ para estudar as relações existentes entre as medidas invariantes de um fluxo reparametrizado e as medidas invariantes de seu fluxo original. Nesta sessão, estamos interessados em estudar mais profundamente estas relações e descrever o efeito no comportamento assintótico das medidas após uma reparametrização do fluxo. Mais explicitamente, propomos a seguinte pergunta: o que é possível dizer sobre o comportamento assintótico de suas medidas invariantes após uma reparametrização deste fluxo, conhecendo o comportamento assintótico das medidas invariantes do fluxo original? De que forma podemos descrever estas novas medidas?

Para responder estas perguntas, vamos introduzir antes alguns conceitos fundamentais para discutir os problemas acima. Lembre-se de que se $x \in M$ e $t > 0$, então definíamos a média temporal no tempo $t > 0$ em $x \in M$ como a medida boreliana $m_{X,t}(x) \in M(M)$ que satisfaz para toda $\alpha \in C^0(M)$:

$$\int \alpha dm_{X,t}(x) = \frac{1}{t} \int_0^t \alpha(X^s(x)) ds$$

Onde X^t é o fluxo do campo de vetores X .

Definição 2.3.1. Dizemos que $\mu \in \mathcal{M}(M)$ é uma **medida assintótica no ponto** $x \in M$ **com respeito ao fluxo** X se existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $m_{X,t_n}(x) \rightarrow \mu$ quando $n \rightarrow +\infty$, onde o limite é com respeito à topologia fraca-*. Denotamos o conjunto destas medidas por $\mathcal{M}_X(x)$.

Exemplo 2.3.2 (Bacia estatística de atração). Lembre-se de que a bacia estatística de atração de uma medida X -invariante μ é definida por:

$$\mathcal{B}_X(x) = \{x \in M; m_{X,t}(x) \rightarrow \mu \text{ quando } t \rightarrow +\infty\}$$

Logo, por definição, $x \in M$ é um ponto que pertence à bacia estatística de atração de uma medida invariante μ se e somente se $\mathcal{M}_X(x) = \{\mu\}$ pois $m_{X,t}(x) \rightarrow \mu$ quando $t \rightarrow +\infty$. Isso mostra que a bacia estatística de atração de μ é o conjunto dos pontos que tem μ como única medida assintótica, ou seja:

$$\mathcal{B}_X(x) = \{x \in M; \mathcal{M}_X(x) = \{\mu\}\}$$

Voltando a situação em que nos encontramos neste capítulo, vamos reformular a pergunta proposta no primeiro parágrafo: conhecendo as medidas assintóticas de um ponto $x \in M$ com respeito ao fluxo X^t , o que podemos dizer sobre as medidas assintóticas deste mesmo ponto com respeito ao fluxo Y^t ? Um exemplo de uma situação onde conhecemos as medidas assintóticas de um ponto $x \in M$ é quando ele pertence a bacia estatística de atração, como no exemplo anterior. Procurando responder esta pergunta parcialmente, defina o seguinte conjunto:

$$\mathcal{B}_Y(Z) := \{x \in M; \text{supp}(\mu) \subset Z; \text{ para toda } \mu \in \mathcal{M}_Y(x)\} \quad (2.8)$$

Como foi provado no item (3) em 2.2.4, temos que $\text{supp}(\mu) \subset Z$ se e somente se $\mu \in \ker \Phi$. Logo, este conjunto também pode ser caracterizado como $\mathcal{B}_Y(Z) = \{x \in M; \mathcal{M}_Y(x) \subset \ker \Phi\}$. O próximo teorema a ser provado nesta sessão responde a pergunta proposta de forma parcial:

Teorema 2.3.3 (Saghin, Sun, Vargas). *Se $\mu \in M(M)$ é uma medida X -invariante e φ satisfaz:*

$$\int \frac{1}{\varphi} d\mu = +\infty$$

Então, $\mathcal{B}_X(\mu) \subset \mathcal{B}_Y(Z)$. Ou seja, o operador Φ anula toda medida assintótica com respeito ao fluxo Y^t de todo ponto $x \in M$ que pertence à bacia estatística de atração de μ .

A prova⁴ deste teorema usa as propriedades que estudamos até agora para o operador Φ e é baseada nos seguintes passos: Primeiro, vamos mostrar que fixado $x \in M$ onde φ não se anula, então para todo $t > 0$ existe uma constante $C(x, t) > 0$ que depende de x e de t que satisfaz:

$$\Phi(m_{Y,t}(x)) = C(x, t)m_{X,s(t)}(x)$$

Ou seja, Φ leva médias temporais de x no tempo t com respeito ao fluxo Y^t em médias temporais de x no tempo t com respeito ao fluxo X^t a menos de uma constante que depende de x e t . O segundo e último passo consiste em mostrar que para todo ponto na bacia estatística de atração de μ , esta constante converge para zero quando $t \rightarrow +\infty$. É importante salientar que a hipótese de que a função φ^{-1} não é integrável com respeito a medida μ é crucial para que isto seja verdade. Caso contrário, conseguimos apenas que ela seja limitada por uma constante que depende de x .

O seguinte lema garante o primeiro passo da prova. Lembre-se de que se $x \in M$ e $x \notin Z$ então pelo lema de equações diferenciais 2.1.4, existe uma reparametrização $s : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $Y^t(x) = X^{s(t)}(x)$ para todo $t \in (0, +\infty)$.

Lema 2.3.4. *Fixado $x \in M \setminus Z$, seja s uma reparametrização como acima. Então,*

$$\Phi(m_{Y,t}(x)) = \frac{s(t)}{t} m_{X,s(t)}(x)$$

Para todo $t \in (0, +\infty)$.

Demonstração. Observe que por definição do fluxo de Y^t temos:

$$\frac{d}{dt} Y^t(x) = Y(Y^t(x)) = \varphi(Y^t(x))X(Y^t(x))$$

Além disso, por definição do fluxo de X^t e usando a regra da cadeia (ver lema 2.1.4):

$$\frac{d}{dt} X^{s(t)}(x) = s'(t)X(X^{s(t)}(x)) = s'(t)X(Y^t(x))$$

Logo, como estamos supondo que $Y^t(x) = X^{s(t)}(x)$ para todo $t > 0$, usando as igualdades anteriores concluímos que:

$$\varphi(Y^t(x))X(Y^t(x)) = \frac{d}{dt} Y^t(x) = \frac{d}{dt} X^{s(t)}(x) = s'(t)X(Y^t(x))$$

Em particular, $\varphi(Y^t(x)) = s'(t)$ para todo $t > 0$. Com estas observações, vamos mostrar que as medidas $\Phi(m_{Y,t}(x))$ e $\frac{s(t)}{t} m_{X,s(t)}(x)$ são iguais, para todo $t > 0$. Para que isto seja verdade, é suficiente mostrar que para toda função contínua $g \in C^0(M)$ vale a seguinte igualdade:

⁴Este teorema originalmente aparece na proposição 1 em [SSV10].

$$\int g\Phi(m_{Y,t}(x)) = \frac{s(t)}{t} \int gm_{X,s(t)}(x) \quad (2.9)$$

De fato, fixe $g \in C^0(M)$ uma função contínua qualquer. Usando a observação 2.2.2 e a definição de $m_{Y,t}(x)$ temos:

$$\int gd\Phi(m_{Y,t}(x)) = \int g\varphi dm_{Y,t}(x) = \frac{1}{t} \int_0^t g(Y^u(x))\varphi(Y^u(x))du$$

Usando a mudança de variáveis $v = s(u)$ obtemos $Y^u(x) = X^v(x)$ e:

$$dv = ds(u)du = \varphi(Y^u(x))du$$

Logo, fazendo a mudança de variáveis na expressão obtida acima para a integral de g concluímos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \int_0^t g(Y^u(x))\varphi(Y^u(x))du &= \frac{1}{t} \int_0^{s(t)} g(X^v(x))dv \\ &= \frac{s(t)}{t} \frac{1}{s(t)} \int_0^{s(t)} g(X^v(x))dv \\ &= \frac{s(t)}{t} \int gm_{X,s(t)}(x) \end{aligned}$$

Isso mostra que 2.9 é válido para toda função contínua em M , o que termina a prova do lema. \square

Corolário 2.3.5. *Se $\mu \in \mathcal{M}_Y(x)$, então existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que:*

$$\Phi(\mu) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s(t_n)}{t_n} m_{X,s(t_n)}(x)$$

Onde o limite acima é com respeito à topologia fraca-* em $\mathcal{M}(M)$.

Demonstração. A prova é consequência imediata do lema anterior e da continuidade do operador Φ com respeito à topologia fraca-*. De fato, como $\mu \in \mathcal{M}_Y(x)$ por hipótese então existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $m_{Y,t_n} \rightarrow \mu$ quando $n \rightarrow +\infty$ na topologia fraca-*. Assim, pela continuidade de Φ com respeito a esta topologia e pelo lema anterior:

$$\Phi(\mu) = \Phi\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} m_{Y,t_n}(x)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi(m_{Y,t_n}(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s(t_n)}{t_n} m_{X,s(t_n)}(x)$$

O que conclui a demonstração do corolário. \square

Uma observação muito importante a ser feita é que a constante $C(x,t) = \frac{s(t)}{t}$ que aparece na prova do lema 2.3.4 é limitada por uma constante $C(x)$ que depende apenas de x . Em particular, a constante $C(x,t)$ não explode quando t vai para infinito. De fato, observe que $s(t)$ tem derivada limitada pois $|s'(t)| = |\varphi(Y^t(x))|$ para todo $t > 0$ e φ é uma função contínua em uma variedade compacta. Logo, Se $C > 0$ é uma cota superior para φ em M , ou seja, $|\varphi(x)| \leq C$ para todo $x \in M$ então s é Lipschitz com constante de Lipschitz menor ou igual a C , isto é:

$$|s(t+h) - s(t)| \leq C|h| \text{ para todo } t > 0, h \geq 0$$

Como estamos supondo que $s(0) = 0$, pois s é uma reparametrização então para todo $t \geq 0$:

$$\left| \frac{s(t)}{t} \right| = \frac{|s(t) - s(0)|}{|t|} \leq C$$

Em particular, se o limite $C(x, t)$ existe quando $t \rightarrow +\infty$ então ele deve ser finito. Com todas essas observações já podemos provar o teorema enunciado no início desta sessão.

Prova do teorema 2.3.3. Nas hipóteses do teorema estamos supondo que μ é uma medida X -invariante e $\frac{1}{\varphi}$ é uma função que não é integrável com respeito a μ . Suponha primeiramente que $x \in \mathcal{B}_X(\mu)$ é um ponto da bacia estatística de atração de μ tal que $x \notin Z$ (ou seja, $\varphi(x) = 0$). Nestas condições, vamos mostrar que a função $\frac{s(t)}{t}$ converge para 0 sempre que $t \rightarrow +\infty$. Suponha que isto não seja verdade. Então, existe uma sequência de tempos $t_i \rightarrow +\infty$ e um número real $c \in (0, C]$ de modo que:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{s(t_i)}{t_i} = c$$

Agora, considere a sequência de medidas de probabilidade $m_{Y, t_i}(x)$, onde $i \geq 1$. Pelo teorema de Banach-Alaoglu, como $\mathcal{M}(M)$ é um espaço compacto com a topologia fraca-*, passando a uma subsequência se necessário podemos supor que $m_{Y, t_i}(x) \rightarrow \nu \in \mathcal{M}(M)$ quando $i \rightarrow +\infty$ na topologia fraca-*. Assim, como x é um ponto da bacia estatística de atração de μ com respeito ao fluxo X^t , pelo corolário 2.3.5 temos:

$$\Phi(\nu) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \Phi(m_{Y, t_i}(x)) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{s(t_i)}{t_i} m_{X, s(t_i)}(x) = c\mu$$

Isso mostra que $\mu = \Phi(c^{-1}\nu)$ e logo, como consequência do item (4) da proposição 2.2.4, segue que φ^{-1} é integrável com respeito a medida μ o que contradiz a hipótese inicial. Portanto, temos que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{s(t)}{t} = 0$$

Para concluir que $x \in \mathcal{B}_Y(Z)$, tome $\nu \in \mathcal{M}_Y(x)$ uma medida assintótica de Y^t em x e seja $t_n \rightarrow +\infty$ tal que $m_{Y, t_n}(x) \rightarrow \nu$. Então novamente aplicando o corolário 2.3.5 e o resultado acima, obtemos:

$$\Phi(\nu) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s(t_n)}{t_n} m_{X, s(t_n)}(x) = 0$$

Portanto, como ν foi arbitrário segue que $\Phi(\nu) = 0$ para todo $\nu \in \mathcal{M}_Y(x)$, mostrando finalmente que $x \in \mathcal{B}_Y(Z)$, como queríamos provar. □

Como consequência do teorema anterior, obtemos o próximo corolário que se constitui como uma ferramenta para obter medidas físicas degeneradas (isto é, com suporte em um ponto) a partir de fluxos cujas medidas físicas já são conhecidas.

Corolário 2.3.6. *Ainda dentro das hipóteses do teorema 2.3.3, se $Z = \{p\}$, então $\mathcal{B}_X(\mu) \subset \mathcal{B}_Y(\delta_p)$. Ou seja, a bacia de atração de μ com respeito ao fluxo X^t está contida na bacia de atração da medida delta de Dirac no ponto p com respeito ao fluxo Y^t . Em particular, δ_p é uma medida física para o fluxo Y^t desde que μ seja uma medida física para o fluxo X^t .*

Demonstração. A ideia para provar este corolário é mostrar que o conjunto $\mathcal{B}_Y(Z)$ coincide com a bacia estatística de atração da delta de Dirac em p , ou seja, $\mathcal{B}_Y(Z) = \mathcal{B}_Y(\delta_p)$. Para provar isto, vamos provar a seguinte afirmação:

Afirmção 2.3.7. *Se $\nu \in \mathcal{M}(M)$ é uma medida de probabilidade então $\text{supp}(\nu) = \{p\}$ se e somente se $\nu = \delta_p$.*

Demonstração. Supondo que ν seja uma medida suportada em p , para mostrar que $\nu = \delta_p$ devemos garantir que $\nu(B) = 0$ para todo boreliano $B \subset M$ que não contém p . Com este propósito, seja B um boreliano de M tal que $p \notin B$. Como M é um espaço métrico compacto, então para cada $x \in B$, existe uma vizinhança U_x de x tal que $p \notin U_x$ e $\nu(U_x) = 0$. Logo, $\mathcal{O} = \{U_x\}_{x \in B}$ é uma cobertura por abertos de B tais que $p \notin U_x$ e $\nu(U_x) = 0$, para todo $x \in B$. Pela compacidade de M , existe uma subcoleção enumerável \mathcal{O}' de \mathcal{O} , ainda satisfazendo as propriedades acima e que cobre B . Assim,

$$\nu(B) \leq \nu\left(\bigcup_{U \in \mathcal{O}'} U\right) \leq \sum_{U \in \mathcal{O}'} \nu(U) = 0$$

Logo, $\nu(B) = 0$. Por outro lado, se $p \in B$, então $B = (B \setminus \{p\}) \cup \{p\}$ e logo, como ν é uma medida de probabilidade, segue que $\nu(B) = \nu(\{p\}) = 1$. Portanto, $\nu = \delta_p$ como queríamos mostrar. A recíproca segue da definição de δ_p . \square

Para provar a afirmação feita no primeiro parágrafo, observe que da prova da afirmação anterior concluímos que $\nu = \delta_p$ para toda medida assintótica $\nu \in \mathcal{M}_Y(x)$ de x suportada em p . Em particular, $\mathcal{B}_Y(Z) \subset \mathcal{B}_Y(\delta_p)$. Como a inclusão contrária segue por definição da bacia estatística de atração de δ_p com respeito a Y^t , então a igualdade está provada. Portanto, usando o teorema anterior temos $\mathcal{B}_X(\mu) \subset \mathcal{B}_Y(Z) = \mathcal{B}_Y(\delta_p)$, o que prova o corolário. \square

2.4 O fluxo irracional modificado

Uma das consequências mais importantes dos resultados obtidos na última sessão é a introdução de uma técnica para construir novas medidas físicas degeneradas a partir de um fluxo que possui alguma medida física conhecida. Vamos explicar como esta técnica funciona com mais detalhes: suponha que X^t seja um fluxo numa variedade compacta, dado por um campo de vetores X , para o qual sabemos que μ é uma medida física. Queremos tomar uma reparametrização deste fluxo de modo que o novo fluxo Y^t obtido tenha uma singularidade em um ponto $p \in M$ e a delta de Dirac com suporte nesta singularidade seja uma medida física. De acordo com o corolário 2.3.6 da última sessão, para isso é suficiente considerar o fluxo Y^t do campo Y obtido multiplicando-se por uma função φ não-negativa que se anula em um único ponto p e que satisfaz:

$$\int \frac{1}{\varphi} d\mu = +\infty$$

Escolhendo esta nova parametrização de uma forma conveniente, podemos obter o novo fluxo de modo que algumas das propriedades dinâmicas e de recorrência do fluxo original sejam mantidas, como a transitividade por exemplo. Nesta sessão, vamos aplicar esta técnica no fluxo irracional do toro para obter um exemplo explícito de um fluxo transitivo e unicamente ergódico, com uma única medida física

com suporte em uma singularidade. Antes de construir este exemplo precisamos estabelecer algumas propriedades básicas dos fluxos unicamente ergódicos.

Lema 2.4.1 (Unicidade ergódica para fluxos). *Seja M uma variedade compacta, X^t um fluxo completo e $\mu \in \mathcal{M}(M)$ uma medida X -invariante. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) μ é a única medida ergódica de X^t .

(ii) μ é a única medida invariante de X^t .

(iii) $\mathcal{B}_X(\mu) = M$

Demonstração. A afirmação de que (i) é equivalente a (ii) é um resultado conhecido e pode ser encontrado em [OV10].

Para mostrar que (iii) implica (ii), suponha que existam duas medidas ergódicas μ e ν para X^t que sejam distintas. Então, existe uma função contínua $g \in C^0(M)$ tal que:

$$\int g d\mu \neq \int g d\nu$$

Pelo teorema ergódico de Birkhoff para fluxos, existe um boreliano $X \subset M$ com $\nu(X) = 1$ de tal forma que para todo $x \in X$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t g(X^s(x)) ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int g dm_{X,t}(x) = \int g d\nu$$

Em particular, nenhum ponto $x \in X$ pode pertencer a bacia estatística de atração de μ , por definição. Logo, $\mathcal{B}_X(\mu) \neq M$.

Agora, supondo que μ seja a única medida ergódica de X^t , suponha exista um ponto $x \in M$ tal que $x \notin \mathcal{B}_X(\mu)$. Então, existe $\varepsilon > 0$, uma função contínua $g \in C^0(M)$ e uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ tal que:

$$\left| \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} g(X^s(x)) ds - \int g d\mu \right| \geq \varepsilon$$

Tendo isto, considere a sequência de medidas $m_{X,t_n}(x)$. Pelo teorema de Banach-Alaoglu, podemos passar a uma subsequência se necessário e supor esta sequência converge na topologia fraca-* para uma medida $\nu \in \mathcal{M}(M)$ que é X -invariante. Além disso, temos:

$$\begin{aligned} \left| \int g d\nu - \int g d\mu \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int g dm_{X,t_n}(x) - \int g d\mu \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} g(X^s(x)) ds - \int g d\mu \right| \\ &\geq \varepsilon \end{aligned}$$

Em particular, $\mu \neq \nu$ o que contradiz a hipótese de que μ é a única medida invariante. □

Corolário 2.4.2. *Se X^t é o fluxo irracional em \mathbb{T}^2 então $\mathcal{B}_X(m) = \mathbb{T}^2$. Em particular, a medida de Lebesgue é uma medida física para o fluxo irracional.*

Demonstração. Segue como consequência da unicidade ergódica do fluxo irracional (ver 2.1.3). □

Se X^t denota o fluxo irracional, seja $p \in \mathbb{T}^2$ e $f : M \rightarrow [0, +\infty)$ de classe C^∞ da ordem de $\varphi \sim \|x\|^2$ definida numa vizinhança de p , satisfazendo as propriedades do lema 2.1.6. Considere o campo $Y = \varphi \cdot X$ e o fluxo Y^t obtido a partir do novo campo Y . Então, em relação à medida de Lebesgue, temos:

$$\int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{\varphi} dm = +\infty$$

Logo, aplicando o teorema e o corolário, temos que:

$$\mathbb{T}^2 = \mathcal{B}_X(m) \subseteq \mathcal{B}_Y(\delta_p)$$

Portanto, pelo resultado acima, $\mathcal{P}_Y(\mathbb{T}^2) = \{\delta_p\}$. Ou seja, δ_p é a única medida de probabilidade borielana Y -invariante que é ergódica com respeito a Y^t . Em particular, δ_p é uma medida física.

Existência de Medidas Físicas para Aplicações Expansoras

3.1 Introdução

No último capítulo, estudamos o exemplo de um fluxo transitivo no toro cuja única medida invariante e ergódica com respeito ao fluxo é a delta de Dirac com suporte em um ponto fixo. Ainda que seu comportamento dinâmico topológico fosse caótico, sendo topologicamente misturador por exemplo, seu comportamento estatístico é trivial no sentido de que a trajetória de todo ponto passa cem por cento do seu tempo perto do ponto fixo. Para contrastar este exemplo dado no capítulo anterior, vamos estudar uma classe de aplicações muito interessantes do ponto de vista dinâmico, as chamadas *aplicações expansoras*. Estas são aplicações que se caracterizam pelo fato de que a derivada em todo ponto expande os vetores do espaço tangente, isto é, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que:

$$\|df(x)v\| \geq \lambda\|v\|$$

Para todo $x \in M$ e $v \in T_xM$. Esta classe de aplicações apresenta um comportamento muito rico tanto do ponto de vista topológico quanto ergódico. De fato, além de serem topologicamente misturadoras e ter infinitos pontos periódicos, por exemplo, elas também são caracterizadas pela existência de uma medida física absolutamente contínua, que reflete o comportamento caótico destas aplicações. Mais especificamente, o objetivo deste capítulo é provar o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação expansora de classe C^1 tal que $|\det df|$ seja ν_0 -Hölder para algum $\nu_0 \in (0, 1]$. Então, existe uma medida μ_0 que é f -invariante e absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue.*

Na prova deste teorema, serão exploradas as propriedades analíticas de um operador bem especial, associado a uma aplicação expansora, chamado de *Operador de Perron-Frobënus* (ou *Operador de transferência*). Estes são operadores definidos no espaço das funções contínuas como:

$$(\mathcal{L}\varphi)(y) = \sum_{f(x)=y} \frac{\varphi(x)}{|\det df(x)|}$$

Onde $\varphi \in C^0(M)$ e $y \in M$. A característica mais marcante deste operador e que o torna útil para o estudo das propriedades ergódicas de um sistema, é que pontos fixos deste operador estão associados

à densidades de medidas invariantes e absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue da variedade. Isto segue como consequência da seguinte propriedade dual:

$$\int (\mathcal{L} \varphi) \psi dm = \int \varphi(\psi \circ f) dm$$

Para todo par de funções contínuas $\varphi, \psi \in C^0(M)$. A ideia para provar este teorema é mostrar que este operador possui um ponto fixo e para isso, vamos restringi-lo ao cone de funções Hölder do espaço das funções contínuas de M e garantir que sob uma métrica adequada, este operador é uma contração neste cone ¹. Além disso, vamos garantir que esta densidade obtida como ponto fixo do operador é positiva lebesgue quase todo ponto.

3.2 Propriedades topológicas das aplicações expansoras

As aplicações expansoras são interessantes por suas ricas propriedades dinâmicas e topológicas. Vamos sempre supor a partir de agora que M é uma variedade Riemanniana compacta e conexa.

Definição 3.2.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação de classe C^1 . Dizemos que f é expansora se existem constantes $C > 0$ e $\sigma > 1$ tais que para todo $x \in M, v \in T_x M$:*

$$\|df^n(x)v\| \geq C\sigma^n \|v\| \quad (3.1)$$

Para alguma métrica Riemanniana g em M , Onde $\|\cdot\| : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ é a norma induzida pela métrica no espaço tangente $T_x M$.

Observação 3.2.2. *Se uma aplicação é expansora para alguma métrica Riemanniana g de M , então ela será expansora para qualquer outra métrica h . Isso segue do fato de que quaisquer duas métricas Riemannianas são equivalentes quando M é uma variedade compacta.*

O próximo lema garante que tomando uma métrica Riemanniana conveniente, podemos supor que $C = 1$ na definição 3.1.

Lema 3.2.3. *Suponha que $f : M \rightarrow M$ seja uma aplicação expansora com respeito a uma métrica Riemanniana g . Então, existe uma constante $\lambda > 1$ e uma métrica Riemanniana h tal que para todo $x \in M$ e $v \in T_x M$:*

$$|df(x)v| \geq \lambda |v|$$

onde $|\cdot| : M \rightarrow \mathbb{R}$ é a norma induzida por h em $T_x M$.

Demonstração. Tome $\lambda > 1$ tal que $\sigma > \lambda > 1$ e seja $n \geq 1$ tal que $C^2(\sigma/\lambda)^{2n} \geq 1$. Com isso, defina a métrica:

$$h(u, v)_x = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-2j} g(df^j(x)v, df^j(x)u)_{f^j(x)} \quad (3.2)$$

¹A técnica usada para provar o teorema 3.1.1 usando cones projetivos foi introduzida originalmente por Garret Birkhoff em [Bir40].

para cada $x \in M$ e $u, v \in T_x M$. Denotando por $\|\cdot\|$ a norma em $T_x M$ induzida por g , vamos estimar $|df(x)v|^2$. Pela regra da cadeia, temos $df^{j+1}(x)v = df^j(x)df(x)v$ para todo $x \in M$ e $v \in T_x M$. Logo:

$$\begin{aligned}
|df(x)v|^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-2j} \|df^j(x)df(x)v\|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-2j} \|df^{j+1}(x)v\|^2 \\
&= \lambda^2 \sum_{j=1}^n \lambda^{-2j} \|df^j(x)v\|^2 \\
&= \lambda^2 \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{-2j} \|df^j(x)v\|^2 + \|v\|^2 - \|v\|^2 \right) \\
&= \lambda^2 \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-2j} \|df^j(x)v\|^2 + \lambda^{-2n} \|df^n(x)v\|^2 - \|v\|^2 \right) \\
&= \lambda^2 (\|v\|^2 + \lambda^{-2n} \|df^n(x)v\|^2 - \|v\|^2) \\
&\geq \lambda^2 (\|v\|^2 + C^2 \sigma^{2n} \lambda^{-2n} \|v\|^2 - \|v\|^2) \\
&\geq \lambda^2 (\|v\|^2 + \|v\|^2 - \|v\|^2) \\
&\geq \lambda^2 \|v\|^2
\end{aligned}$$

Portanto, $|df(x)v| \geq \lambda \|v\|$ para todo $x \in M$ e $v \in T_x M$ como queríamos mostrar. \square

Dizemos que a métrica obtida no lema 3.2.3 é *adaptada*. A partir daqui vamos sempre assumir que estamos tomando uma métrica adaptada para a aplicação expansora f .

Observação 3.2.4. *Toda aplicação expansora é um difeomorfismo local. De fato, a derivada $df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} M$ é um isomorfismo para todo $x \in M$ e assim, f deve ser um difeomorfismo local pelo teorema da função inversa.*

Exemplo 3.2.5. *O exemplo mais famoso de aplicações expansoras é de um endomorfismo² linear do toro $f_A : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ induzido por uma matriz A de coeficientes inteiros com todos os seus auto-valores $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ de módulo maior que 1.*

Observação 3.2.6. *Outra propriedade importante das aplicações expansoras é que $\#f^{-1}(y)$ é um conjunto finito para todo $y \in M$. Com efeito, como f é um difeomorfismo local então para todo $x \in f^{-1}(y)$ existe um aberto $U \ni x$ tal que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo. Em particular, $U \cap f^{-1}(y) = \{x\}$. Logo, $f^{-1}(y)$ é um conjunto discreto e portanto, finito pela compacidade de M .*

Vamos estudar algumas propriedades topológicas das aplicações expansoras que serão de grande interesse para o estudo de sua dinâmica.

Definição 3.2.7. *Sejam X, \tilde{X} espaços métricos. Dizemos que uma aplicação $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é um recobrimento de X se para todo $y \in X$ existe uma vizinhança $V \ni y$ e uma família $\{U_i\}_{i \in I}$ de abertos de \tilde{X} que satisfazem:*

²Este exemplo pode ser encontrado feito com mais detalhes na sessão 4.2.5 em [OV10].

(i) $p|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ é um homeomorfismo para cada $i \in I$.

(ii) $p^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} U_i$.

A seguinte proposição mostra que aplicações expansoras são recobrimentos:

Proposição 3.2.8. *Toda aplicação expansora $f : M \rightarrow M$ é uma aplicação de recobrimento*

Demonstração. Pela observação 3.2.6, para cada $y \in M$ existem $x_1, \dots, x_k \in M$ tais que $\{x_1, \dots, x_k\} = f^{-1}(y)$. Para cada $i = 1, \dots, k$ tome $U_i \ni x_i$ de modo que $U_i \cap U_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ e $f|_{U_i} : U_i \rightarrow f(U_i)$ seja um difeomorfismo. Denote por $V_i = f(U_i)$ e tome os seguintes conjuntos:

$$B = M \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$$

$$V = \bigcap_{i=1}^k V_i \setminus f(B)$$

$$\tilde{U}_i = f^{-1}(V) \cap U_i$$

Como B é fechado e f é uma aplicação fechada, então $f(B)$ é fechado e assim, V é aberto. Além disso, temos que $f|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow V$ é um difeomorfismo para cada $i = 1, \dots, k$ e $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^k \tilde{U}_i$. Portanto, V é uma vizinhança distinguida de f e assim, f é uma aplicação de recobrimento. \square

Corolário 3.2.9. *Se $f : M \rightarrow M$ é uma aplicação expansora, então existe $k \geq 1$ tal que $\sharp f^{-1}(y) = k$ para todo $y \in M$.*

Demonstração. Para cada $k \geq 1$ o conjunto $A_k = \{y \in M; \sharp f^{-1}(y) = k\}$ é fechado e como f é aplicação de recobrimento, segue que A_k também é aberto. Portanto por conexidade, temos que $A_k = \emptyset$ ou $A_k = M$. Assim, existe $k \geq 1$ tal que $\sharp f^{-1}(y) = k$ para todo $y \in M$. \square

Dizemos que este número inteiro $k \geq 1$ é o *grau da aplicação f* . A seguinte proposição será muito útil:

Proposição 3.2.10. *Existe $\rho_0 > 0$ tal que para todo $y_1, y_2 \in M$ com $d(y_1, y_2) < \rho_0$, se $f^{-1}(y_j) = \{x_{j1}, \dots, x_{jk}\}$ onde $j = 1, 2$ então:*

$$d(x_{1i}, x_{2i}) \leq \sigma^{-1}d(y_1, y_2) \tag{3.3}$$

para cada $i = 1, \dots, k$.

Demonstração. Pela observação 3.2.4, vimos que toda aplicação expansora é um difeomorfismo local e portanto, dado $x \in M$, existe $\rho > 0$ e uma vizinhança aberta V_x de x de tal modo que $f|_{V_x} : V_x \rightarrow B(y, \rho)$ é um difeomorfismo, onde $y = f(x)$. Como M é compacto, então podemos tomar ρ_0 independente de x . Dados $y_1, y_2 \in M$ com $d(y_1, y_2) < \rho_0$ e x_{1i}, x_{2i} tais que $f(x_{1i}) = y_1$ e $f(x_{2i}) = y_2$, denote por V_i o aberto que contém x_{1i}, x_{2i} e defina $h_i = (f|_{V_i})^{-1}$. Então, esta função satisfaz para todo $z \in B(y, \rho)$:

$$\|dh_i(z)\| = \|df(h(z))^{-1}\| \leq \sigma^{-1}$$

Para ver que 3.3 é verdade, tome um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow B(y, \rho)$ que liga y_1 e y_2 . Então $\gamma \circ h_i$ é um caminho que liga x_{1i} e x_{2i} . Logo,

$$d(x_{1i}, x_{2i}) \leq \ell(\gamma \circ h_i) = \int_0^1 \|(\gamma \circ h_i)'(t)\| dt \leq \sigma^{-1} \ell(\gamma)$$

Como γ foi um caminho arbitrário, a desigualdade em 3.3 é válida para este ρ_0 . \square

Antes de terminar esta sessão, vamos concluir com uma prova de que aplicações expansoras são topologicamente misturadoras:

Proposição 3.2.11. *Se $f : M \rightarrow M$ é uma aplicação expansora, então para todo aberto $U \subset M$ existe $n \geq 1$ tal que $f^n(U) = M$. Em particular, f é topologicamente misturadora.*

Demonstração. Dado um aberto $U \subset M$ e $x \in U$, tome $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Vamos mostrar que todo $n \geq 1$ que satisfaz $f^n(U) \neq M$ deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$r \leq \sigma^{-n}(\text{diam } M + 1)$$

Então, suponha que $f^n(U) \neq M$ e tome $y \in M \setminus f^n(U)$. Seja $\gamma : I \rightarrow M$ um caminho diferenciável tal que $\gamma(0) = f^n(x)$ e $\gamma(1) = y$, com $l(\gamma) \leq \text{diam } M + 1$. Como f^n é uma aplicação de recobrimento, então pela propriedade de levantamento de caminhos existe um caminho $\gamma_n : I \rightarrow M$ tal que $\gamma = f^n \circ \gamma_n$ e $\gamma_n(0) = x, \gamma_n(1) = y_n \in M \setminus U$. Em particular, $d(x, y_n) \geq r$ pois $y_n \notin B(x, r)$. Logo,

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|(f^n \circ \gamma_n)'(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \|df^n(\gamma_n(t))\gamma_n'(t)\| dt \\ &\geq \sigma^n \int_0^1 \|\gamma_n'(t)\| dt \\ &= \sigma^n l(\gamma_n) \\ &\geq \sigma^n d(x, y_n) \\ &\geq \sigma^n r \end{aligned}$$

Portanto, $\sigma^{-n}(\text{diam } M + 1) \geq l(\gamma_n) \geq r$, como queríamos provar. Assim, como $\sigma^{-n} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, segue que existe $n \geq 1$ tal que $f^n(U) = M$. \square

3.3 Cones e métricas Projetivas

Nesta sessão vamos introduzir alguns conceitos básicos sobre cones em espaços vetoriais e uma métrica particular que é possível definir em cones chamada de *métrica projetiva*.

Definição 3.3.1. *Seja E um espaço vetorial real. Dizemos que um subconjunto $C \subset E \setminus \{0\}$ é um cone se:*

$$v \in C \text{ e } t > 0 \implies tv \in C$$

Se C é um cone em E , dizemos também que C é convexo se:

$$v_1, v_2 \in C \text{ e } t_1, t_2 > 0 \implies t_1v_1 + t_2v_2 \in C$$

Exemplo 3.3.2. *Como consequência imediata da definição acima, segue em particular que todo espaço vetorial é um cone convexo. Os cones conhecidos da geometria analítica em \mathbb{R}^3 também são exemplos de cones convexos e o subconjunto de \mathbb{R}^2 definido por $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ também um cone convexo, mas $\tilde{C} = C \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 0\}$ é um exemplo de um cone que não é convexo.*

Se C é um cone, definimos o fecho \overline{C} de C como o conjunto:

$$\overline{C} = \{w \in E; \text{ existe } v \in C \text{ e } t_n \rightarrow 0 \text{ tal que } w + t_nv \in C \text{ para todo } n \geq 1\}$$

Para trabalhar no restante deste capítulo, vamos sempre supor que vale a seguinte condição:

$$\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\} \tag{3.4}$$

Por exemplo, o fecho \overline{C} do cone C definido no exemplo 3.3.2 é o conjunto $\overline{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$, que não satisfaz a condição 3.4 pois $\overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = 0\}$.

Suponha que E seja um espaço vetorial e seja $C \subset E$ um cone convexo que satisfaz a condição 3.4. Dados $v_1, v_2 \in C$ defina:

$$\alpha(v_1, v_2) = \sup\{t > 0; v_2 - tv_1 \in C\}$$

$$\beta(v_1, v_2) = \inf\{s > 0; sv_1 - v_2 \in C\}$$

Onde vamos adotar a seguinte convenção: $\sup \emptyset = 0$ e $\inf \emptyset = +\infty$.

Proposição 3.3.3. *Se C é um cone convexo satisfazendo a condição 3.4 e $v_1, v_2, v_3 \in C$ então:*

(i) $\alpha(v_1, v_2) \leq \beta(v_1, v_2)$

(ii) $\alpha(v_1, v_2) < +\infty$ e $\beta(v_1, v_2) > 0$

(iii) $\alpha(v_2, v_1) = \beta(v_1, v_2)^{-1}$ e $\alpha(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1)^{-1}$

(iv) $\alpha(v_1, v_2)\alpha(v_2, v_3) \leq \alpha(v_1, v_3)$ e $\beta(v_1, v_2)\beta(v_2, v_3) \geq \beta(v_1, v_3)$.

Demonstração. (i) Suponha que $t > 0$ e $s > 0$ satisfaçam respectivamente, $v_2 - tv_1 \in C$ e $sv_1 - v_2 \in C$. Suponha que por absurdo que $s < t$. Então, pela convexidade do cone:

$$(v_2 - tv_1) + (sv_1 - v_2) = (s - t)v_1 = (t - s)(-v_1) \in C$$

Como $t - s > 0$, então $-v_1 = (t - s)(-v_1)/(t - s) \in C$, o que contradiz a condição 3.4, pois $v_1 \in C \cap (-C) \subset \overline{C} \cap (-\overline{C}) = \{0\}$ e $0 \notin C$. Isso, mostra que $\alpha(v_1, v_2) \leq \beta(v_1, v_2)$.

- (ii) Se $\alpha(v_1, v_2) = +\infty$, então existe uma sequência $t_n \rightarrow +\infty$ de modo que $v_2 - t_n v_1 \in C$ para todo $n \geq 1$. Logo, tomando a sequência $s_n = 1/t_n$, temos que $s_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ e $s_n v_2 - v_1 \in C$ para todo $n \geq 1$. Logo, por definição do fecho de C , temos que $-v_1 \in \overline{C}$, o que novamente contradiz a condição 3.4. A prova de que $\beta(v_1, v_2) > 0$ é análoga.
- (iii) Suponha primeiramente que $\alpha(v_2, v_1) > 0$. Observe que $t > 0$ satisfaz $v_1 - t v_2 \in C$ se e somente se $(1/t)v_1 - v_2 \in C$. Logo,

$$\alpha(v_2, v_1) = \sup\{t > 0; v_1 - t v_2 \in C\} = \sup\{1/s; s v_1 - v_2 \in C\}$$

Observe também que se $A \subset (0, +\infty)$ e $A^{-1} = \{1/t; t \in A\}$ então $\sup A = \inf A^{-1}$. Em particular,

$$\sup\{1/s; s v_1 - v_2 \in C\} = \inf\{s > 0; s v_1 - v_2 \in C\}^{-1} = \beta(v_1, v_2)^{-1}$$

Logo, concluímos que $\alpha(v_2, v_1) = \beta(v_1, v_2)^{-1}$ a partir das duas igualdades acima. Para concluir, observe também que vale a condição $v_1 - t v_2 \notin C$ para todo $t > 0$ se e somente se $s v_1 - v_2 \notin C$ para todo $s > 0$. Portanto, $\alpha(v_2, v_1) = 0$ se e somente se $\beta(v_1, v_2) = +\infty$. Isso mostra que $\alpha(v_2, v_1) = \beta(v_1, v_2)^{-1}$ em qualquer caso. A prova de que $\beta(v_2, v_1) = \alpha(v_1, v_2)^{-1}$ é análoga.

- (iv) Se $\alpha(v_1, v_2) = 0$ ou $\alpha(v_2, v_3) = 0$ então a afirmação é clara. Suponha que $\alpha(v_1, v_2) > 0$ e $\alpha(v_2, v_3) > 0$. Então, por definição, existem sequências $t_n \rightarrow \alpha(v_1, v_2)$ e $s_n \rightarrow \alpha(v_2, v_3)$ tais que $v_2 - t_n v_1, v_3 - s_n v_2 \in C$ para todo $n \geq 1$. Em particular,

$$s_n(v_2 - t_n v_1) + (v_3 - s_n v_2) = v_3 - t_n s_n v_1 \in C \text{ para todo } n \geq 1$$

Isso mostra que $t_n s_n \leq \alpha(v_1, v_3)$ para todo $n \geq 1$. Como $t_n s_n \rightarrow \alpha(v_1, v_2)\alpha(v_2, v_3)$ segue portanto que:

$$\alpha(v_1, v_2)\alpha(v_2, v_3) \leq \alpha(v_1, v_3)$$

De forma análoga, mostra-se que $\beta(v_1, v_2)\beta(v_2, v_3) \geq \beta(v_1, v_3)$. □

Agora, defina a seguinte função em C :

$$\begin{aligned} \theta : C \times C &\longrightarrow [0, +\infty] \\ (v_1, v_2) &\mapsto \log \frac{\beta(v_1, v_2)}{\alpha(v_1, v_2)} \\ \theta(v_1, v_2) &= \begin{cases} \log \frac{\beta(v_1, v_2)}{\alpha(v_1, v_2)} & \text{se } \alpha(v_1, v_2) > 0 \text{ ou } \beta(v_1, v_2) < +\infty \\ +\infty & \text{se } \alpha(v_1, v_2) = 0 \text{ ou } \beta(v_1, v_2) = +\infty \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que esta é uma função bem definida pelo item (i) da proposição 3.3.3. Vamos mostrar que esta função satisfaz propriedades boas:

Proposição 3.3.4. Se $v_1, v_2, v_3 \in C$, então:

(i) $\theta(v_1, v_2) = \theta(v_2, v_1)$.

(ii) $\theta(v_1, v_3) \leq \theta(v_1, v_2) + \theta(v_2, v_3)$.

(iii) $\theta(v_1, v_2) = 0$ se e somente se existe $t > 0$ tal que $v_1 = tv_2$.

Demonstração. (i) Pelo item (iii) da proposição 3.3.3, temos $\alpha(v_2, v_1) = \beta(v_1, v_2)^{-1}$ e $\alpha(v_1, v_2) = \beta(v_2, v_1)^{-1}$. Logo,

$$\theta(v_1, v_2) = \log \beta(v_1, v_2) \alpha(v_1, v_2)^{-1} = \log \alpha(v_2, v_1)^{-1} \beta(v_2, v_1) = \theta(v_2, v_1)$$

Isso mostra o item (i).

(ii) pelo item (iv) da proposição 3.3.3, temos $\alpha(v_1, v_2) \alpha(v_2, v_3) \leq \alpha(v_1, v_3)$ e $\beta(v_1, v_2) \beta(v_2, v_3) \geq \beta(v_1, v_3)$. Assim,

$$\begin{aligned} \theta(v_1, v_2) + \theta(v_2, v_3) &= \log \frac{\beta(v_1, v_2)}{\alpha(v_1, v_2)} + \log \frac{\beta(v_2, v_3)}{\alpha(v_2, v_3)} \\ &= \log \frac{\beta(v_1, v_2) \beta(v_2, v_3)}{\alpha(v_1, v_2) \alpha(v_2, v_3)} \\ &\geq \log \frac{\beta(v_1, v_3)}{\alpha(v_1, v_3)} \\ &= \theta(v_1, v_3) \end{aligned}$$

Como queríamos provar.

(iii) Observe que se $\theta(v_1, v_2) = 0$ então $\alpha(v_1, v_2) = \beta(v_1, v_2) = \gamma$. Sejam $t_n \rightarrow \gamma$ e $s_n \rightarrow \gamma$ seqüências tais que $v_2 - t_n v_1, s_n v_1 - v_2 \in C$ para todo $n \geq 1$. Então, $v_2 - \gamma v_1, \gamma v_1 - v_2 \in \overline{C}$. Logo, pela condição 3.4, como $v_2 - \gamma v_1 = -(\gamma v_1 - v_2) \in \overline{C}$ segue que $v_2 - \gamma v_1 = 0$, concluindo finalmente que $v_2 = \gamma v_1$. □

A função θ chama-se *métrica projetiva associada ao cone convexo C* . A próxima observação justifica o motivo deste nome: defina a seguinte relação de equivalência no cone C :

$$v, w \in C \implies v \sim w \iff \text{existe } t > 0 \text{ tal que } w = tv$$

Denotando as classes por $[v] = \{w \in C; w \sim v\}$, defina o *cone projetivo de C* como o conjunto \tilde{C} das classes de equivalência desta relação. Com isso, podemos definir uma nova função em \tilde{C} a partir da função θ :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} : \tilde{C} \times \tilde{C} &\longrightarrow [0, +\infty] \\ \tilde{\theta}([v_1], [v_2]) &= \theta(v_1, v_2) \end{aligned}$$

Em razão do item (iii) da proposição 3.3.4 esta função não depende do representante da classe escolhida e portanto está bem definida. Mais ainda, a mesma proposição mostra que esta função é uma métrica no cone projetivo de C e por este motivo, costuma-se dizer que θ é uma métrica projetiva.

Transformações lineares que preservam cones

Sejam E_1, E_2 espaços vetoriais e $C_1 \subset E_1, C_2 \subset E_2$ cones convexos. Denote por $\alpha_i, \beta_i, \theta_i$ onde $i = 1, 2$, os objetos associados definidos anteriormente para os cones C_1 e C_2 respectivamente. Se $L : E_1 \rightarrow E_2$ é uma transformação linear satisfazendo $L(C_1) \subset C_2$, então para todo $v_1, v_2 \in C_1$:

$$\theta_2(L(v_1), L(v_2)) \leq \theta_1(v_1, v_2) \quad (3.5)$$

De fato, se $t > 0$ e $v_2 - tv_1 \in C_1$ então $L(v_2 - tv_1) = L(v_2) - tL(v_1) \in C_2$. Como $L(v_2), L(v_1) \in C_2$ então $\alpha_1(v_1, v_2) \leq \alpha_2(L(v_1), L(v_2))$. Analogamente, prova-se que $\beta_1(v_1, v_2) \geq \beta_2(L(v_1), L(v_2))$ e logo, 3.5 segue por definição da métrica projetiva.

A estimativa 3.5 mostra que em geral, uma transformação linear que preserva cones tem constante de Lipschitz menor ou igual a 1 com respeito às métricas projetivas dos respectivos cones. Por mais que isso não garanta que a transformação linear também seja uma contração com respeito a esta métrica, a próxima proposição³ mostra que isto será verdade caso o diâmetro de $L(C_1)$ seja finito com respeito a θ_2 .

Proposição 3.3.5. *Seja $D = \sup\{\theta_2(L(v_1), L(v_2)); v_1, v_2 \in C_1\}$ e suponha que $D < +\infty$. Então, para todo $v_1, v_2 \in C_1$ temos:*

$$\theta_2(L(v_1), L(v_2)) \leq (1 - 1/e^D)\theta_1(v_1, v_2)$$

Demonstração. Suponha primeiramente que $\alpha_1(v_1, v_2) > 0$ e $\beta_1(v_1, v_2) < +\infty$. Então, existem seqüências $t_n \rightarrow \alpha_1(v_1, v_2)$, $s_n \rightarrow \beta_1(v_1, v_2)$ quando $n \rightarrow +\infty$ tais que $v_2 - t_n v_1, s_n v_1 - v_2 \in C$ para todo $n \geq 1$, por definição. Como estamos supondo que o diâmetro de $L(C_1)$ é finito então para todo $n \geq 1$:

$$\theta_2(L(v_2 - t_n v_1), L(s_n v_1 - v_2)) \leq D$$

Agora, para cada $n \geq 1$, tome T_n, S_n de modo que $L(s_n v_1 - v_2) - T_n L(v_2 - t_n v_1), S_n L(v_2 - t_n v_1) - L(s_n v_1 - v_2) \in C_2$, satisfazendo:

$$T_n + \frac{1}{n} \geq \alpha_2(L(v_2 - t_n v_1), L(s_n v_1 - v_2))$$

$$S_n - \frac{1}{n} \leq \beta_2(L(v_2 - t_n v_1), L(s_n v_1 - v_2))$$

Em particular, temos que:

$$\begin{aligned} \limsup \left(\log \frac{S_n}{T_n} \right) &= \limsup \left(\log \frac{S_n - 1/n}{T_n + 1/n} \right) \\ &\leq \frac{\beta_2(L(v_2 - t_n v_1), L(s_n v_1 - v_2))}{\alpha_2(L(v_2 - t_n v_1), L(s_n v_1 - v_2))} \\ &= \theta_2(L(v_2 - t_n v_1), L(s_n v_1 - v_2)) \\ &\leq D \end{aligned}$$

Logo,

³Na literatura, esta desigualdade também é conhecida como *desigualdade de Birkhoff* (compare com o teorema 2.2 em [Bal00])

$$\limsup \left(\log \frac{S_n}{T_n} \right) \leq D \quad (3.6)$$

Agora, vamos provar a seguinte desigualdade para todo $n \geq 1$:

$$\theta_2(L(v_1), L(v_2)) \leq \log \left(\frac{s_n}{t_n} \right) + \log \left(1 - \frac{T_n}{S_n} \right) \quad (3.7)$$

Com este objetivo, vamos demonstrar as seguintes afirmações:

Afirmção 3.3.6. Para todo $n \geq 1$, são válidas as seguintes desigualdades:

$$\beta_2(L(v_1), L(v_2)) \leq \frac{s_n + t_n T_n}{1 + T_n} e \alpha_2(L(v_1), L(v_2)) \geq \frac{s_n + t_n S_n}{1 + S_n}$$

Demonstração. De fato, como $L(s_n v_1 - v_2) - T_n L(v_2 - t_n v_1) \in C_2$ então:

$$\begin{aligned} L(s_n v_1 - v_2) - T_n L(v_2 - t_n v_1) &= (s_n + t_n T_n) L(v_1) - (1 + T_n) L(v_2) \\ &= (1 + T_n) \left(\frac{s_n + t_n T_n}{1 + T_n} L(v_1) - L(v_2) \right) \in C_2 \end{aligned}$$

Portanto, como $(1 + T_n) > 0$ e C_2 é um cone, segue que:

$$\frac{s_n + t_n T_n}{1 + T_n} L(v_1) - L(v_2) \in C_2$$

Logo por definição de $\beta_2(L(v_1), L(v_2))$ temos a primeira desigualdade da afirmação. A segunda desigualdade é provada igualmente usando o mesmo argumento. □

Afirmção 3.3.7 (lema de cálculo). Para todo $n \geq 1$ temos:

$$\int_0^{\log(\frac{s_n}{t_n})} \frac{e^x (S_n - T_n)}{(e^x + T_n)(e^x + S_n)} dx = \log \left(\frac{s_n + t_n T_n}{1 + T_n} \frac{1 + S_n}{s_n + t_n S_n} \right)$$

Demonstração. Primeiramente, observe que:

$$\frac{e^x (S_n - T_n)}{(e^x + T_n)(e^x + S_n)} = \left(\frac{e^x}{e^x + T_n} - \frac{e^x}{e^x + S_n} \right)$$

Além disso, observe que cada parcela da diferença acima satisfaz:

$$\frac{e^x}{e^x + T_n} = \frac{d}{dx} \log(e^x + T_n)$$

$$\frac{e^x}{e^x + S_n} = \frac{d}{dx} \log(e^x + S_n)$$

Agora, integrando a primeira parcela da diferença acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\log(s_n/t_n)} \frac{e^x}{e^x + T_n} dx &= \log(e^x + T_n) \Big|_0^{\log(s_n/t_n)} \\
&= \log\left(\frac{s_n}{t_n} + T_n\right) - \log(1 + T_n) \\
&= \log\left(\frac{1}{t_n} \frac{s_n + t_n T_n}{1 + T_n}\right)
\end{aligned}$$

Com o mesmo raciocínio, integrando a segunda parcela da diferença:

$$\int_0^{\log(s_n/t_n)} \frac{e^x}{e^x + S_n} dx = -\log\left(\frac{1}{t_n} \frac{s_n + t_n S_n}{1 + S_n}\right)$$

Portanto, reunindo todas as observações anteriores:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\log(\frac{s_n}{t_n})} \frac{e^x(S_n - T_n)}{(e^x + T_n)(e^x + S_n)} dx &= \log\left(\frac{1}{t_n} \frac{s_n + t_n T_n}{1 + T_n}\right) - \log\left(\frac{1}{t_n} \frac{s_n + t_n S_n}{1 + S_n}\right) \\
&= \log\left(\frac{s_n + t_n T_n}{1 + T_n} \frac{1 + S_n}{s_n + t_n S_n}\right)
\end{aligned}$$

Isso mostra a afirmação. □

Agora estamos prontos para demonstrar a desigualdade 3.7. De fato, temos:

$$\begin{aligned}
\theta_2(L(v_1), L(v_2)) &= \log \frac{\beta_2(L(v_1), L(v_2))}{\alpha_2(L(v_1), L(v_2))} \\
&\leq \log\left(\frac{s_n + t_n T_n}{1 + T_n} \frac{1 + S_n}{s_n + t_n S_n}\right) \\
&= \int_0^{\log(\frac{s_n}{t_n})} \frac{e^x(S_n - T_n)}{(e^x + T_n)(e^x + S_n)} dx \\
&\leq \log\left(\frac{s_n}{t_n}\right) \sup_{x>0} \frac{e^x(S_n - T_n)}{(e^x + T_n)(e^x + S_n)} \\
&\leq \log\left(\frac{s_n}{t_n}\right) \cdot \left(1 - \frac{T_n}{S_n}\right)
\end{aligned}$$

Assim, como $\log(s_n/t_n) \rightarrow \theta_1(v_1, v_2)$ quando $n \rightarrow +\infty$ e para todo $n \geq 1$ temos de acordo com 3.6:

$$\left(1 - \frac{T_n}{S_n}\right) \leq (1 - e^{-D})$$

Concluimos que $\theta_2(L(v_1), L(v_2)) \leq \theta_1(v_1, v_2)(1 - e^{-D})$ como queríamos provar. □

Exemplos de cones e métricas projetivas

Para contextualizar, vamos calcular explicitamente as métricas projetivas de alguns cones com que vamos trabalhar na próxima sessão quando estudar o operador de Perron-Frobënus de aplicações expansoras.

Exemplo 3.3.8 (Cones de funções positivas). *Seja X um espaço métrico compacto e denote por $E = C^0(X)$ o espaço vetorial das funções contínuas reais $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos o **cone convexo das funções positivas** como o conjunto:*

$$C_+ = \{\varphi \in E; \varphi(x) > 0 \text{ para todo } x \in X\}$$

Observe que C_+ é de fato um cone convexo pois é fechado para soma e multiplicação por escalar positivos. Para verificar que C_+ também satisfaz a condição 3.4, vamos mostrar que:

$$\overline{C_+} \subset \{\varphi \in E; \varphi(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in X\} \quad (3.8)$$

Para ver que isso é verdade, suponha por absurdo que exista $\varphi \in E$ e $p \in X$ tal que $\varphi(p) < 0$, mas $\varphi \in \overline{C_+}$. Por definição do fecho de um cone, existem $\psi \in C$ e uma sequência $t_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ tal que $\varphi + t_n\psi \in C$ para todo $n \geq 1$. Em particular, temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in X} t_n \psi_n(x) = 0$$

Logo, existe $n_0 \geq 1$ tal que $\sup_{x \in X} t_n \psi_n(x) \leq -\varphi(p)/2$ para todo $n \geq n_0$. Mais ainda, pela continuidade de φ , existe $\delta > 0$ de modo que:

$$\sup_{x \in B(p, \delta)} \varphi(x) \leq \frac{\varphi(p)}{2} < 0$$

Portanto, para todo $x \in B(p, \delta)$ e $n \geq n_0$ obtemos:

$$\varphi(x) + t_n \psi_n(x) \leq \frac{\varphi(p)}{2} - \frac{\varphi(p)}{2} = 0$$

E isso contradiz a hipótese de que $\varphi + t_n\psi \in C$ para todo $n \geq 1$. Assim, usando 3.8, obtemos:

$$\overline{C_+} \cap (-\overline{C_+}) \subset \{\varphi \geq 0\} \cap \{\varphi \leq 0\} = \{0\}$$

Agora, vamos calcular explicitamente a métrica projetiva θ_+ associada a este cone. Supondo que $\varphi_1, \varphi_2 \in C_+$, observe primeiramente que $t > 0$ satisfaz $(\varphi_2 - t\varphi_1)(x) > 0$ para todo $x \in X$ se e somente se:

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} > t \text{ para todo } x \in X$$

Assim, concluímos que:

$$\alpha_+(\varphi_1, \varphi_2) = \sup\{t > 0; \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} > t \text{ para todo } x \in X\} = \inf_{x \in X} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$$

O mesmo argumento mostra também que:

$$\beta_+(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{y \in X} \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}$$

Portanto, a métrica projetiva de duas funções positivas é dada por:

$$\theta_+(\varphi_1, \varphi_2) = \log \frac{\sup_{x \in X} \varphi_2(x)/\varphi_1(x)}{\inf_{y \in X} \varphi_2(y)/\varphi_1(y)} = \log \sup_{x, y \in X} \frac{\varphi_2(x)\varphi_1(y)}{\varphi_1(x)\varphi_2(y)}$$

Antes de introduzir o próximo exemplo, vamos definir uma classe de aplicações que possui um papel central nas próximas sessões.

Definição 3.3.9. *Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e sejam $\alpha > 0$, $\nu \in (0, 1]$. Dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é (α, ν) -Hölder se satisfaz para todo $x, y \in X$:*

$$d(f(x), f(y))_Y \leq \alpha d(x, y)_X^\nu$$

Em particular, toda função (α, ν) -Hölder é contínua, como é possível checar facilmente. A próxima observação será útil para o exemplo posterior: suponha que $Y = \mathbb{R}$ e $d_Y = d$ é a métrica euclidiana em \mathbb{R} . Se $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva (ou seja, $\varphi(x) > 0$ para todo $x \in X$) então $\log \varphi$ é (α, ν) -Hölder se e somente se para todo $x, y \in X$:

$$e^{-\alpha d(x, y)_X^\nu} \leq \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \leq e^{\alpha d(x, y)_X^\nu} \quad (3.9)$$

De fato, por definição a condição de $\log \varphi$ ser (α, ν) -Hölder é equivalente a condição de que para todo $x, y \in X$:

$$|\log \varphi(x) - \log \varphi(y)| \leq \alpha d(x, y)_X^\nu$$

Que por sua vez também é equivalente a condição:

$$-\alpha d(x, y)_X^\nu \leq \log \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \leq \alpha d(x, y)_X^\nu$$

Por conveniência, diremos que uma função positiva $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\log \varphi$ é (α, ν) -Hölder de **função $\log(\alpha, \nu)$ -Hölder**.

Exemplo 3.3.10 (Cone de funções $\log(\alpha, \nu)$ -Hölder). *Sejam X e E como antes e sejam $\alpha > 0$, $\nu \in (0, 1]$ constantes. Defina o conjunto:*

$$C(\alpha, \nu) = \{\varphi \in E; \varphi \text{ é positiva e é } \log(\alpha, \nu)\text{-Hölder}\}$$

Então, $C(\alpha, \nu)$ é um cone convexo. De fato, para provar a convexidade, suponha que $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\alpha, \nu)$ e $t_1, t_2 > 0$. Então devido à condição 3.9 temos:

$$e^{-\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_1(y) \leq \varphi_1(x) \leq e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_1(y) \text{ e } e^{-\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_2(y) \leq \varphi_2(x) \leq e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_2(y)$$

Logo, multiplicando $t_1 > 0$ e $t_2 > 0$ na primeira e na segunda desigualdade respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} t_1 e^{-\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_1(y) &\leq t_1 \varphi_1(x) \leq t_1 e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_1(y) \\ t_2 e^{-\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_2(y) &\leq t_2 \varphi_2(x) \leq t_2 e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_2(y) \end{aligned}$$

Assim, somando as duas desigualdades, obtemos o resultado desejado:

$$e^{-\alpha d(x, y)^\nu} \leq \frac{t_1 \varphi_1(x) + t_2 \varphi_2(x)}{t_1 \varphi_1(y) + t_2 \varphi_2(y)} \leq e^{\alpha d(x, y)^\nu}$$

Observando também que $C(\alpha, \nu) \subset C_+$ e $\overline{C(\alpha, \nu)} \subset \overline{C_+}$, concluímos que $C(\alpha, \nu)$ é um cone convexo que satisfaz a condição 3.4. Para este exemplo, vamos sempre denotar por $\theta_{\alpha, \nu}$ a métrica projetiva associada a este cone. Dados $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\alpha, \nu)$, para calcular $\alpha_{\alpha, \nu}$ seja $t > 0$ tal que $\varphi_2 - t\varphi_1 \in C(\alpha, \nu)$. Então, $\varphi_2 - t\varphi_1$ deve satisfazer para todo $x, y \in X$:

$$(\varphi_2 - t\varphi_1)(x) > 0 \text{ e } \frac{(\varphi_2 - t\varphi_1)(x)}{(\varphi_2 - t\varphi_1)(y)} \leq e^{\alpha d(x, y)^\nu}$$

Mas, estas condições são equivalentes a afirmar que para todo $x, y \in X$:

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} > t \text{ e } \frac{e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_2(x) - \varphi_2(y)}{e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_1(x) - \varphi_1(y)} \geq t$$

Assim, obtemos a expressão de $\alpha_{\alpha, \nu}$:

$$\alpha_{\alpha, \nu}(\varphi_1, \varphi_2) = \inf \left\{ \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \frac{e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_2(x) - \varphi_2(y)}{e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_1(x) - \varphi_1(y)} \text{ onde } x, y \in X \right\}$$

De forma análoga, obtemos a expressão de $\beta_{\alpha, \nu}$:

$$\beta_{\alpha, \nu}(\varphi_1, \varphi_2) = \sup \left\{ \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \frac{e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_2(x) - \varphi_2(y)}{e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_1(x) - \varphi_1(y)} \text{ onde } x, y \in X \right\}$$

Além disso, temos $\theta_{\alpha, \nu} \leq \theta_+$ pois $C_+ \supset C(\alpha, \nu)$.

O próximo exemplo desempenha um papel fundamental e será usado para obter propriedades dinâmicas sobre o operador de Perron-Frobënus. Suponha que $f : M \rightarrow M$ seja uma aplicação expansora em uma variedade compacta M . Pela proposição 3.2.10, existe $\rho > 0$ de modo que para todo $y_1, y_2 \in M$ com $d(y_1, y_2) < \rho$ satisfaz:

$$d(x_{1j}, x_{2j}) \leq \sigma^{-1} d(y_1, y_2)$$

para todo $j = 1, \dots, k$ onde $f^{-1}(y_i) = \{x_{i1}, \dots, x_{ik}\}$ ($i = 1, 2$) e $k \geq 1$ o grau da aplicação f . Se $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ é positiva, dizemos que φ é **log(α, ν)-Hölder em ρ_0 -vizinhanças** se para todo $y_1, y_2 \in M$ tal que $d(y_1, y_2) < \rho_0$ temos:

$$e^{-\alpha d(x, y)^\nu} \leq \frac{\varphi(y_1)}{\varphi(y_2)} \leq e^{\alpha d(x, y)^\nu}$$

Ou seja, a condição log(α, ν)-Hölder é válida sempre que $d(y_1, y_2) < \rho_0$.

Exemplo 3.3.11 (Cones de funções log(α, ν)-Hölder em ρ -vizinhanças). Ainda dentro das hipóteses anteriores, defina o conjunto:

$$C(\alpha, \nu, \rho_0) = \{ \varphi \in C^0(M); \varphi \text{ é positiva e log}(\alpha, \nu)\text{-Hölder em } \rho_0 \text{ vizinhanças} \}$$

Então, pelo mesmo raciocínio do exemplo anterior mostra-se que $C(\alpha, \nu, \rho_0)$ é um cone convexo que satisfaz a condição 3.4. Mais ainda, sua métrica pode ser igualmente calculada e expressa a partir das seguintes igualdades:

$$\alpha_{\alpha, \nu, \rho_0}(\varphi_1, \varphi_2) = \inf \left\{ \frac{\varphi_2(y_1)}{\varphi_1(y_1)}, \frac{e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_2(y_1) - \varphi_2(y_2)}{e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_1(y_1) - \varphi_1(y_2)} \text{ onde } d(y_1, y_2) < \rho_0 \right\}$$

$$\beta_{\alpha, \nu, \rho_0}(\varphi_1, \varphi_2) = \sup \left\{ \frac{\varphi_2(y_1)}{\varphi_1(y_1)}, \frac{e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_2(y_1) - \varphi_2(y_2)}{e^{\alpha d(x, y)^\nu} \varphi_1(y_1) - \varphi_1(y_2)} \text{ onde } d(y_1, y_2) < \rho_0 \right\}$$

3.4 O operador de Perron-Frobënus de uma aplicação expansora

Nesta sessão, vamos introduzir o Operador de Perron-Frobënus de uma aplicação expansora, que será usado para o provar o teorema 3.1.1. Sendo m a medida de Lebesgue em M , denotamos por $L^1(M, m)$ o espaço das funções lebesgue integráveis e vamos sempre supor que $m(M) = 1$.

Definição 3.4.1. *Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação expansora em M . Definimos o **Operador de Perron-Frobënus** como a função definida no espaço das funções integráveis:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : L^1(M, m) &\longrightarrow L^1(M, m) \\ \varphi &\mapsto \mathcal{L}\varphi \end{aligned}$$

Que satisfaz para cada $y \in M$:

$$(\mathcal{L}\varphi)(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\varphi(x)}{|\det df(x)|} \quad (3.10)$$

Observe a soma definida acima é finita, pois todo ponto tem exatamente o mesmo número de pré-imagens. Além disso, este é um operador bem definido, ou seja, $\mathcal{L}\varphi \in L^1(M, m)$ para todo $\varphi \in L^1(M, m)$. De fato, observe que como f é uma aplicação expansora de classe C^1 então a aplicação $x \mapsto |\det df(x)|$ é contínua em M e $|\det df(x)| > 0$ para todo $x \in M$, pois é um difeomorfismo local (vide observação 3.2.4). Em particular, como M é compacta então existe $C > 0$ tal que:

$$\inf_{x \in M} |\det df(x)| \geq C$$

Logo, sendo k o grau de f , temos para todo $\varphi \in L^1(M, m)$:

$$\|\mathcal{L}\varphi\|_{L^1} \leq k \sup_{x \in M} \frac{1}{|\det df(x)|} \|\varphi\|_{L^1} \quad (3.11)$$

A próximo proposição ilustra alguns fatos básicos sobre o operador de Perron-Frobënus:

Proposição 3.4.2 (Propriedades de \mathcal{L}). *O operador de Perron-Frobënus satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) \mathcal{L} é um operador linear e contínuo com respeito à norma $L^1(M, m)$.
- (ii) Para todo $\varphi, \psi \in L^1(M, m)$, vale a seguinte propriedade:

$$\int (\mathcal{L}\varphi)\psi dm = \int \varphi(\psi \circ f) dm \quad (3.12)$$

- (iii) Se $\varphi \in L^1(M, m)$ então $\mathcal{L}\varphi(x) = \varphi(x)$ m-q.t.p. se e somente se a medida definida por $\mu = \varphi m$ é f -invariante e absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue.

(iv) Se $\varphi \in L^1(M, m)$ então:

$$\int |\mathcal{L}\varphi| dm \leq \int \mathcal{L}|\varphi| dm \quad (3.13)$$

Demonstração. (i) Para provar a linearidade, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $\varphi, \psi \in L^1(M, m)$ quaisquer. Então para todo $y \in M$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(a\varphi + b\psi))(y) &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{(a\varphi + b\psi)(x)}{|\det df(x)|} \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{a\varphi(x) + b\psi(x)}{|\det df(x)|} \\ &= a \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\varphi(x)}{|\det df(x)|} + b \sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{\psi(x)}{|\det df(x)|} \\ &= a(\mathcal{L}\varphi)(y) + b(\mathcal{L}\psi)(y) \end{aligned}$$

logo, $\mathcal{L}(a\varphi + b\psi) = a\mathcal{L}\varphi + b\mathcal{L}\psi$, o que prova a linearidade. O fato do operador também ser contínuo segue de 3.11.

(ii) A prova deste item será baseada na seguinte afirmação:

Afirmção 3.4.3. Para todo $y \in M$ existe uma vizinhança $V \ni y$ tal que para todo boreliano $A \subset V$:

$$\int_A (\mathcal{L}\varphi)\psi dm = \int_{f^{-1}(A)} \varphi(\psi \circ f) dm \quad (3.14)$$

Demonstração. Fixado $y \in M$, tome uma vizinhança distinguida $V \ni y$ e $U_i \ni x_i$ todos disjuntos tais que $f_i = f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ é um difeomorfismo para cada $i = 1, \dots, k$, satisfazendo:

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^k U_i \quad (\text{ver 3.2.7})$$

Então, dado um boreliano $A \subset V$ qualquer, pelo teorema de mudança de variáveis temos:

$$\begin{aligned}
\int_A (\mathcal{L}\varphi)\psi dm &= \sum_{i=1}^k \int \frac{\varphi \circ f_i^{-1}}{|\det df \circ f_i^{-1}|} \chi_A \psi dm \\
&= \sum_{i=1}^k \int \left(\frac{\varphi \circ f_i^{-1}}{|\det df \circ f_i^{-1}|} \chi_A \psi \right) \circ f_i \cdot |\det df_i| dm \\
&= \sum_{i=1}^k \int \varphi(\chi_A \circ f_i)(\psi \circ f_i) dm \\
&= \sum_{i=1}^k \int_{f^{-1}(A) \cap U_i} \varphi(\psi \circ f) dm \\
&= \int_{f^{-1}(A)} \varphi(\psi \circ f) dm
\end{aligned}$$

Onde a última igualdade foi obtida a partir da relação:

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^k f^{-1}(A) \cap U_i$$

□

Provada a afirmação anterior, podemos cobrir a variedade M por abertos satisfazendo a afirmação 3.14 e portanto, pela compacidade obter uma subcoleção finita $V_1, \dots, V_n \subset M$ de abertos que ainda satisfazem a afirmação anterior e que cobrem M . Com isto, defina a seguinte família de borelianos:

$$\tilde{V}_1 = V_1 \text{ e } \tilde{V}_j = V_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i \text{ para cada } 2 \leq j \leq n$$

Então, a família de subconjuntos definida acima é disjunta e ainda cobre M , como é possível checar. Com isso, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\int (\mathcal{L}\varphi)\psi dm &= \sum_{i=1}^n \int_{\tilde{V}_i} (\mathcal{L}\varphi)\psi dm \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{f^{-1}(\tilde{V}_i)} \varphi(\psi \circ f) dm && \text{(afirmação 3.14)} \\
&= \int \varphi(\psi \circ f) dm
\end{aligned}$$

Onde a última igualdade vem do fato de que a família $\{f^{-1}(\tilde{V}_i)\}$ ainda é uma família de borelianos disjuntos que cobre M . Isso prova o item (ii).

- (iii) Suponha que $\varphi(x) = \mathcal{L}\varphi(x)$ m-q.t.p. e considere a medida absolutamente contínua $\mu = \varphi m$. Então, esta medida é f -invariante pois para todo $A \subset M$ boreliano temos:

$$\mu(A) = \int_A \varphi dm = \int (\mathcal{L}\varphi)\chi_A dm = \int \varphi(\chi_A \circ f) dm = \int_{f^{-1}(A)} \varphi dm = \mu(f^{-1}(A))$$

Reciprocamente, suponha que μ seja uma medida f -invariante e absolutamente contínua com respeito à Lebesgue. Pelo teorema de Radon-Nykodym existe $\varphi \in L^1(M, m)$ tal que $\mu = \varphi m$ e mais ainda, se $\psi \in L^1(M, m)$ é tal que $\psi m = \mu$ então $\psi(x) = \varphi(x)$ m-q.t.p. Considere a função $\psi = \mathcal{L} \varphi$ e defina a medida $\nu = \psi m$. Então, para todo boreliano $A \subset M$ obtemos:

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \int_A \psi dm \\ &= \int (\mathcal{L} \varphi) \chi_A dm \\ &= \int \varphi(\chi_A \circ f) dm \\ &= \int_{f^{-1}(A)} \varphi dm \\ &= \mu(f^{-1}(A)) \\ &= \mu(A) \end{aligned}$$

onde na última igualdade foi usada a hipótese de que μ é f -invariante. Portanto, $\mu = \nu$ e em particular, $\mathcal{L} \varphi(x) = \varphi(x)$ m-q.t.p. como queríamos provar.

(iv) Este último item segue como consequência imediata da desigualdade $|\mathcal{L} \varphi(y)| \leq \mathcal{L} |\varphi|(y)$ para todo $y \in M$.

□

O último item da proposição anterior revela uma característica bastante importante sobre o operador de Perron-Frobënus: vamos denotar por $\mathcal{L}^1(M, m)$ o conjunto das classes de equivalência da relação m-q.t.p. (ou seja, duas funções $\varphi, \psi \in L^1(M, m)$ estão na mesma classe se e somente se $\varphi(x) = \psi(x)$ m-q.t.p.). Denotando a classe de uma função por $[\varphi] \in \mathcal{L}^1(M, m)$ podemos então definir uma função $\tilde{\mathcal{L}} : \mathcal{L}^1(M, m) \rightarrow \mathcal{L}^1(M, m)$ que satisfaz $\tilde{\mathcal{L}}[\varphi] = [\mathcal{L} \varphi]$ para toda $\varphi \in L^1(M, m)$. Devido ao item (iv) da proposição anterior, esta é uma função bem definida. Além disso, o item (iii) revela uma condição muito especial sobre este operador: uma medida $\mu = \varphi m$ é f -invariante e absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue se e somente se $[\varphi]$ é um ponto fixo de $\tilde{\mathcal{L}}$. Por este motivo, vamos nos dar a liberdade de dizer que a densidade φ de uma medida invariante é um ponto fixo do operador de Perron-Frobënus, mesmo que $\mathcal{L} \varphi = \varphi$ ocorra apenas num conjunto de medida de Lebesgue total.

3.5 Existência de medidas invariantes absolutamente contínuas

Agora vamos provar o teorema 3.1.1 que se encontra no início desta sessão. Primeiramente vamos mostrar que o operador de Perron-Frobënus deixa invariante o cone de funções $\log(\alpha, \nu)$ -Hölder em ρ_0 -vizinhanças. Depois, usando o fato de que as métricas projetivas nestes cones são completas, mostraremos a existência de um ponto fixo que será densidade de uma medida f -invariante absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue (como visto na sessão anterior). Vamos começar provando a invariância dos cones.

Antes de começar, lembre-se de que estamos supondo que $\log |\det df|$ é uma função (α_0, ν_0) -Hölder onde $\alpha_0 > 0$ e $\nu_0 \in (0, 1]$. Ou seja, para todo $x_1, x_2 \in M$ temos:

$$e^{-\alpha_0 d(x,y)^{\nu_0}} \leq \frac{|\det df(x_2)|}{|\det df(x_1)|} \leq e^{\alpha_0 d(x,y)^{\nu_0}} \quad (3.15)$$

Lema 3.5.1. (Invariância) Existe $\lambda_1 < 1$ e $r > 0$ tal que $\mathcal{L}(C(\alpha, \nu, \rho_0)) \subset C(\lambda_1 \alpha, \nu, \rho_0)$ para todo $\alpha \geq r$ e $\nu \geq \nu_0$. (Lembrar da notação usada em 3.3.11).

Demonstração. Fixado $\lambda_1 \in (1/\sigma, 1)$, considere a constante:

$$r = \frac{\alpha_0}{(\lambda_1 - \sigma^{-\nu_0})}$$

Vamos mostrar que se $\alpha \geq r$, $\nu \geq \nu_0$ e $\varphi \in C(\alpha, \nu, \rho_0)$ então para todo $y_1, y_2 \in M$ tal que $d(y_1, y_2) < \rho_0$ tem-se:

$$e^{-\lambda_1 \alpha d(y_1, y_2)^\nu} \leq \frac{(\mathcal{L}\varphi)(y_1)}{(\mathcal{L}\varphi)(y_2)} \leq e^{\lambda_1 \alpha d(y_1, y_2)^\nu} \quad (3.16)$$

Como o operador de Perron-Frobënus é positivo, ou seja, $\mathcal{L}\varphi$ é positivo sempre que φ também é positivo, então é suficiente mostrar a condição 3.16 acima para garantir que $\mathcal{L}\varphi \in C(\lambda_1 \alpha, \nu, \rho_0)$. Assim, sejam $y_1, y_2 \in M$ tais que $d(y_1, y_2) < \rho_0$ e escreva $f^{-1}(y_j) = \{x_{1j}, \dots, x_{kj}\}$ para denotar as pré-imagens de y_j para cada $j = 1, 2$. Pela proposição 3.2.10 temos:

$$d(x_{i1}, x_{i2}) \leq \sigma^{-1} d(y_1, y_2)$$

Para todo $i = 1, \dots, k$. Em particular, como $\sigma^{-1} < 1$ então $d(x_{i1}, x_{i2}) < \rho_0$ e assim, usando o fato de que φ é $\log(\alpha, \nu)$ -Hölder em ρ_0 vizinhanças, obtemos para cada $i = 1, \dots, k$:

$$e^{-\alpha d(x_{i1}, x_{i2})^\nu} \leq \frac{\varphi(x_{i1})}{\varphi(x_{i2})} \leq e^{\alpha d(x_{i1}, x_{i2})^\nu} \quad (3.17)$$

Analogamente, como $\log |\det df|$ também é (α, ν) -Hölder então para cada $i = 1, \dots, k$ (Ver 3.15):

$$e^{-\alpha_0 d(x_{i1}, x_{i2})^{\nu_0}} \leq \frac{|\det df(x_{i2})|}{|\det df(x_{i1})|} \leq e^{\alpha_0 d(x_{i1}, x_{i2})^{\nu_0}} \quad (3.18)$$

Portanto, podemos estimar:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\varphi)(y_1) &= \sum_{i=1}^k \varphi(x_{i1}) \frac{1}{|\det df(x_{i1})|} \\ &\leq \sum_{i=1}^k \varphi(x_{i2}) e^{\alpha d(x_{i1}, x_{i2})^\nu} \frac{1}{|\det df(x_{i2})|} e^{\alpha_0 d(x_{i1}, x_{i2})^{\nu_0}} \\ &\leq e^{(\alpha \sigma^{-\nu} + \alpha_0) d(y_1, y_2)^\nu} \sum_{i=1}^k \frac{\varphi(x_{i2})}{|\det df(x_{i2})|} \\ &\leq e^{\lambda_1 \alpha d(y_1, y_2)^\nu} (\mathcal{L}\varphi)(y_2) \end{aligned} \quad (3.17 \text{ e } 3.18)$$

Observe que na segunda desigualdade usamos o fato de que:

$$d(x_{i1}, x_{i2})^{\nu_0} \leq d(x_{i1}, x_{i2})^\nu \leq \sigma^{-\nu} d(y_1, y_2)^\nu \leq d(y_1, y_2)$$

Assim, como y_1, y_2 foram escolhidos arbitrariamente segue que $\mathcal{L}\varphi \in C(\lambda_1\alpha, \nu, \rho_0)$, o que prova o lema. □

Vamos denotar por $\theta_{\alpha, \nu}$ e $\theta_{\lambda_1\alpha, \nu}$ as métricas projetivas dos cones $C(\alpha, \nu)$ e $C(\lambda_1\alpha, \nu)$ respectivamente. Como \mathcal{L} é uma transformação linear então por 3.5, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\alpha, \nu)$:

$$\theta_{\lambda_1\alpha, \nu}(\mathcal{L}\varphi_1, \mathcal{L}\varphi_2) \leq \theta_{\alpha, \nu}(\varphi_1, \varphi_2)$$

Nosso objetivo agora é mostrar que o operador de Perron-Frobënus é de fato, uma contração no cone das funções $\log(\alpha, \nu)$ -Hölder em ρ_0 -vizinhanças. De acordo com a proposição 3.3.5, para que isso seja verdade é suficiente mostrar que o diâmetro deste cone $D = \sup\{\theta_{\alpha, \nu}(\varphi_1, \varphi_2); \varphi_1, \varphi_2 \in C(\lambda_1\alpha, \nu)\}$ é finito. A ideia para fazer isso é a seguinte: primeiro, vamos mostrar que o diâmetro do cone $C(\alpha, \nu, \rho_0)$ com respeito à métrica projetiva θ_+ é finito (lembre-se de que isso faz sentido pois $C(\alpha, \nu, \rho_0) \subset C_+$). Depois, vamos concluir que o diâmetro D deste cone com respeito à métrica projetiva $\theta_{\alpha, \nu}$ é finito, mostrando que os diâmetros de $C(\alpha, \nu, \rho_0)$ com respeito a ambas as métricas se diferem por uma constante positiva. Antes, vamos começar com o seguinte lema:

Lema 3.5.2. *Existe uma constante $b > 0$ tal que $\log \varphi$ é (b, ν) -Hölder em M (e não apenas em ρ_0 -vizinhanças) para toda função $\varphi \in C(\alpha, \nu, \rho_0)$.*

Demonstração. A prova deste lema é baseada principalmente na seguinte afirmação:

Afirmção 3.5.3. *Existe $N \geq 1$ (que depende apenas de ρ_0 e de M) satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $x, y \in M$ existem $z_0, z_1, \dots, z_N \in M$ onde $z_0 = x, z_N = y$ e:*

$$d(z_{i-1}, z_i) \leq \rho_0 \frac{\text{diam}(M)}{d(x, y)} \leq \rho_0 \text{ para todo } i = 1, \dots, N \text{ e } \sum_{i=1}^N d(z_{i-1}, z_i) = d(x, y)$$

Demonstração. Como M é uma variedade Riemanniana compacta e conexa então M é completa, isto é, para todo par de pontos distintos $x, y \in M$ existe uma única geodésica minimizante $\gamma : I \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Assim, fixe $N \geq 1$ de modo que $N \leq \text{diam}(M)/\rho_0$. Então, este N escolhido satisfaz a afirmação. De fato, se $x, y \in M$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é a única geodésica minimizante que liga x e y , escolha $z_0 = x, z_N = y$ e $z_i \in \gamma(I)$ tais que $d(z_{i-1}, z_i) < \rho_0$ para todo $i = 1, \dots, N$. Então, usando o fato de que γ é uma geodésica minimizante, obtemos:

$$\sum_{i=1}^N d(z_{i-1}, z_i) = d(x, y)$$

Como queríamos provar. □

Com esta afirmação provada, seja $\varphi \in C(\alpha, \nu, \rho_0)$. Fixados $x, y \in M$ quaisquer, sejam $z_0 = x, z_1, \dots, z_N = y$ satisfazendo a afirmação anterior. Observe que podemos escrever:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} = \frac{\varphi(z_1)\varphi(z_2) \cdot \dots \cdot \varphi(z_N)}{\varphi(z_0)\varphi(z_1) \cdot \dots \cdot \varphi(z_{N-1})} = \prod_{i=1}^N \frac{\varphi(z_i)}{\varphi(z_{i-1})}$$

Como $\log \varphi$ é (α, ν) -Hölder em ρ_0 -vizinhanças e $d(z_i, z_{i-1}) \leq \rho_0$ para todo $i = 1, \dots, N$ então:

$$\frac{\varphi(z_i)}{\varphi(z_{i-1})} \leq e^{\alpha d(z_i, z_{i-1})^\nu}$$

Além disso, temos que $d(z_{i-1}, z_i)^\nu \leq d(x, y)^\nu$ para todo $i = 1, \dots, N$ e em particular:

$$\sum_{i=1}^N d(z_{i-1}, z_i)^\nu \leq Nd(x, y)^\nu \quad (3.19)$$

Logo, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} &\leq \prod_{i=1}^N \frac{\varphi(z_i)}{\varphi(z_{i-1})} \\ &\leq \prod_{i=1}^N \exp(\alpha d(z_i, z_{i-1})^\nu) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha d(z_i, z_{i-1})^\nu\right) \\ &\leq \exp(\alpha Nd(x, y)^\nu) \end{aligned} \quad (\text{por 3.19})$$

Com isso, basta tomar $b = \alpha N$, que é uma constante que não depende da função φ escolhida. \square

O lema anterior nos permite concluir o seguinte corolário:

Corolário 3.5.4. *Para todo $\alpha > 0$, existe uma constante $K_1(\alpha) > 0$ (que depende de α) tal que:*

$$\text{diam}_{\theta_+}(C(\alpha, \nu, \rho_0)) \leq K_1(\alpha)$$

Demonstração. Lembre-se de a métrica projetiva θ_+ já foi calculada no exemplo 3.3.8 e obtemos para toda $\varphi_1, \varphi_2 \in C_+$:

$$\theta_+(\varphi_1, \varphi_2) = \log \sup \left\{ \frac{\varphi_1(x)\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)\varphi_2(x)}; x, y \in M \text{ e } d(x, y) \leq \rho_0 \right\}$$

Pelo lema anterior (lema 3.5.2) existe uma constante positiva $b > 0$ tal que para todo $\varphi \in C(\alpha, \nu, \rho_0)$, $\log \varphi$ é (b, ν) -Hölder em M . Logo, para todo $x, y \in M$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\alpha, \nu, \rho_0)$ temos:

$$\log \frac{\varphi_2(x)\varphi_1(y)}{\varphi_1(y)\varphi_2(x)} \leq \log \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(y)} + \log \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(x)} \leq bd(x, y)^\nu \leq b \text{diam}(M)^\nu$$

Em particular, $\theta_+(\varphi_1, \varphi_2) \leq b \text{diam}(M)^\nu$ e portanto, basta tomar a constante $K(\alpha) = b \text{diam}(M)^\nu$. \square

Vamos denotar por θ_+ e $\theta = \theta_{\alpha, \nu}$ as métricas projetivas dos cones C_+ , $C_{\alpha, \nu}$ para constantes $\alpha > 0$ e $\nu \in (0, 1]$ arbitrárias. Lembre-se das expressões dessas métricas em 3.3.11.

Lema 3.5.5. *Existe uma constante $K_2(\lambda_1) > 0$ que depende apenas de λ_1 tal que:*

$$\text{diam}_{\theta}(C(\lambda_1\alpha, \nu, \rho_0)) \leq \text{diam}_{\theta_+}(C(\lambda_1\alpha, \nu, \rho_0)) + K_2(\lambda_1)$$

Demonstração. Primeiramente, dados $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\lambda_1\alpha, \nu, \rho_0)$ vamos provar que:

$$\frac{e^{\alpha d(x,y)^\nu} \varphi_2(x) - \varphi_2(y)}{e^{\alpha d(x,y)^\nu} \varphi_1(x) - \varphi_1(y)} \geq \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \frac{e^{\alpha d(x,y)^\nu} - e^{\alpha \lambda_1 d(x,y)^\nu}}{e^{\alpha d(x,y)^\nu} - e^{-\alpha \lambda_1 d(x,y)^\nu}} \quad (3.20)$$

Para ver que isso é verdade, se $x, y \in M$ satisfazem $d(x, y) \leq \rho_0$ então por definição:

$$e^{-\lambda_1 \alpha d(x,y)^\nu} \leq \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(y)} \leq e^{\lambda_1 \alpha d(x,y)^\nu}$$

Para $i = 1, 2$. Logo, obtemos as seguintes desigualdades:

$$e^{\alpha d(x,y)^\nu} \varphi_2(x) - \varphi_2(y) = \varphi_2(x) \left(e^{\alpha d(x,y)^\nu} - \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_2(x)} \right) \geq \varphi_2(x) (e^{\alpha d(x,y)^\nu} - e^{\alpha \lambda_1 d(x,y)^\nu})$$

$$\varphi_1(x) e^{\alpha d(x,y)^\nu} - \varphi_1(y) = \varphi_1(x) \left(e^{\alpha d(x,y)^\nu} - \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_1(x)} \right) \leq \varphi_1(x) (e^{\alpha d(x,y)^\nu} - e^{-\alpha \lambda_1 d(x,y)^\nu})$$

Portanto, a desigualdade 3.20 pode ser obtida reunindo as desigualdades deduzidas acima.

Agora, considere as seguintes constantes:

$$C_1 = \inf_{z>1} \frac{z - z^{\lambda_1}}{z - z^{-\lambda_1}} \text{ e } C_2 = \sup_{z>1} \frac{z - z^{-\lambda_1}}{z - z^{\lambda_1}}$$

Então $C_1 \in (0, 1)$, $C_2 \in (1, +\infty)$. Portanto, fazendo $z = e^{\alpha d(x,y)^\nu}$ na desigualdade 3.20:

$$\alpha(\varphi_1, \varphi_2) \geq \frac{e^{\alpha d(x,y)^\nu} \varphi_2(x) - \varphi_2(y)}{e^{\alpha d(x,y)^\nu} \varphi_1(x) - \varphi_1(y)} \geq \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} \frac{e^{\alpha d(x,y)^\nu} - e^{\alpha \lambda_1 d(x,y)^\nu}}{e^{\alpha d(x,y)^\nu} - e^{-\alpha \lambda_1 d(x,y)^\nu}} \geq C_1 \alpha_+(\varphi_1, \varphi_2)$$

Analogamente, $\beta(\varphi_1, \varphi_2) \leq C_2 \beta_+(\varphi_1, \varphi_2)$. Portanto,

$$\theta(\varphi_1, \varphi_2) = \log \frac{\beta(\varphi_1, \varphi_2)}{\alpha(\varphi_1, \varphi_2)} \leq \log \frac{C_2 \beta_+(\varphi_1, \varphi_2)}{C_1 \alpha_+(\varphi_1, \varphi_2)} = \theta_+(\varphi_1, \varphi_2) + \log C_2 - \log C_1$$

Logo, basta tomar $K(\lambda_1) = \log C_2 - \log C_1$ para completar a prova. \square

Corolário 3.5.6. *O operador de Perron-Frobënus é uma contração no cone $C(\lambda_1\alpha, \nu, \rho_0)$ com respeito à métrica projetiva θ com taxa de contração $\Lambda_1 = 1 - e^D$ onde D é o diâmetro de $C(\lambda_1\alpha, \nu, \rho_0)$.*

Demonstração. Pela proposição 3.3.5, é suficiente mostrar que o diâmetro D do cone $C(\lambda_1\alpha, \nu, \rho_0)$ com respeito à métrica θ é finito. Mas, isso segue diretamente dos lemas 3.5.4 e 3.5.5. \square

O fato do operador de Perron-Frobënus ser uma contração nos dá uma ideia de como podemos obter pontos fixos para o operador de Perron-Frobënus: tomando qualquer função $\log(\alpha, \nu)$ -Hölder em ρ_0 -vizinhanças e iterando com o operador sucessivamente, se a sequência dos iterados converge para uma função $\varphi \in C(\alpha, \nu, \rho_0)$ então a medida $\mu = \varphi m$ será uma medida invariante absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue e em particular, será um ponto fixo (vide o item (iv) da proposição 3.4.2). Para isto, vamos provar que os cones que estudamos até o momento são completos com suas respectivas métricas projetivas, no seguinte sentido: seja C um cone em um espaço vetorial E e seja θ sua métrica projetiva. Dizemos que C é **completo** com respeito a sua métrica projetiva, se para toda sequência de Cauchy $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ existe $\varphi \in C$ tal que:

$$\theta(\varphi_n, \varphi) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

Lema 3.5.7 (Completeness). *O cone C_+ é completo com respeito a sua métrica projetiva θ_+ . Mais ainda, se $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência em C_+ satisfazendo:*

$$\int \varphi_n dm = 1 \text{ para todo } n \geq 1 \quad (3.21)$$

E $\varphi \in C_+$ é o limite desta sequência, então a sequência $\{\varphi_n\}_n$ também converge para φ na métrica uniforme de $C^0(M)$.

Demonstração. Seja $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de Cauchy em C_+ normalizada de modo que satisfaça a condição 3.21 acima. Por ser de Cauchy, esta é uma sequência limitada com respeito a métrica projetiva θ_+ e portanto, existe $N > 0$ tal que $\theta_+(\varphi_n, \varphi_1) \leq N$ para todo $n \geq 1$. Logo, por definição temos que:

$$0 \leq \log \frac{\varphi_n(x)\varphi_1(y)}{\varphi_n(y)\varphi_1(x)} \leq N$$

E assim, em particular, para todo $x, y \in M$ e $n \geq 1$:

$$1 \leq \frac{\varphi_n(x)\varphi_1(y)}{\varphi_n(y)\varphi_1(x)} \leq e^N$$

Tome $R_1 = e^N$ e seja $R_2 = \sup\{\varphi_1(x)/\varphi_1(y); x, y \in M\}$ (que existe pela compacidade de M). Então, para todo $x, y, \in M$ e $n \geq 1$ temos:

$$\frac{1}{R_2} \leq \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(y)} \leq R_2$$

Logo, em particular, para todo $n \geq 1$ e $x \in M$ vale:

$$\frac{1}{R_2} \leq \varphi_n(x) \leq R_2$$

Afirmção 3.5.8. *Para todo $k, l \in \mathbb{N}$ temos:*

$$\inf_{x, y \in M} \left(\frac{\varphi_k(x)}{\varphi_l(y)} \right) \leq 1 \leq \sup_{x, y \in M} \left(\frac{\varphi_k(x)}{\varphi_l(y)} \right)$$

Demonstração. Esta afirmação vem do fato de que a sequência $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ está normalizada, ou seja, $\int \varphi_n dm = 1$ para todo $n \geq 1$. Primeiramente, observe que para $x \in M$ é fixado, então para todo $y \in M$:

$$\varphi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\varphi_l(y)} \varphi_l(y) \geq \inf_{z, w \in M} \frac{\varphi_k(z)}{\varphi_l(w)} \varphi_l(y)$$

Em particular, fixando $x \in M$ obtemos:

$$\varphi_k(x) \geq \sup_{y \in M} \varphi_l(y) \inf_{z, w \in M} \frac{\varphi_k(z)}{\varphi_l(w)}$$

Portanto,

$$\inf_{x \in M} \varphi_k(x) \geq \sup_{y \in M} \varphi_l(y) \inf_{z, w \in M} \frac{\varphi_k(z)}{\varphi_l(w)}$$

Analogamente, repetindo o mesmo raciocínio:

$$\sup_{x \in M} \varphi_k(x) \leq \inf_{y \in M} \varphi_l(y) \sup_{z, w \in M} \frac{\varphi_k(z)}{\varphi_l(w)}$$

E assim, para cada $x \in M$ e $k, l \in \mathbb{N}$ obtemos:

$$\inf \frac{\varphi_k}{\varphi_l} \leq \frac{\inf \varphi_k}{\sup \varphi_l} \leq \frac{\varphi_k(x)}{\varphi_l(x)} \leq \frac{\sup \varphi_k}{\inf \varphi_l} \leq \sup \frac{\varphi_k}{\varphi_l}$$

Logo, como também vale que:

$$\inf \varphi_k \leq \int \varphi_k dm \text{ e } \frac{1}{\sup \varphi_l} \leq \frac{1}{\int \varphi_l dm}$$

Concluimos portanto que:

$$\inf \frac{\varphi_k}{\varphi_l} \leq \frac{\inf \varphi_k}{\sup \varphi_l} \leq \frac{\int \varphi_k dm}{\int \varphi_l dm} = 1 \leq \frac{\sup \varphi_k}{\inf \varphi_l} \leq \sup \frac{\varphi_k}{\varphi_l}$$

Como queríamos provar. □

Provada esta afirmação, como $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de Cauchy com respeito a métrica projetiva θ_+ , tome $\varepsilon > 0$ e seja $N \geq 1$ tal que para todo $k, l \geq 1$ tem-se:

$$\left| \frac{\sup(\varphi_k/\varphi_l)}{\inf(\varphi_k/\varphi_l)} \right| \leq e^\varepsilon$$

Então, em particular, para todo $k, l \geq N$:

$$e^{-\varepsilon} \leq \inf \frac{\varphi_k}{\varphi_l} \leq 1 \leq \sup \frac{\varphi_k}{\varphi_l} \leq e^\varepsilon$$

Assim, usando a desigualdade anterior:

$$\sup |\varphi_k - \varphi_l| \leq \sup |\varphi_l| \sup \left| \frac{\varphi_k}{\varphi_l} - 1 \right| \leq R_2(e^\varepsilon - 1)$$

Para todo $k, l \geq N$. Logo, $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ é uma sequência de Cauchy com respeito à métrica da convergência uniforme em $C^0(M)$ e como este é um espaço métrico completo com esta métrica, sempre que M é compacto, segue que existe $\varphi_0 \in C^0(M)$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in M} |\varphi_n(x) - \varphi_0(x)| = 0$$

Observe que $\varphi_0 \in C_+$ pois $R_2^{-1} \leq \sup \varphi_n$ para todo $n \geq 1$.

Afirmção 3.5.9. A sequência $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ também converge para φ_0 com respeito à métrica projetiva θ_+ .

Demonstração. Observe que $\int \varphi_0 dm = 1$. Logo, aplicando o mesmo raciocínio da afirmação 3.5.8, obtemos para todo $k \geq 1$:

$$\inf \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_0} \right) \leq 1 \leq \sup \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_0} \right)$$

Logo, tomando limite concluimos que para todo $k \geq N$:

$$e^{-\varepsilon} \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \inf \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_l} \right) = \inf \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_0} \right) \leq 1 \leq \lim_{l \rightarrow +\infty} \sup \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_l} \right) = \sup \left(\frac{\varphi_k}{\varphi_0} \right) \leq e^\varepsilon$$

Portanto, obtemos o seguinte limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sup(\varphi_n/\varphi_0)}{\inf(\varphi_n/\varphi_0)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} = 1$$

E assim, por definição da métrica projetiva:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta_+(\varphi_n, \varphi_0) = 0$$

□

Com afirmação acima, prova-se o lema. □

Agora finalmente estamos prontos para concluir a existência de um ponto fixo φ_0 . Para isto, denotando por χ_M a função característica de M , defina a sequência de funções $\varphi_n = \mathcal{L}^n \chi_M$ para todo $n \geq 1$. Como o operador \mathcal{L} é uma θ -contração no cone $C(\alpha, \nu, \rho_0)$ (ver corolário 3.5.6) então a sequência definida acima é θ -Cauchy. De fato, fixado $n \geq 1$ qualquer, se $k \geq 1$ então:

$$\theta(\varphi_{n+k}, \varphi_n) \leq \sum_{j=0}^{k-1} \theta(\varphi_{n+j+1}, \varphi_{n+j}) \leq \theta(\mathcal{L} \chi_M, \chi_M) \sum_{j=0}^{k-1} (1 - e^{-D})^{n+j}$$

Como $\theta(\varphi_{n+k}, \varphi_{n+l}) \leq \theta(\varphi_{n+k}, \varphi_n) + \theta(\varphi_{n+l}, \varphi_n)$ para todo $k, l \geq 1$ segue portanto que a sequência definida acima é θ -Cauchy. Em particular, esta sequência também é θ_+ -Cauchy. Mais ainda, pelo item (iii) da proposição 3.4.2, temos para todo $n \geq 1$:

$$\int \varphi_n dm = \int (\mathcal{L}^n \chi_M) dm = \int (\mathcal{L}^n \chi_M) \chi_M dm = \int \chi_M dm = 1$$

Assim, pelo lema anterior, existe $\varphi_0 \in C_+$ tal que $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ quando $n \rightarrow +\infty$ uniformemente em $C^0(M)$. É possível checar que $\varphi_0 \in C(\lambda_1 \alpha, \nu, \rho_0)$. Como $\mathcal{L} : C^0(M) \rightarrow C^0(M)$ também é um operador linear contínuo com respeito à norma da convergência uniforme, então:

$$\mathcal{L} \varphi_0 = \mathcal{L} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{n+1} = \varphi_0$$

Concluindo que $\mathcal{L} \varphi_0 = \varphi_0$, ou seja, φ_0 é um ponto fixo do operador de Perron-Frobënus. Como consequência da proposição 3.4.2 a medida definida por $\mu_0 = \varphi_0 m$ é uma medida de probabilidade f -invariante e absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, cuja densidade satisfaz pelo lema anterior:

$$\varphi_0(x) \geq \frac{1}{R_2} > 0 \text{ para todo } x \in M$$

Em particular, esta medida é equivalente à medida de Lebesgue.

Alguns comentários sobre aplicações expansoras

No teorema 3.1.1, foi provada apenas a existência de medidas invariantes absolutamente contínuas, mas de fato, é possível concluir também a unicidade. A medida μ obtida na prova do teorema 3.1.1 é ergódica e absolutamente contínua com densidade ν -Hölder e seu suporte e sua bacia estatística de atração têm medida de Lebesgue total na variedade. Em particular, μ é uma medida física. O leitor que estiver interessado nos detalhes desta demonstração pode consultar a sessão 11.1.3 em [OV10] para uma prova mais geométrica do teorema acima ou pode consultar a sessão 2.4 em [Via97] para uma demonstração mais analítica, estudando o operador de Perron-Frobënus.

Outro fato interessante sobre as aplicações expansoras é que a dinâmica dessas aplicações está bem classificada a menos de conjugação. De fato, é provado em [Gro81] que toda aplicação expansora numa variedade compacta é topologicamente conjugada a uma infra-nil-variedade. Além disso, uma aplicação expansora em uma variedade compacta fica completamente determinada por sua ação no grupo fundamental da variedade (veja [Shu70]).

O leitor que também estiver interessado em mais propriedades ergódicas destas aplicações pode consultar [Via97] onde é provado usando o operador de Perron-Frobënus que aplicações expansoras possuem decaimento exponencial de correlações para funções Hölder e também é provado um resultado sobre estabilidade estocástica.

Aplicações Expansoras Por Partes com Infinitos Ramos

No último capítulo, foram estudadas aplicações expansoras de uma variedade Riemanniana e compacta, supondo que fosse diferenciável em todos os pontos. Vimos que estas aplicações possuem ricas propriedades dinâmicas tanto do ponto de vista topológico quanto do estatístico, constituindo um exemplo de como o comportamento dinâmico caótico e estocástico podem coexistir. Para complementar o estudo nesta direção, neste capítulo, vamos estudar aplicações do intervalo que também são uniformemente expansoras em seu domínio, mas com um número infinito e enumerável de descontinuidades, chamadas de **aplicações expansoras por partes com infinitos ramos de monotonicidade**. Estes mapas são diferenciáveis em cada intervalo de monotonicidade e sua derivada é limitada por baixo por uma constante estritamente maior do que um. O exemplo mais famoso de uma aplicação expansora por partes com infinitos ramos, cujo papel no estudo das frações continuadas em teoria dos números é central, é o *mapa de Gauss*, definido por $f(x) = 1/x - \lfloor 1/x \rfloor$ no intervalo $[0, 1]$. Uma das características mais interessantes deste mapa é a existência de uma medida invariante e equivalente à medida de Lebesgue do intervalo, definida por:

$$\mu(B) = \int \frac{c}{1+x} dm$$

Para cada $B \subset [0, 1]$ mensurável. Além disso, também é possível provar que este mapa é bastante caótico do ponto de vista da topologia, sendo topologicamente misturador, por exemplo (veja o capítulo 7 em [DR07]). Pensando neste exemplo, gostaríamos de entender sob quais condições um mapa que é expansor por partes com infinitos ramos possui propriedades parecidas com as do mapa de Gauss. De fato, como veremos no exemplo 4.3.3, existem aplicações do intervalo que expandem em cada intervalo de monotonicidade, mas que não admitem medidas invariantes absolutamente contínuas. Veremos que dentro de certas condições, que serão explicitadas mais a frente, é possível garantir que aplicações expansoras por partes com infinitos ramos **admitem** medidas invariantes absolutamente contínuas.

A técnica principal para provar a existência destas medidas é mais uma vez explorar as propriedades analíticas do operador de Perron-Frobënus \mathcal{L} para deduzir propriedades ergódicas destes mapas. Por outro lado, neste caso, em vez de trabalhar com cones de funções Hölder (que geralmente não são preservados por um mapa expansor por partes), veremos que sob condições apropriadas, as funções de variação limitada são preservadas pelo operador. Além disso, a regularidade destas funções expressa em termos da variação, é melhorada sob a ação do operador de Perron-Frobënus destas aplicações.

Destacamos que dentro do contexto deste trabalho, as aplicações expansoras por partes possuem um papel importante pois, além de constituírem um exemplo de classe de aplicações no qual o comportamento caótico e estocástico coexistem, vamos usar suas propriedades dinâmicas e ergódicas para estudar os mapas com ponto fixo neutral, presentes no capítulo 5. No estudo das propriedades ergódicas destes mapas se constrói uma aplicação expansora por partes do intervalo para deduzir informações sobre o comportamento estatístico destes mapas.

4.1 Funções de variação limitada do intervalo

Como foi observado na introdução, vamos trabalhar com o espaço das funções de variação limitada pois sob hipóteses adequadas, o operador de Perron-Frobënus preserva este espaço. Por este motivo e para conveniência do leitor, vamos nesta sessão estabelecer algumas propriedades elementares e úteis sobre as funções de variação limitada de um intervalo. Vamos também, a partir de agora, sempre denotar um intervalo limitado qualquer por $I \subset \mathbb{R}$.

Seja $[a, b]$ um intervalo compacto. Dizemos que um subconjunto $\mathcal{P} \subset [a, b]$ é uma **partição finita do intervalo** se \mathcal{P} é finito e $a, b \in \mathcal{P}$. Seja $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Definimos a **variação de φ no intervalo** $[a, b]$ como:

$$\text{var}_{[a,b]} \varphi := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|; \mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\} \text{ é partição finita} \right\}$$

Se $I \subset \mathbb{R}$ não é um intervalo compacto e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função qualquer, então também podemos definir a **variação de φ no intervalo** I como:

$$\text{var}_I \varphi := \sup_{[a,b] \subset I} \text{var}_{[a,b]} \varphi$$

Definição 4.1.1. *Seja $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida num intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$ qualquer. Dizemos que φ tem variação limitada no intervalo I se $\text{var}_I \varphi < +\infty$.*

Denotamos o **espaço das funções de variação limitada no intervalo** I por:

$$\mathcal{BV}(I) := \{\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}; \text{var}_I \varphi < +\infty\}$$

Com as operações de soma e multiplicação por escalar este é um espaço vetorial real, o qual pode ser munido com a **norma da variação limitada**:

$$\|\varphi\|_{\mathcal{BV}} := \text{var}_I(\varphi) + \int_I |\varphi| dm \text{ para cada } \varphi \in \mathcal{BV}(I)$$

Observação 4.1.2. *Observe que a norma acima está bem definida. De fato, toda função de variação limitada é limitada e portanto, é integrável com respeito à medida de Lebesgue do intervalo I , ou seja:*

$$\mathcal{BV}(I) \subset \mathcal{L}(I, m)$$

Uma primeira pergunta que pode ser feita é sobre a regularidade das funções de variação limitada. São contínuas? Diferenciáveis? De classe C^1 ? Os seguintes exemplos mostram que isso depende bastante da função:

Exemplo 4.1.3. Toda função de Lipschitz $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ tem variação limitada. De fato, Suponha que $C > 0$ seja a constante de Lipschitz de φ . Dado um intervalo compacto $[a, b] \subset I$ qualquer e $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ uma partição finita de $[a, b]$ temos:

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n C \cdot |t_i - t_{i-1}| = C(a - b)$$

Logo, $\text{var}_I \varphi \leq C(a - b) \leq Cm(I)$ e portanto, tem variação limitada. Em particular, toda função de classe C^1 num intervalo compacto é uma função de variação limitada.

Exemplo 4.1.4 (Uma função contínua que não tem variação limitada). Seja $\varphi : I \rightarrow I$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Então, f é uma função contínua do intervalo I que não possui variação limitada. De fato, considere a seqüência $x_k = \frac{2}{2k-1}$ para todo $k \geq 2$. Não é difícil ver que:

$$\sin\left(\frac{\pi}{x_k}\right) = (-1)^{k+1} \text{ para cada } k \geq 2$$

Logo, tomando a seqüência de partições $\mathcal{P}_k = \{0 = x_0 < x_k < \dots < x_2 = 1\}$, vemos que a variação de f no intervalo I satisfaz:

$$\begin{aligned} \text{var } f &\geq \sum_{j=2}^{\infty} |f(x_j) - f(x_{j+1})| = \sum_{j=2}^{\infty} \left| x_j \sin\left(\frac{\pi}{x_j}\right) - x_{j+1} \sin\left(\frac{\pi}{x_{j+1}}\right) \right| \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \left| \frac{2}{2j-1} (-1)^{j+1} - \frac{2}{2j+1} (-1)^j \right| \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{2}{2j-1} + \frac{2}{2j+1} \\ &\geq +\infty \end{aligned}$$

Ou seja, f não tem variação limitada.

Exemplo 4.1.5 (Uma função descontínua que não tem variação limitada). No mesmo espírito do exemplo anterior, a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{se } x \in (0, 1] \end{cases}$$

É um exemplo de uma função que não é contínua e não é de variação limitada, pois a mesma seqüência de partições do exemplo anterior mostra que a variação é ilimitada no intervalo $[0, 1]$.

Vamos provar agora algumas propriedades básicas sobre as funções de variação limitada que serão essenciais ao longo do texto.

Lema 4.1.6. Sejam $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{BV}(I)$ e $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com derivada limitada em I . Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:

$$(v1) \text{ var}_I(\varphi_1 + \varphi_2) \leq \text{var}_I \varphi_1 + \text{var}_I \varphi_2$$

$$(v2) \text{ var}_I(\varphi_1 \cdot \varphi_2) \leq \text{var}_I \varphi_1 \sup_I |\varphi_2| + \sup_I |\varphi_1| \text{ var}_I \varphi_2$$

$$(v3) \sup_I \varphi \leq \text{var}_I \varphi + \inf_I \varphi \leq \text{var}_I \varphi + \frac{1}{m(I)} \int_I \varphi dm$$

$$(v4) \text{ var}_I |\varphi| \leq \text{var}_I \varphi$$

$$(v5) \text{ Se } h : I \longrightarrow h(I) \text{ é um homeomorfismo, então } \text{var}_{h(I)} \varphi = \text{var}_I(\varphi \circ h).$$

$$(v6) \text{ var}_I(\varphi \cdot \psi) \leq \text{var}_I \varphi \sup_I |\psi| + \sup_I |d\psi| \int_I |\varphi| dm$$

Demonstração. (v1) e (v4) são imediatos a partir da desigualdade triangular. Para checar que (v2) é verdade basta notar que se $x, y \in I$, então:

$$|\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \varphi_1(y)\varphi_2(y)| = |\varphi_1(x)(\varphi_2(x) - \varphi_2(y)) + \varphi_2(y)(\varphi_1(x) - \varphi_1(y))| \quad (4.1)$$

Assim, basta aplicar de novo a desigualdade triangular. A propriedade (v5) segue da seguinte observação: $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ é uma partição finita de $[a, b]$ se e somente se $h(\mathcal{P}) = \{s_0 = h(a) < s_1 < \dots < s_n = h(b)\}$ é uma partição finita de $h([a, b])$, onde $s_i = h(t_i)$ para todo $0 \leq i \leq n$ se h é crescente ou $s_i = h(t_{n-i})$ se h é decrescente. Para provar (v3), seja $x \in I$ arbitrário qualquer. Então, para todo $y \in I$ temos:

$$\varphi(x) - \varphi(y) \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \text{var}_I \varphi$$

Ou seja, $\varphi(x) \leq \text{var}_I \varphi + \varphi(y)$ para todo $y \in I$ e logo, temos que $\varphi(x) \leq \text{var}_I \varphi + \inf_I \varphi$. Como $x \in I$ foi arbitrário, segue que $\text{var}_I \varphi + \inf_I \varphi$ é uma cota superior de $\varphi(I)$. Portanto, $\sup_I \varphi \leq \text{var}_I \varphi + \inf_I \varphi$. Assim, a desigualdade em (v5) é obtida observando que:

$$\inf_I \varphi \leq \frac{1}{m(I)} \int_I \varphi dm$$

Para concluir a prova do lema, resta apenas provar (v6). Para isso, seja $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ uma partição finita de $[a, b]$. Pelo teorema do valor médio, para cada $i = 1, \dots, n$ existe $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ satisfazendo $|\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| = |d\psi(s_i)| \cdot |t_i - t_{i-1}|$. Pela desigualdade 4.1, obtemos:

$$|\varphi(t_i)\psi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\psi(t_{i-1})| \leq |\varphi(t_i)||\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| + |\psi(t_{i-1})||\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|$$

Logo, somando termo a termo obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\varphi(t_i)\psi(t_i) - \varphi(t_{i-1})\psi(t_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^n |\varphi(t_i)||\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| + |\psi(t_{i-1})||\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\varphi(t_i)||d\psi(s_i)||t_i - t_{i-1}| + \sum_{i=1}^n |\psi(t_{i-1})||\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \\ &\leq \sup_I |d\psi| \sum_{i=1}^n |\varphi(t_i)||t_i - t_{i-1}| + \sum_{i=1}^n |\psi(t_{i-1})||\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})| \\ &\leq \sup_I |d\psi| \int_I |\varphi| dm + \sup_I |\psi| \text{ var}_I \varphi \end{aligned}$$

Portanto, obtemos a desigualdade desejada. □

Por mais que existam funções regulares o suficiente que não são de variação limitada (como mostra o exemplo 4.1.4), é possível garantir que elas não apresentam irregularidades em excesso. Além do conjunto dos seus pontos de descontinuidade não ser muito grande (de fato, tem medida de Lebesgue nula), os limites laterais de todos os pontos existem e suas descontinuidades não podem ter um comportamento local semelhante ao exemplo 4.1.5.

Antes de provar todas as afirmações feitas acima, vamos voltar aos cursos de análise e relembrar o que significa a oscilação de uma função num ponto. Dada uma função limitada $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $p \in I$, $\delta > 0$, defina:

$$\theta_+(p; \delta) := \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)|; x, y \in (p, p + \delta)\}$$

Repare que $\theta_+(p, \cdot) : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ é uma função não-decrescente. Logo, como φ é limitada, então o seguinte limite existe:

$$\theta_+(p) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \theta_+(p; \delta) = \inf_{\delta > 0} \theta_+(p; \delta)$$

Dizemos que $\theta_+(p)$ é a **oscilação à direita de φ no ponto p** . Podemos definir de maneira análoga a **oscilação à esquerda de φ no ponto p** apenas trocando o intervalo $(p, p + \delta)$ pelo intervalo $(p - \delta, p)$ nas definições acima e denotando por $\theta_-(p)$.

Da mesma forma, para cada $\delta > 0$ defina:

$$\varphi_+(p; \delta) := \sup\{\varphi(x); x \in (p, p + \delta)\}$$

$$\varphi_-(p; \delta) := \sup\{\varphi(x); x \in (p - \delta, p)\}$$

Como $\varphi_+(p; \cdot)$ e $\varphi_-(p; \cdot)$ são funções não-decrescentes e limitadas, então os limites abaixo existem:

$$\varphi_{\pm}(p) = \lim_{\delta \rightarrow 0^{\pm}} \varphi_{\pm}(p; \delta) = \inf_{\delta > 0} \varphi_{\pm}(p; \delta)$$

Essas funções são importantes porque vão nos ajudar a caracterizar a existência de limites à esquerda e à direita, como mostra o seguinte lema:

Lema 4.1.7. *Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada e $p \in I$, então o limite lateral à direita de p existe e é igual a $\varphi_+(p)$ se e somente se $\theta_+(p) = 0$. O mesmo vale para o limite lateral à esquerda.*

Demonstração. Suponha que o limite lateral à direita de p existe e seja $\varepsilon > 0$. Então, por definição do limite lateral, existe $\delta > 0$ de modo que $|\varphi(x) - \varphi(p)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in (p, p + \delta)$. Logo, para todo $x, y \in (p, p + \delta)$ temos:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x) - \varphi(p)| + |\varphi(y) - \varphi(p)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ou seja, provamos que $\theta_+(p; \delta) \leq \varepsilon$. Como ε foi arbitrário, segue que $\theta_+(p) = 0$.

Agora, vamos mostrar a recíproca, isto é, que o limite lateral à direita de p existe quando $\theta_+(p) = 0$ e é igual a $\varphi_+(p)$. Para isso, como estamos supondo que $\theta_+(p) = 0$, seja $\varepsilon > 0$ e $\delta_0 > 0$ tais que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \theta_+(p, \delta_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x, y \in (p, p + \delta_0)$.

Seja $x \in (p, p + \delta_0)$ fixado. Então, vale a seguinte desigualdade:

$$|\varphi(x) - \varphi_+(p, \delta_0)| \leq \theta_+(p, \delta_0) \leq \varepsilon \quad (4.2)$$

De fato, dado $y \in (p, p + \delta_0)$ tal que $|\varphi(y) - \varphi_+(p, \delta_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ que existe pela definição de $\varphi_+(p, \delta_0)$, obtemos pela desigualdade triangular:

$$|\varphi(x) - \varphi_+(p, \delta_0)| \leq |\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - \varphi_+(p, \delta_0)| \leq \theta_+(p, \delta_0) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Fixe um $\delta < \delta_0$ qualquer. Da desigualdade 4.2, segue em particular que:

$$|\varphi_+(p, \delta) - \varphi_+(p, \delta_0)| \leq \varepsilon \quad (4.3)$$

Como valem as desigualdades $\varphi_+(p, \delta) \leq \varphi_+(p, \delta_0)$ e $\varphi(x) \leq \varphi_+(p, \delta_0)$, pois $\varphi_+(p, \cdot)$ é não-decrescente e $x \in (p, p + \delta_0)$, então:

$$-\varepsilon \leq \varphi_+(p, \delta) - \varphi_+(p, \delta_0) \leq \varphi_+(p, \delta) - \varphi(x) \leq \varphi_+(p, \delta_0) - \varphi(x) \leq \varepsilon \quad (\text{por 4.3})$$

Ou seja, provamos que $|\varphi(x) - \varphi_+(p, \delta)| < \varepsilon$ para todo $\delta < \delta_0$. Assim, tomando limite, obtemos:

$$|\varphi(x) - \varphi_+(p)| = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} |\varphi(x) - \varphi_+(p, \delta)| \leq \varepsilon$$

Portanto, como $\varepsilon > 0$ foi arbitrário, concluímos que $\varphi(x) \rightarrow \varphi_+(p)$ quando $x \rightarrow p^+$. O caso do limite lateral à esquerda de p é análogo. \square

Corolário 4.1.8. *Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada no intervalo I então, os limites laterais existem em todo ponto.*

Demonstração. Suponha por conveniência que o limite lateral à direita não existe em um ponto p do intervalo. Pelo lema anterior, a oscilação à direita satisfaz $\theta_+(p) > 0$, ou seja $\theta_+(p, \delta) \geq \theta_+(p)$ para todo $\delta > 0$. Assim, é possível construir uma sequência de intervalos fechados contidos em $(p, p + 1)$ onde a variação de φ nesses intervalos é sempre maior ou igual do que $\frac{\theta_+(p)}{2}$ da seguinte maneira: como $\theta_+(p, 1) > \frac{\theta_+(p)}{2}$, então existem $x_1, y_1 \in (p, p + 1)$ tais que $x_1 < y_1$ e $|\varphi(x_1) - \varphi(y_1)| \geq \frac{\theta_+(p)}{2}$. Tomando $\delta_2 > 0$ de modo que $(p, p + \delta_2) \subset (p, x_1)$, da mesma forma, existem $x_2, y_2 \in (p, p + \delta_2)$ tais que $x_2 < y_2$ e $|\varphi(x_2) - \varphi(y_2)| \geq \frac{\theta_+(p)}{2}$. Em particular, $[x_2, y_2] \cap [x_1, y_1] = \emptyset$.

Prosseguindo por indução, obtemos uma sequência de intervalos fechados e limitados $I_i = [x_i, y_i]$ disjuntos, todos contidos em $(p, p + 1)$ cuja variação satisfaz:

$$\text{var}_{I_i} \varphi \geq |\varphi(x_i) - \varphi(y_i)| > \frac{\theta_+(p)}{2}$$

Portanto, $\text{var}_{(p, p+1)} \varphi \geq \sum_{i=1}^{\infty} \text{var}_{I_i} \varphi \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta_+(p)}{2} \geq +\infty$. Assim, φ não tem variação limitada. A prova da existência do limite lateral à esquerda é feita de forma análoga. \square

Agora que sabemos que os limites laterais existem em todos os pontos do intervalo I , vamos denotar por $\varphi_+(p)$ e $\varphi_-(p)$ os limites laterais à direita e à esquerda respectivamente e vamos definir:

$$\sigma(p) = \max\{|\varphi(p) - \varphi_+(p)|, |\varphi(p) - \varphi_-(p)|\}$$

Com isso, podemos provar o seguinte lema:

Lema 4.1.9. *O conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, cujos limites laterais à esquerda e à direita existem em todo ponto, é enumerável.*

Demonstração. Denotando por D o conjunto dos pontos de descontinuidade e para cada $n \geq 1$, $D_n := \{x \in I; \sigma(x) > \frac{1}{n}\}$, como φ é contínua em p se e somente se $\sigma(p) = 0$, então:

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$$

A ideia é provar que cada D_n é um conjunto discreto do intervalo I e em particular, enumerável. De fato, fixado $p \in D_n$, tome $\varepsilon = \frac{1}{3n}$ e $\delta > 0$ de modo que $|\varphi(x) - \varphi_+(p)| < \varepsilon$ e $|\varphi(x) - \varphi_-(p)| < \varepsilon$ para todo $x \in (p, p + \delta)$ ou $x \in (p - \delta, p)$ (que existe devido à existência dos limites laterais). Seja $x \in (p, p + \delta)$ fixado. Tome $\delta_x > 0$ tal que $|\varphi(y) - \varphi_+(x)| < \varepsilon$ para todo $y \in (x, x + \delta_x) \subset (p, p + \delta)$. Assim, dado $y \in (x, x + \delta_x)$, temos:

$$|\varphi(x) - \varphi_+(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi_+(p)| + |\varphi_+(p) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - \varphi_+(x)| \leq \frac{1}{n}$$

Logo, $D_n \cap (p, p + \delta) = \emptyset$. Da mesma forma, podemos provar que $D_n \cap (p - \delta, p) = \emptyset$. Portanto, como p foi arbitrário, segue que todo ponto de D_n é isolado. Logo, cada D_n é enumerável e assim, D também é enumerável. □

Corolário 4.1.10. *O conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada é enumerável.*

Demonstração. Segue do lema 4.1.9 e do corolário 4.1.8. □

Corolário 4.1.11. *O conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ monótona é enumerável.*

Demonstração. Basta observar que os limites laterais existem em todo ponto e aplicar o lema 4.1.9. □

Para concluir esta sessão, vamos terminar com um resultado que será bastante útil daqui para frente. Seja $I = [a, b]$ um intervalo compacto e denote o espaço das funções contínuas de variação limitada por $\mathcal{BV}^0(I)$. Vamos denotar também por $C^0(I)$ o espaço das funções contínuas em I .

Teorema 4.1.12. *$\mathcal{BV}^0(I)$ é um subespaço denso de $L^1(I, m)$ com a norma L^1 .*

Demonstração. É conhecido que o espaço das funções contínuas $C^0(I)$ com a norma L^1 é um subespaço denso de $L^1(I, m)$. Logo, para provar o teorema basta mostrar que $\mathcal{BV}^0(I)$ é denso em $C^0(I)$ com a norma L^1 . Para isso, fixada $f \in C^0(I)$ qualquer e dado $\varepsilon > 0$, pela continuidade uniforme existe $\delta > 0$

tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2(b-a)$ para todo $|x - y| < \delta$. Tomando uma partição $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b\}$ de I de modo que $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ para todo $i = 1, \dots, n$, defina $\phi : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\phi_i(t) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) + f(t_{i-1})$$

Finalmente, defina $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ por $\phi(t) = \phi_i(t)$ se $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Como $\phi_{i+1}(t_i) = \phi_i(t_i)$ para todo $i = 1, \dots, n-1$ e ϕ contínua em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, segue que ϕ é contínua e satisfaz para todo $t \in [t_{i-1}, t_i]$:

$$\begin{aligned} |\phi(t) - f(t)| &= \left| \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) + (f(t_{i-1}) - f(t)) \right| \\ &\leq \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(t_{i-1}) - f(t)| \\ &\leq |f(t_i) - f(t_{i-1})| + |f(t_{i-1}) - f(t)| < \frac{2\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{b-a} \end{aligned}$$

Onde a última desigualdade segue da continuidade uniforme. Portanto:

$$\begin{aligned} \int_I |\phi - f| dm &= \int_a^b |\phi(t) - f(t)| dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\phi(t) - f(t)| dt \\ &< \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{(b-a)} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto, $\|\phi - f\|_{L^1} < \varepsilon$. Além disso, como cada ϕ_i tem variação limitada pois são funções Lipschitz num compacto (ver exemplo 4.1.3), segue em particular que:

$$\text{var } \phi \leq \sum_{i=1}^n \text{var } \phi_i < +\infty$$

Assim, $\mathcal{BV}^0(I)$ é denso em $C^0(I)$ na norma L^1 , como queríamos provar. □

4.2 O Teorema de Helly

O seguinte teorema que vamos provar nesta seção é um análogo ao teorema de Arzela-Ascoli para funções de variação limitada e será bastante útil na próxima sessão, especificamente na demonstração do teorema 4.3.4:

Teorema 4.2.1 (Teorema de Helly). *Seja $\psi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções em $\mathcal{BV}(I)$ e suponha que existam $K_1, K_2 > 0$ tais que:*

$$\sup |\psi_n| \leq K_1 \text{ e } \text{var } \psi_n \leq K_2 \text{ para todo } n \geq 1$$

Então, existe uma subsequência $(\psi_{n_k})_{k \geq 1}$ e uma função $\psi_0 \in \mathcal{BV}(I)$ satisfazendo:

- $\sup |\psi_0| \leq K_1$ e $\text{var } \psi_0 \leq K_2$.
- $\psi_{n_k}(x) \rightarrow \psi_0(x)$ quando $k \rightarrow +\infty$, para $x \in I$ lebesgue q.t.p.
- $\|\psi_{n_k} - \psi_0\|_{L^1} \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow +\infty$ onde $\|\cdot\|_{L^1}$ é a norma L^1 .

De forma resumida o teorema de Helly diz que toda sequência de funções uniformemente limitada com variação também uniformemente limitada possui uma subsequência convergente em L^1 para uma função de variação limitada. Antes de explicar a demonstração do teorema, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina as funções:

$$\psi_n^+(x) = \text{var}(\psi_n|_{[0,x]}) \text{ e } \psi_n^- := \psi_n^+ - \psi_n$$

Então, $(\psi_n^+)_n$ e $(\psi_n^-)_n$ são sequências de funções não-decrescentes tais que:

$$\sup \psi_n^+ \leq K_2 \text{ e } \sup |\psi_n^-| \leq K_1 + K_2 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

A ideia é provar o teorema se baseando em três lemas: No primeiro, que vamos provar agora, o objetivo é construir uma subsequência $\psi_{n_k}^\pm$ (usando um argumento diagonal parecido com o do teorema de Arzela-Ascoli) que converge a princípio, apenas nos racionais do intervalo I .

Lema 4.2.2. *Nas condições do teorema 4.2.1, existe uma subsequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ com $n_k \rightarrow +\infty$ de modo que para todo $q \in \mathbb{Q} \cap I$, existe $\psi_0^\pm(q) \in \mathbb{R}$ tal que $\psi_{n_k}^\pm(q) \rightarrow \psi_0^\pm(q)$ quando $k \rightarrow +\infty$.*

Demonstração. Seja $\{q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma enumeração dos racionais em I . Para provar essa afirmação, vamos começar estudando a sequência $\{\psi_n^+(q_1)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Observe que ela está contida no intervalo compacto $[-K_1, K_1]$. Logo, pela compacidade, existe um número real $\psi_0^+(q_1) \in [-K_1, K_1]$ e uma subsequência $(n_1)_k \rightarrow +\infty$ (que varia em função de k) tal que:

$$\psi_{(n_1)_k}^+(q_1) \rightarrow \psi_0^+(q_1) \text{ sempre que } k \rightarrow +\infty$$

Suponha por indução que para cada $l = 1, \dots, j \in \mathbb{N}$ conseguimos uma subsequência $(n_l)_k \rightarrow +\infty$ de $(n_{l-1})_k$ e um número real $\psi_0^+(q_l) \in [-K_1, K_1]$ tal que:

$$\psi_{(n_l)_k}^+(q_l) \rightarrow \psi_0^+(q_l) \text{ quando } k \rightarrow +\infty$$

Considere a sequência $\{\psi_{(n_j)_k}^+(q_{j+1})\}_{n \in \mathbb{N}}$. Então, novamente pela compacidade de $[-K_1, K_1]$, existe $\psi_0^+(q_{j+1}) \in [-K_1, K_1]$ e uma subsequência $(n_{j+1})_k \rightarrow +\infty$ de $(n_j)_k$ satisfazendo:

$$\psi_{(n_{j+1})_k}^+(q_{j+1}) \rightarrow \psi_0^+(q_{j+1}) \text{ quando } k \rightarrow +\infty$$

Ou seja, provamos que para todo $j \geq 1$, existe $\psi_0^+(q_j) \in [-K_1, K_1]$ e uma subsequência $(n_j)_k$ de $(n_{j-1})_k$ tal que:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_{(n_j)_k}^+(q_j) = \psi_0^+(q_j) \quad (4.4)$$

Agora, considere a sequência $\{\psi_{(n_i)_i}^+\}_{i \in \mathbb{N}}$. Então, afirmamos que:

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \psi_{(n_i)_i}^+(q_j) = \psi_0^+(q_j) \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \quad (4.5)$$

De fato, fixado $j \in \mathbb{N}$ e dado $\varepsilon > 0$, pelo que provamos em 4.4, existe $(n_j)_{k_j} \in \mathbb{N}$ tal que $|\psi_{(n_j)_k}^+(q_j) - \psi_0^+(q_j)| < \varepsilon$ para todo $(n_j)_k \geq (n_j)_{k_j}$. Assim, como $\{(n_i)_i\}_{i \geq j}$ é uma subsequência de $\{(n_j)_k\}_k$, segue que:

$$|\psi_{(n_i)_i}^+(q_j) - \psi_0^+(q_j)| < \varepsilon \text{ para todo } (n_i)_i \geq (n_j)_{k_j}$$

Portanto, 4.4 está provado. Para finalizar a afirmação feita no início, podemos repetir o mesmo argumento diagonal acima para a sequência de funções $\{\psi_{(n_i)_i}^-\}_{i \in \mathbb{N}}$ e obter uma subsequência $n_k \rightarrow +\infty$ de $\{(n_i)_i\}_i$ tal que:

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} \psi_{n_k}^-(q_j) = \psi_0^-(q_j) \text{ para todo } j \in \mathbb{N}$$

Como $n_k \rightarrow +\infty$ é uma subsequência de $\{(n_i)_i\}_i$, segue portanto por 4.5 que:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_{n_k}^\pm(q) = \psi_0^\pm(q) \text{ para todo } q \in \mathbb{Q} \cap I$$

E isso conclui a prova do lema. □

Agora, vamos partir para a segunda etapa da prova (conteúdo do segundo lema) que é a construção da função candidata ao limite. Observe primeiramente que, como ψ_n^\pm são sequências de funções não-decrescentes (explicitamente, $\psi_n^+(x) \leq \psi_n^+(y)$ e $\psi_n^-(x) \leq \psi_n^-(y)$ para todo $x < y$), então $\psi_0^+(q_1) \leq \psi_0^+(q_2)$ e $\psi_0^-(q_1) \leq \psi_0^-(q_2)$ para todo $q_1 < q_2$. Vamos estender as funções ψ_0^+ e ψ_0^- definindo para cada $x \in I$:

$$\psi_0^\pm(x) := \inf\{\psi_0^\pm(q); q \in [x, 1] \cap \mathbb{Q}\} \quad (4.6)$$

Temos que ψ_0^\pm são funções não-decrescentes por definição. Além disso, se $x \in I$ é ponto de continuidade da função ψ_0^\pm , então:

$$\psi_0^\pm(x) = \sup\{\psi_0^\pm(q); q \in [0, x] \cap \mathbb{Q}\} \quad (4.7)$$

Caso contrário, ψ_0^\pm não seriam funções não-decrescentes.

Lema 4.2.3. *Se $x \in I$ é ponto de continuidade de ψ_0^\pm , então $\psi_{n_k}^\pm(x) \rightarrow \psi_0^\pm(x)$ quando $k \rightarrow +\infty$.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, por 4.6 e 4.7 existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Q} \cap I$ tais que $q_1 \leq x \leq q_2$ satisfazendo:

$$\psi_0^\pm(x) - \varepsilon \leq \psi_0^\pm(q_1) \leq \psi_0^\pm(x) \leq \psi_0^\pm(q_2) \leq \psi_0^\pm(x) + \varepsilon \quad (4.8)$$

Como $\psi_{n_k}^\pm(q_1) \rightarrow \psi_0^\pm(q_1)$ e $\psi_{n_k}^\pm(q_2) \rightarrow \psi_0^\pm(q_2)$, tome $k_0 \geq 1$ de modo que para todo $k \geq k_0$:

$$-\varepsilon < \psi_0^\pm(q_1) - \psi_{n_k}^\pm(q_1) < \varepsilon \quad (4.9)$$

$$-\varepsilon < \psi_0^\pm(q_2) - \psi_{n_k}^\pm(q_2) < \varepsilon \quad (4.10)$$

Então, fixando $k \geq k_0$, como $\psi_{n_k}^\pm$ é não-decrescente, das observações 4.6 a 4.10, segue que:

$$\psi_0^\pm(x) - 2\varepsilon \leq \psi_0^\pm(q_1) - \varepsilon < \psi_{n_k}^\pm(q_1) \leq \psi_{n_k}^\pm(x) \leq \psi_{n_k}^\pm(q_2) < \psi_0^\pm(q_2) + \varepsilon \leq \psi_0^\pm(x) + 2\varepsilon$$

Ou seja, $|\psi_{n_k}^\pm(x) - \psi_0^\pm(x)| \leq 2\varepsilon$ para todo $k \geq k_0$, o que conclui o lema. □

Antes de finalmente definir o candidato à limite, observe que como ψ_0^\pm são funções não-decrescentes, os limites laterais existem em todo ponto, mesmo nos pontos onde elas são descontínuas. Por outro lado, pode ocorrer dos limites laterais "explodirem" nos pontos onde as duas funções são descontínuas. Por isso, vamos definir as funções auxiliares $\tilde{\psi}_0^\pm : I \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\tilde{\psi}_0^\pm(x) = \begin{cases} \psi_0^\pm(x) & \text{se } x \text{ é um ponto de continuidade de } \psi_0^\pm \\ \lim_{t \rightarrow x^+} \psi_0^\pm(t) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então ambas $\tilde{\psi}_0^\pm$ são contínuas à direita e coincidem com ψ_0^\pm em todos os seus pontos de continuidade. Finalmente, defina:

$$\psi_0 = \tilde{\psi}_0^+ - \tilde{\psi}_0^-$$

Prova do teorema 4.2.1: Afirmamos que ψ_0 é a função que satisfaz todas as hipóteses do enunciado do teorema. De fato, observe que nos pontos de continuidade de ψ_0^+ e ψ_0^- temos:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_{n_k}(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_{n_k}^+(x) - \psi_{n_k}^-(x) = \psi_0^+(x) - \psi_0^-(x) = \tilde{\psi}_0^+(x) - \tilde{\psi}_0^-(x) = \psi_0(x)$$

Além disso, como o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona é enumerável, então ψ_0 tem no máximo um número infinito enumerável de descontinuidades, por ser a diferença entre duas funções não-decrescentes. Logo, para $x \in I$ Lebesgue-q.t.p.:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi_{n_k}(x) = \psi_0(x)$$

Em particular, pelo teorema da convergência dominada, segue que $\|\psi_{n_k} - \psi_0\|_{L^1} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$.

Agora, vamos finalmente mostrar a afirmação do primeiro item do teorema. Denote por D o conjunto dos pontos de descontinuidade de ψ_0 . Observe que:

$$|\psi_0(x)| = \lim_k |\psi_{n_k}(x)| \leq K_1 \text{ para todo } x \notin D$$

Por outro lado, se existe algum $x \in D$ tal que $|\psi_0(x)| > K$, como ψ_0 é contínua à direita, então poderíamos escolher um ponto $y \notin D$ próximo o suficiente de x de modo que $|\psi_0(y)| > K$, contradizendo a observação acima. Logo, $\sup |\psi_0| \leq K_1$.

Se $t_1, \dots, t_s \in [0, 1] \setminus D$ são tais que $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_s = 1$, então:

$$\sum_{j=1}^s |\psi_0(t_j) - \psi_0(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^s \lim_{k \rightarrow +\infty} |\psi_{n_k}(t_j) - \psi_{n_k}(t_{j-1})| \leq \sup_k \text{var } \psi_{n_k} \leq K_2 \quad (4.11)$$

Suponha que exista uma partição $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ do intervalo $[0, 1]$ de modo que:

$$\sum_{j=1}^n |\psi_0(t_j) - \psi_0(t_{j-1})| > K_2$$

Então, tomando $\varepsilon = (\sum |\psi(t_j) - \psi(t_{j-1})| - K_2) \frac{1}{2}$, pela continuidade à direita da ψ_0 , podemos tomar uma segunda partição $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ do intervalo $[0, 1]$ de modo que s_i é próximo o suficiente de t_j e $s_j \notin D$ para todo $j = 1, \dots, n - 1$, satisfazendo:

$$|\psi_0(t_j) - \psi_0(t_{j-1})| < |\psi_0(s_j) - \psi_0(s_{j-1})| + \frac{\varepsilon}{n}$$

Ou seja:

$$\sum_{j=1}^n |\psi_0(s_j) - \psi_0(s_{j-1})| > \sum_{j=1}^n |\psi_0(t_j) - \psi_0(t_{j-1})| - \varepsilon > K_2$$

O que contradiz a observação 4.11. Portanto, concluímos que $\text{var } \psi_0 \leq K_2$, como queríamos provar. Isso prova o teorema de Helly. □

4.3 Aplicações expansoras por partes do intervalo

Com o objetivo de obter um resultado de existência de medidas invariantes absolutamente contínuas, assim como fizemos para aplicações expansoras no capítulo 3, nesta sessão, vamos introduzir formalmente o que entendemos por aplicações expansoras por partes com infinitos ramos do intervalo. Além de exigir que elas sejam expansoras em cada intervalo de monotonicidade, vamos supor condições adicionais que excluem alguns exemplos patológicos que poderiam ocorrer.

Definição 4.3.1. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função para a qual existe uma partição $\xi = \{\eta_j; j \geq 1\}$ do intervalo $[0, 1]$ de modo que $f|_{\eta_j} : \eta_j \rightarrow f(\eta_j)$ é um difeomorfismo de classe C^1 para cada $j \geq 1$. Dizemos que f é uma **aplicação expansora por partes** se f satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *Existe uma constante $\lambda > 1$ que satisfaz $\inf |df|_{\eta_j}| \geq \lambda$ para todo $j \geq 1$.*

(b) *$f|_{\eta_j} : \eta_j \rightarrow [0, 1]$ é de classe C^2 e existe uma constante $K_1 > 0$ tal que:*

$$\sup_{j \geq 1} \sup \frac{|d^2(f|_{\eta_j})|}{|df|_{\eta_j}|^2} \leq K_1$$

(c) *Existe uma constante $\delta > 0$ satisfazendo $m(f(\eta_j)) \geq \delta$ para todo $j \geq 1$.*

Denotamos também por $\sigma = \frac{1}{\lambda}$.

A partir de agora, por conveniência e para não sobrecarregar o texto, sempre que nos referimos à uma aplicação expansora por partes do intervalo com infinitos ramos, vamos dizer simplesmente *aplicações expansoras por partes*.

Antes, vamos explicar algumas das condições exigidas na definição acima e porque elas são necessárias: a primeira condição do item (a) é uma condição de **expansão uniforme** em cada intervalo de

monotonicidade η_j . A condição (b) é um pouco mais técnica e sutil, mas de forma heurística, ela diz que a velocidade da taxa de expansão em módulo é comparável ao quadrado da taxa de expansão em cada intervalo de monotonicidade. O papel desta condição será vista na próxima sessão, com mais detalhes. Já a última condição diz que o comprimento das imagens destes intervalos não fica arbitrariamente pequeno e são limitados por uma constante positiva. Vejamos alguns exemplos de aplicações expansoras por partes:

Exemplo 4.3.2. *Seja para cada $j \geq 1$, a coleção de intervalos $\eta_j = (2^{-j}, 2^{-j+1}]$ do exemplo 4.3.3 e defina $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 2^j x - 1 & \text{se } x \in \eta_j \end{cases}$$

Então, f satisfaz as condições (a),(b) e (c) da definição 4.3.1 pois para cada $x \in \eta_j$ e $j \geq 1$ temos $|df(x)| = 2^j \geq 2 > 1$, $m(f(\eta_j)) = m([0, 1]) = 1$ e:

$$\frac{|d^2 f(x)|}{|df(x)|^2} = 0$$

Logo, f é uma aplicação expansora por partes do intervalo.

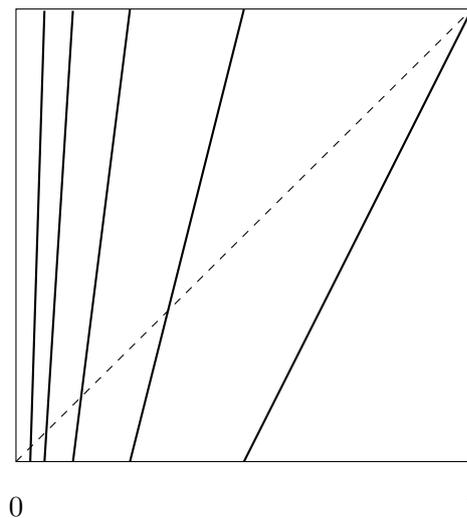


Figura 4.1: Aplicação expansora por partes do exemplo 4.3.2

O seguinte exemplo é de uma aplicação do intervalo $[0, 1]$ que satisfaz todas as condições da definição anterior, exceto pela c), mas que não possui medidas invariantes absolutamente contínuas. Em particular, este exemplo ¹ mostra que a hipótese c) não pode ser retirada.

Exemplo 4.3.3. *Para cada $j \geq 1$, vamos denotar por $\eta_j = (2^{-j}, 2^{-j+1}]$ e vamos definir a seguinte aplicação:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 2x - 2^{-j+1} & \text{se } x \in \eta_j \end{cases}$$

¹Este exemplo originalmente foi apresentado em [Ryc83] e pode ser encontrado na sessão 4 deste mesmo artigo.

Observe que $|df|_{\eta_j}(x)| = 2 > 1$ para todo $x \in \eta_j$ e $j \geq 1$, logo f é expansora em cada intervalo de monotonicidade. Porém, afirmamos que f não possui nenhuma medida invariante absolutamente contínua. De fato, vamos mostrar que se μ é uma medida invariante absolutamente contínua finita ou infinita, então ela dá peso positivo a um ponto (o que não pode ocorrer). Suponha primeiramente que $\mu(\eta_1) > 0$. Então, $\mu(f^{-i}(\eta_1)) = \mu(\eta_1) > 0$ para todo $i \geq 0$, pois μ é f -invariante. Além disso, observe que:

$$f^{-i}(\eta_1) = \left(\frac{2^{i+1} - 1}{2^{i+1}}, 1 \right] \text{ para todo } i \geq 0$$

Logo, temos $f^{-i}(\eta_1) \supset f^{-(i+1)}(\eta_1)$ para todo $i \geq 0$ e portanto:

$$\mu(\{1\}) = \mu\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} f^{-i}(\eta_1)\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mu(f^{-i}(\eta_1)) = \mu(\eta_1) > 0$$

Como estamos supondo que μ é absolutamente contínua, então $\mu(\eta_1) = 0$. Indutivamente, suponha que $\mu(\eta_j) = 0$ para todo $j = 1, \dots, k$ e que $\mu(\eta_{k+1}) > 0$. Argumento análogo mostra que:

$$f^{-i}(\eta_{k+1}) = \left(\frac{2^{i+1} - 1}{2^{i+k+1}}, \frac{1}{2^k} \right] \text{ para todo } i \geq 0$$

Logo, $\mu(\{2^{-k}\}) > 0$ o que não ocorre pois μ é absolutamente contínua. Logo, conclui-se que $\mu(\eta_j) = 0$ para todo $j \geq 1$. Em particular, como os intervalos η_j são disjuntos e podemos escrever:

$$[0, 1] = \{0\} \cup \bigcup_{j=1}^{+\infty} \eta_j$$

segue que $\mu(\{0\}) > 0$, contradizendo a hipótese de que μ é absolutamente contínua. Assim, f não possui nenhuma medida invariante absolutamente contínua.

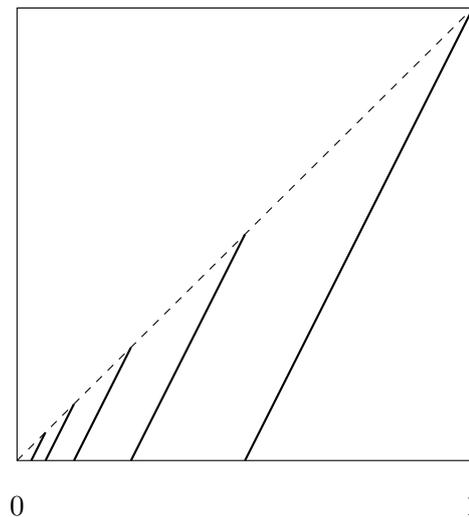


Figura 4.2: Exemplo 4.3.3

Observe que a aplicação f do 4.3.3 satisfaz as hipóteses (a) e (b), mas não satisfaz a hipótese (c) da definição 4.3.1, pois $m(f(\eta_j))$ é arbitrariamente pequeno quando $j \rightarrow +\infty$. Por outro lado, por mais que não existam medidas invariantes absolutamente contínuas com respeito à Lebesgue para a aplicação

do exemplo 4.3.3, a medida de Lebesgue é invariante para a aplicação dada no exemplo anterior (como veremos daqui a pouco).

O objetivo agora é provar que se a taxa de expansão de uma aplicação expansora por partes é suficientemente grande, então essas condições são suficientes. De fato, vamos provar nessa sessão o seguinte teorema:

Teorema 4.3.4 (Existência de medidas invariantes absolutamente contínuas). *Suponha que f seja uma aplicação expansora por partes satisfazendo $\lambda > 3$, onde:*

$$\inf |df|_{\eta_j}| \geq \lambda \text{ para todo } j \geq 1$$

Então, existe uma probabilidade invariante por f que é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Mais ainda, toda medida desse tipo tem densidade de variação limitada, ou seja, existe $\varphi \in \mathcal{BV}(I)$ tal que $\mu = \varphi m$.

Como já comentamos na introdução, a ideia é introduzir e trabalhar com o operador de Perron-Frobënus \mathcal{L} de uma aplicação expansora por partes para deduzir suas propriedades ergódicas, bem como fizemos no último capítulo para as aplicações expansoras, com a diferença de que vamos trabalhar com funções de variação limitada em vez de Hölder. Assim como no caso das aplicações expansoras, pontos fixos deste operador estão associados à medidas invariantes absolutamente contínuas. Por outro lado, a estratégia da prova acima difere do caso das aplicações expansoras do capítulo 3 pois em vez de deduzir que o operador de Perron-Frobënus é uma contração em um cone de funções, desta vez vamos deduzir que *seqüências de médias* do tipo:

$$\mathcal{L}_n \varphi = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}^j \varphi$$

Possuem pontos de acumulação no espaço das funções de variação limitada. Neste contexto, o teorema de Helly é **crucial** para concluir a existência destes pontos. Vale comentar que em geral, não é possível garantir a unicidade no teorema anterior pois existem aplicações expansoras por partes do intervalo com mais de uma medida invariante absolutamente contínua, como vamos mostrar ao final deste capítulo.

4.4 O operador de Perron-Frobënus

Assim como fizemos no caso das aplicações expansoras no capítulo anterior, vamos agora introduzir o operador de Perron-Frobënus de uma aplicação expansora por partes do intervalo.

Definição 4.4.1. *Dizemos que $\mathcal{L} : \mathcal{BV}(I) \rightarrow \mathcal{BV}(I)$ definido por:*

$$\mathcal{L}\varphi = \sum_{j \geq 1} \left[\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \chi_{f(\eta_j)} \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{BV}(I) \quad (4.12)$$

é o operador de Perron-Frobënus da aplicação expansora por partes f .

Observe que a definição acima expressa a mesma ideia da definição 3.10: para cada $y \in M$ e cada função de variação limitada φ , o valor de $(\mathcal{L}\varphi)(y)$ é definido como uma soma indexada pelas pré-imagens de y onde cada parcela é dada por $\varphi(x)|df(x)|^{-1}$ e $x \in f^{-1}(y)$. A princípio, diferente das aplicações

expansoras do capítulo anterior, não é claro que este é um operador bem definido e na falta de condições apropriadas sobre a aplicação f , este operador pode não preservar o espaço das funções de variação limitada, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 4.4.2. *Considere a mesma família de intervalos $\eta_j = (2^{-j}, 2^{-j+1}]$ dos exemplos 4.3.3 e 4.3.2 e defina $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 2^{-j+2} - 2x & \text{se } x \in \eta_j \end{cases}$$

Seja $\varphi = \chi_{[0,1]}$ a função característica do intervalo $[0, 1]$. Então, afirmamos que $(\mathcal{L}\varphi)(0) = +\infty$. Com efeito, temos que $0 \in f(\eta_j)$ e $(f|_{\eta_j})^{-1}(0) = 2^{-j+1}$ para todo $j \geq 1$. Como $|df(x)| = 2$ para todo $x \in [0, 1]$ segue que:

$$(\mathcal{L}\varphi)(0) = \sum_{j \geq 1} \frac{\varphi(2^{-j+1})}{2} \cdot \chi_{f(\eta_j)}(0) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{2} = +\infty$$

Assim, $\mathcal{L}\varphi$ não é de variação limitada e portanto, o operador de Perron-Frobenius não está bem definido neste caso.

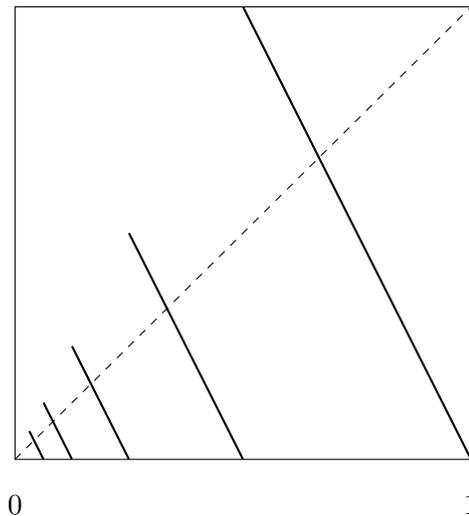


Figura 4.3: a aplicação do exemplo 4.4.2 não é expansora por partes e seu operador de Perron-Frobenius não está bem definido

Na década de 70, A. Lasota e James A. Yorke provaram uma desigualdade fundamental, com a qual conclui-se que o operador de Perron-Frobenius está bem definido no espaço das funções de variação limitada e que mantém um bom controle sobre a variação das funções. Este controle pode ser deduzido a partir das hipóteses apropriadas que fizemos na definição 4.3.1 e a condição b) tem um papel de destaque na prova da próxima proposição.

Proposição 4.4.3 (Desigualdade de Lasota-Yorke²). *Se $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de variação limitada qualquer, então:*

²Esta desigualdade originalmente foi apresentada em [LY73] e pode ser encontrada logo após a fórmula (12) neste mesmo artigo.

$$\text{var } \mathcal{L}\varphi \leq 3\sigma \text{ var } \varphi + \left(3K_1 + \frac{2}{\delta}\right) \int |\varphi| dm \quad (4.13)$$

Onde, σ , K_1 e δ são as constantes apresentadas na 4.3.1. Em particular, $\mathcal{L} : \mathcal{BV}(I) \rightarrow \mathcal{BV}(I)$ é um operador bem definido.

Demonstração. Primeiramente, observe que pela propriedade (v1), temos:

$$\text{var } \mathcal{L}\varphi = \text{var} \sum_{j \geq 1} \left[\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \chi_{f(\eta_j)} \leq \sum_{j \geq 1} \text{var} \left[\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \chi_{f(\eta_j)}$$

Além disso, como a variação de $\chi_{f(\eta_j)}$ fora de $f(\eta_j)$ é nula, então podemos escrever:

$$\text{var} \left[\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \chi_{f(\eta_j)} = \text{var}_{f(\eta_j)} \left[\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \chi_{f(\eta_j)}$$

Agora usando a propriedade (v2) e que $\text{var}_{f(\eta_j)} \chi_{f(\eta_j)} \leq 2$, então:

$$\text{var}_{f(\eta_j)} \left[\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \chi_{f(\eta_j)} \leq \text{var}_{f(\eta_j)} \left(\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right) + 2 \sup_{f(\eta_j)} \left| \frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right|$$

Portanto, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\text{var } \mathcal{L}\varphi \leq \sum_{j \geq 1} \text{var}_{f(\eta_j)} \left(\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right) + 2 \sup_{f(\eta_j)} \left| \frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right| \quad (4.14)$$

Como $f|_{\eta_j} : \eta_j \rightarrow f(\eta_j)$ é um difeomorfismo de classe C^2 , usando (v2),(v5) e (v6), a primeira parcela da soma acima fica:

$$\begin{aligned} \text{var}_{f(\eta_j)} \left(\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right) &= \text{var}_{\eta_j} \frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \\ &\leq \sup_{\eta_j} \frac{1}{|df|_{\eta_j}} \cdot \text{var}_{\eta_j} \varphi + \sup_{\eta_j} d \left(\frac{1}{|df|_{\eta_j}} \right) \int_{\eta_j} \varphi dm \\ &= \sup_{\eta_j} \frac{1}{|df|_{\eta_j}} \cdot \text{var}_{\eta_j} \varphi + \sup_{\eta_j} \left(\frac{|d^2(f|_{\eta_j})|}{|df|_{\eta_j}^2} \right) \int_{\eta_j} \varphi dm \\ &\leq \sigma \text{ var}_{\eta_j} \varphi + K_1 \int_{\eta_j} \varphi dm \quad (\text{por (a) e (b)}) \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos estimar a segunda parcela da soma em 4.14 usando (v3), obtendo:

$$\begin{aligned} \sup_{f(\eta_j)} \left| \frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right| &\leq \text{var}_{f(\eta_j)} \left(\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right) + \frac{1}{m(f(\eta_j))} \int_{f(\eta_j)} \left| \frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right| dm \\ &\leq \text{var}_{f(\eta_j)} \left(\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right) + \frac{1}{m(f(\eta_j))} \int_{\eta_j} |\varphi| dm \\ &\leq \sigma \text{ var}_{\eta_j} \varphi + \left(K_1 + \frac{1}{\delta} \right) \int_{\eta_j} |\varphi| dm \end{aligned}$$

Onde a segunda desigualdade foi obtida como consequência do teorema de mudança de variáveis. Observe também que como estamos supondo que a coleção de intervalos η_j é uma partição do intervalo I então podemos escrever:

$$\sum_{j \geq 1} \text{var}_{\eta_j} \varphi = \text{var} \varphi \text{ e } \int_{\eta_j} |\varphi| dm = \int |\varphi| dm$$

Assim, juntando as desigualdades obtidas para cada parcela da soma em 4.14 e substituindo, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{var} \mathcal{L} \varphi &\leq \sum_{j \geq 1} \left(\sigma \text{var}_{\eta_j} \varphi + K_1 \int_{\eta_j} |\varphi| dm \right) + 2 \sum_{j \geq 1} \left(\sigma \text{var}_{\eta_j} \varphi + \left(K_1 + \frac{1}{\delta} \right) \int_{\eta_j} |\varphi| dm \right) \\ &= \sum_{j \geq 1} 3\sigma \text{var}_{\eta_j} \varphi + \left(3K_1 + \frac{2}{\delta} \right) \int_{\eta_j} |\varphi| dm \\ &= 3\sigma \text{var} \varphi + \left(3K_1 + \frac{2}{\delta} \right) \int |\varphi| dm \end{aligned}$$

Isso prova a desigualdade 4.13. □

É pertinente observar que o operador de Perron-Frobënus de uma aplicação expansora por partes satisfaz propriedades análogas ao operador de Perron-Frobënus de uma aplicação expansora e elas podem ser deduzidas de maneira idêntica, com excessão de alguns detalhes. Para a coneniência do leitor, vamos enunciar estas propriedades e prová-las na próxima proposição:

Proposição 4.4.4. *O operador de Perron-Frobënus satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\mathcal{L} : \mathcal{BV}(I) \longrightarrow \mathcal{BV}(I)$ é um operador linear contínuo e bem definido no espaço $\mathcal{BV}(I)$ com a norma da variação limitada.

(ii) Para toda $\varphi, \psi \in \mathcal{BV}(I)$, vale a seguinte propriedade dual:

$$\int (\mathcal{L} \varphi) \psi dm = \int \varphi (\psi \circ f) dm \quad (4.15)$$

(iii) Se φ é positiva lebesgue q.t.p. então $\mathcal{L} \varphi = \varphi$ Lebesgue q.t.p. se e somente se $\mu = \varphi m$ é uma medida invariante.

Demonstração. (i) Pela proposição anterior, \mathcal{L} é um operador bem definido. Além disso, Observe que se $\varphi, \psi \in \mathcal{BV}(I)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então não é difícil ver que a partir da definição do operador de transferência:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha\varphi + \beta\psi) &= \sum_{j \geq 1} \left[\frac{\alpha\varphi + \beta\psi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \chi_{f(\eta_j)} \\ &= \alpha \sum_{j \geq 1} \left[\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \chi_{f(\eta_j)} + \beta \sum_{j \geq 1} \left[\frac{\psi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \chi_{f(\eta_j)} \\ &= \alpha(\mathcal{L} \varphi) + \beta(\mathcal{L} \psi) \end{aligned}$$

Logo, \mathcal{L} é um operador linear. Para checar que \mathcal{L} também é um operador contínuo, basta mostrar que existe uma constante $C > 0$ que satisfaz:

$$\|\mathcal{L}\varphi\| \leq C\|\varphi\| \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{BV}(I)$$

Mas, para isso, basta aplicar a proposição anterior e tomar:

$$C = \max \left\{ \frac{3}{\lambda}, 3K_1 + \frac{2}{\delta} \right\}$$

(ii) Se $\varphi, \psi \in \mathcal{BV}(I)$, então pelo teorema de mudança de variáveis, para cada $j \geq 1$ temos:

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \chi_{f(\eta_j)} \psi dm &= \int_{f(\eta_j)} \left[\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \psi dm \\ &= \int_{\eta_j} \left[\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \circ (f|_{\eta_j}) \right] \cdot (\psi \circ (f|_{\eta_j})) |df|_{\eta_j} dm \\ &= \int_{\eta_j} \frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \cdot (\psi \circ (f|_{\eta_j})) |df|_{\eta_j} dm \\ &= \int_{\eta_j} \varphi(\psi \circ f) dm \end{aligned}$$

Logo, aplicando o teorema da convergência dominada concluímos que:

$$\begin{aligned} \int (\mathcal{L}\varphi)\psi dm &= \sum_{j \geq 1} \int \left[\frac{\varphi}{|df|_{\eta_j}} \circ (f|_{\eta_j})^{-1} \right] \cdot \chi_{f(\eta_j)} \psi dm \\ &= \sum_{j \geq 1} \int_{\eta_j} \varphi(\psi \circ f) dm \\ &= \int \varphi(\psi \circ f) dm \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

(iii) Suponha que $\varphi \in \mathcal{BV}(I)$ satisfaz $\mathcal{L}\varphi = \varphi$ Lebesgue q.t.p. Então, a medida $\mu = \varphi m$ satisfaz para todo $A \subset I$ Borel-mensurável:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \int_A \varphi dm = \int \varphi \chi_A dm = \int (\mathcal{L}\varphi) \chi_A dm \\ &= \int \varphi(\chi_A \circ f) dm \\ &= \int_{f^{-1}(A)} \varphi dm = \mu(f^{-1}(A)) \end{aligned}$$

Assim, μ também é f -invariante. Reciprocamente, supondo que $\mu = \varphi m$ defina $\nu = (\mathcal{L}\varphi)m$. Então, para todo $A \subset I$ Borel-mensurável:

$$\begin{aligned}
\nu(A) &= \int_A \mathcal{L} \varphi dm = \int (\mathcal{L} \psi) \chi_A dm \\
&= \int \varphi \cdot (\chi_A \circ f) dm && \text{(proposição 4.4.4, (ii))} \\
&= \int \chi_A \circ f d\mu \\
&= \int \chi_A d\mu && \text{(a medida é invariante)} \\
&= \mu(A)
\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi m = \mu = \nu = (\mathcal{L} \varphi) m$ e logo como $\mathcal{L} \varphi$ também é positivo lebesgue q.t.p pois o operador de Perron-Frobënus é positivo, então $\mathcal{L} \varphi = \varphi$, como queríamos mostrar. \square

Observação 4.4.5. Se $\psi \in \mathcal{BV}(I)$, então pela definição do operador de Perron-Frobënus, vale a seguinte desigualdade:

$$\int |\mathcal{L} \psi| dm \leq \int \mathcal{L} |\psi| dm \leq \int |\psi| dm$$

Assim como no último capítulo, o último item da proposição 4.4.4 revela uma característica bastante importante sobre o operador de Perron-Frobënus: seus pontos fixos estão associados à medidas invariantes absolutamente contínuas. Para ilustrar a afirmação anterior, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 4.4.6. Considere a aplicação expansora definida no exemplo 4.3.2. Vamos avaliar o operador de transferência de f na função $\varphi = \chi_{[0,1]}$. Como vimos neste exemplo, temos $f(\eta_j) = [0, 1]$ e $|df|_{\eta_j}(x)| = 2^j$ para todo $x \in [0, 1]$ e $j \geq 1$. Logo, para todo $x \in [0, 1]$ temos:

$$(\mathcal{L} \varphi)(x) = \sum_{j \geq 1} \frac{\varphi(x)}{2^j} = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{2^j} = 1 = \varphi(x)$$

Em particular, $\mathcal{L} \varphi = \varphi$. Assim, a medida $\mu = \chi_{[0,1]} m = m$ é invariante e absolutamente contínua pela aplicação dada nesse exemplo (neste caso, é a própria medida de Lebesgue).

Isso não é um fato isolado e de fato, a estratégia para a demonstração do teorema 4.3.4 se baseia em obter um ponto fixo do operador, analisando a sequência de seus iterados. A seguinte proposição, consequência da desigualdade de Lasota-Yorke, expressa a seguinte estimativa sobre a variação dos iterados do operador de Perron-Frobënus.

Proposição 4.4.7. Para todo $n \geq 1$ e $\varphi \in \mathcal{BV}(I)$ vale a seguinte desigualdade:

$$\text{var}(\mathcal{L}^n \varphi) \leq (3\sigma)^n \text{var} \varphi + \tilde{K} \sum_{j=0}^{n-1} (3\sigma)^j \int |\varphi| dm \quad (4.16)$$

Onde $\tilde{K} := 3K_1 + \frac{2}{\delta}$

Demonstração. Vamos provar a desigualdade 4.16 por indução. O caso $n = 1$ segue como aplicação direta da desigualdade de Lasota-Yorke (proposição 4.4.3). Agora, suponha que 4.16 vale para $n > 1$. Então, aplicando a proposição 4.4.3 e a hipótese de indução, obtemos:

$$\begin{aligned}
\text{var}(\mathcal{L}^{n+1} \varphi) &= \text{var}(\mathcal{L}(\mathcal{L}^n \varphi)) \leq 3\sigma \text{var} \mathcal{L}^n \varphi + \tilde{K} \int |\mathcal{L}^n \varphi| dm \\
&\leq 3\sigma \text{var} \mathcal{L}^n \varphi + \tilde{K} \int |\varphi| dm && \text{(observação 4.4.5)} \\
&\leq 3\sigma \left((3\sigma)^n \text{var} \varphi + \tilde{K} \sum_{j=0}^{n-1} (3\sigma)^j \int |\varphi| dm \right) + \tilde{K} \int |\varphi| dm \\
&= (3\sigma)^{n+1} \text{var} \varphi + \tilde{K} \sum_{j=0}^n (3\sigma)^j \int |\varphi| dm
\end{aligned}$$

Isso conclui a prova da desigualdade por indução. □

4.5 Medidas invariantes absolutamente contínuas

Agora que já vimos as propriedades básicas das aplicações expansoras por partes e de seu operador de Perron-Frobënus, vamos estudar o problema de existência de medidas invariantes absolutamente contínuas para essa classe de aplicações nessa sessão. Assim como fizemos para provar a existência e unicidade de medidas invariantes absolutamente contínuas para aplicações expansoras, a ideia é transformar este problema em um problema de existência de pontos fixos para o operador de Perron-Frobënus, que de acordo com o item (iii) da proposição 4.4.4, são problemas que estão relacionados.

Dada uma aplicação expansora por partes $f : I \rightarrow I$ e denotando por $\mathcal{L} : L^1(m) \rightarrow L^1(m)$ o seu operador de Perron-Frobënus, seja $\varphi \in L^1(m)$ qualquer. Defina para cada $n \geq 1$ a função:

$$\mathcal{L}_n \varphi = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}^j \varphi \quad (4.17)$$

Dizemos que $(\mathcal{L}_n \varphi)_{n \geq 1}$ é a *sequência de médias de φ com respeito ao operador \mathcal{L}* ou simplesmente *sequência de médias de φ* .

Observação 4.5.1. Se $\varphi \in L^1(m)$, então pela observação 4.4.5, temos $\mathcal{L}_n \varphi \in L^1(m)$ para todo $n \geq 1$, pois:

$$\|\mathcal{L}_n \varphi\|_{L^1} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|\mathcal{L}^j \varphi\|_{L^1} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi\|_{L^1} = \|\varphi\|_{L^1}$$

O próximo lema diz que essa sequência está intimamente ligada a existência de pontos fixos para o operador de Perron-Frobënus:

Lema 4.5.2. Seja $f : I \rightarrow I$ uma aplicação expansora por partes no intervalo I e \mathcal{L} seu operador de Perron-Frobënus. Dada $\varphi \in L^1(m)$, se existe $\psi \in L^1(m)$ e uma subsequência $(\mathcal{L}_{n_k} \varphi)_{n_k}$ tal que $\|\mathcal{L}_{n_k} \varphi - \psi\|_{L^1} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ então ψ é um ponto fixo para o operador de Perron-Frobënus de f .

Demonstração. Como \mathcal{L} é um operador contínuo em $L^1(m)$ e $\|\mathcal{L}_{n_k} \varphi - \psi\|_{L^1}$ quando $k \rightarrow +\infty$ por hipótese, então:

$$\mathcal{L}\psi = \mathcal{L}\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_{n_k} \varphi\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(\mathcal{L}_{n_k} \varphi) \quad (4.18)$$

Onde a convergência é com respeito à norma L^1 . Além disso, pela linearidade de \mathcal{L} , para cada $k \geq 1$ podemos escrever:

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}_{n_k} \varphi) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{L}^j \varphi\right) = \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{L}^{j+1} \varphi = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathcal{L}^j \varphi$$

Portanto, temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{L}_{n_k} \varphi) - \mathcal{L}_{n_k} \varphi &= \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathcal{L}^j \varphi - \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \mathcal{L}^j \varphi \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} (\mathcal{L}^{j+1} \varphi - \mathcal{L}^j \varphi) \\ &= \frac{1}{n_k} (\mathcal{L}^{n_k} \varphi - \varphi) \end{aligned}$$

Pela observação 4.5.1, para cada $j \geq 1$ temos $\|\mathcal{L}^j \varphi\|_{L^1} \leq \|\varphi\|_{L^1}$. Logo, com respeito à norma L^1 obtemos:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(\mathcal{L}_{n_k} \varphi) - \psi\|_{L^1} &= \|\mathcal{L}(\mathcal{L}_{n_k} \varphi) - \mathcal{L}_{n_k} \varphi + \mathcal{L}_{n_k} \varphi - \psi\|_{L^1} \\ &\leq \frac{1}{n_k} \|\mathcal{L}^{n_k} \varphi - \varphi\|_{L^1} + \|\mathcal{L}_{n_k} \varphi - \psi\|_{L^1} \\ &\leq \frac{2}{n_k} \|\varphi\|_{L^1} + \|\mathcal{L}_{n_k} \varphi - \psi\|_{L^1} \end{aligned}$$

Onde na última desigualdade usamos que $\|\mathcal{L}^{n_k} \varphi - \varphi\|_{L^1} \leq 2\|\varphi\|_{L^1}$. Como estes últimos termos da desigualdade convergem a 0, então concluímos também que $\|\mathcal{L}(\mathcal{L}_{n_k} \varphi) - \psi\|_{L^1} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$. Em particular, segue da igualdade 4.18 que $\mathcal{L}\psi = \psi$ e assim, ψ é um ponto fixo do operador. \square

O lema anterior dá uma pista de como achar pontos fixos do operador de Perron-Frobënus: basta encontrar uma função integrável cuja sequência de médias definidas como em 4.17 tenha uma subsequência convergente com respeito à norma L^1 . O método que vamos seguir com o objetivo de encontrar uma função que satisfaça essa propriedade leva em consideração todas as ferramentas que desenvolvemos neste capítulo e funciona para aplicações expansoras por partes com taxa uniforme de expansão $\lambda > 3$. Para isso, usaremos todas as propriedades vistas até agora sobre funções de variação limitada e sua relação com o operador de Perron-Frobënus (vide a desigualdade de Lasota-Yorke). Uma primeira tentativa seria estimar a variação das médias de uma função de variação limitada e com esse propósito, o seguinte lema será útil:

Lema 4.5.3 (lema de cálculo). *Se $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência em \mathbb{R} tal que $a_n \rightarrow a$ quando $n \rightarrow +\infty$ então:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = a$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ tome $n_0 \geq 1$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Denotando por $M = \max\{|a_i - a|; i = 1, \dots, n\}$, obtemos para todo $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j - a \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (a_j - a) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n_0-1} (a_j - a) + \frac{1}{n} \sum_{j=n_0}^{n-1} (a_j - a) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n_0-1} |a_j - a| + \frac{1}{n} \sum_{j=n_0}^{n-1} |a_j - a| \\ &< \frac{n_0}{n} M + \frac{n - n_0}{n} \varepsilon \end{aligned}$$

Como $\frac{n_0}{n} M \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ e $\frac{n-n_0}{n} \leq 1$ para todo $n \geq n_0$, tomando $N \geq n_0$ de modo que $\frac{n_0}{n} M < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ segue que:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j - a \right| < 2\varepsilon$$

Isso prova o lema. □

A seguinte igualdade, que pode ser encontrada em qualquer livro de cálculo ou de análise, também será útil: Se $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 1$ então para todo $n \geq 1$ vale:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a^j = \frac{1 - a^n}{1 - a} \tag{4.19}$$

Proposição 4.5.4 (médias com variação uniformemente limitada). *Seja $f : I \rightarrow I$ uma aplicação expansora por partes com taxa uniforme de expansão $\lambda > 3$. Então, existe uma constante $C_0 > 0$ que satisfaz a seguinte propriedade: para toda $\varphi \in \mathcal{BV}(I)$ e $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$:*

$$\text{var } \mathcal{L}_n \varphi \leq \varepsilon + C_0 \|\varphi\|_{L^1}$$

$$\sup_{x \in I} |\mathcal{L}_n \varphi(x)| \leq \varepsilon + (C_0 + 1) \|\varphi\|_{L^1}$$

Em particular,

$$\limsup \text{var } \mathcal{L}_n \varphi \leq C_0 \|\varphi\|_{L^1}$$

$$\limsup \sup_{x \in I} |\mathcal{L}_n \varphi(x)| \leq (C_0 + 1) \|\varphi\|_{L^1}$$

Demonstração. Primeiramente, observe que pela propriedade (v1) da proposição 4.1.6, temos:

$$\text{var } \mathcal{L}_n \varphi \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{var } \mathcal{L}^j \varphi$$

Recordando a proposição 4.4.7, como $\varphi \in \mathcal{BV}(I)$ então para cada $j \geq 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathcal{L}^j \varphi) &\leq (3\sigma)^j \text{var } \varphi + \tilde{K} \|\varphi\|_{L^1} \sum_{i=0}^{j-1} (3\sigma)^i \\ &\leq (3\sigma)^j \text{var } \varphi + \frac{\tilde{K} \|\varphi\|_{L^1}}{1 - 3\sigma} (1 - (3\sigma)^j) \\ &\leq (3\sigma)^j \text{var } \varphi + \frac{\tilde{K} \|\varphi\|_{L^1}}{1 - 3\sigma} \end{aligned}$$

Onde a segunda e a última desigualdades foram obtidas como consequência de 4.19 e do fato de que $0 < 1 - (3\sigma)^j < 1$ para todo $j \geq 1$, respectivamente (pois estamos supondo que $\lambda > 3$). Logo, $\mathcal{L}_n \varphi$ é uma seqüência de funções que satisfaz para todo $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \text{var } \mathcal{L}_n \varphi &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \text{var}(\mathcal{L}^j \varphi) \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (3\sigma)^j \text{var } \varphi + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\tilde{K} \|\varphi\|_{L^1}}{1 - 3\sigma} \\ &= \frac{\text{var } \varphi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (3\sigma)^j + \frac{\tilde{K} \|\varphi\|_{L^1}}{1 - 3\sigma} \end{aligned}$$

Como estamos supondo que $\lambda > 3$ então $3\sigma < 1$ e portanto, $(3\sigma)^j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow +\infty$. Logo, pelo lema 4.5.3, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \geq 1$ de modo que para todo $n \geq n_0$ temos:

$$\frac{\text{var } \varphi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (3\sigma)^j < \varepsilon$$

Assim, obtemos a desigualdade desejada para todo $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \text{var } \mathcal{L}_n \varphi &\leq \frac{\text{var } \varphi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (3\sigma)^j + \frac{\tilde{K} \|\varphi\|_{L^1}}{1 - 3\sigma} \\ &< \varepsilon + C_0 \|\varphi\|_{L^1} \end{aligned}$$

Onde foi tomada a constante:

$$C_0 = \frac{\tilde{K}}{1 - 3\sigma}$$

Como consequência, pelo item (v3) da proposição 4.1.6 temos para todo $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in I} |\mathcal{L}_n \varphi(x)| &\leq \text{var } \mathcal{L}_n \varphi + \|\varphi\|_{L^1} \\
&< \varepsilon + C\|\varphi\|_{L^1} + \|\varphi\|_{L^1} \\
&= \varepsilon + (C_0 + 1)\|\varphi\|_{L^1}
\end{aligned}$$

Concluindo a prova da proposição. □

Finalmente estamos prontos para provar o teorema de existência, cuja ideia é a seguinte: obtendo uma sequência de médias de uma função de variação limitada com variação uniformemente limitada, pelo teorema de Helly podemos passar a uma subsequência convergente cujo limite será provado que é um ponto fixo do operador de Perron-Frobënus.

Teorema 4.5.5 (Existência de medidas invariantes absolutamente contínuas). *Se $f : I \rightarrow I$ é uma aplicação expansora por partes com taxa de expansão uniforme $\lambda > 3$ então existe uma medida de probabilidade μ invariante por f que é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue e com densidade de variação limitada.*

Demonstração. Fixada uma função de variação limitada $\varphi \in \mathcal{BV}(I)$ e positiva Lebesgue q.t.p. (como por exemplo, $\varphi = \chi_I$ a função característica de I), como consequência da proposição 4.5.4 a sequência de funções $(\mathcal{L}_n \varphi)_{n \geq 1}$ é uniformemente limitada com variação também uniformemente limitada. Logo, pelo teorema de Helly (teorema 4.2.1), existe uma subsequência $(\mathcal{L}_{n_k} \varphi)_{k \geq 1}$ e $\varphi_0 \in \mathcal{BV}(I)$ tal que $\|\mathcal{L}_{n_k} \varphi - \varphi_0\|_{L^1} \rightarrow 0$ e $\mathcal{L}_{n_k} \varphi(x) \rightarrow \varphi_0(x)$ quando $k \rightarrow +\infty$ lebesgue q.t.p. Além disso, $\varphi_0(x) > 0$ para $x \in I$ lebesgue quase todo ponto, pois $(\mathcal{L}_{n_k} \varphi)_{k \geq 1}$ é uma sequência de funções positivas. Pelo lema 4.5.2, a função φ_0 é um ponto fixo positivo do operador de Perron-Frobënus e logo, pelo item (iii) da proposição 4.4.4 a medida $\mu = \varphi_0 m$ é invariante por f e absolutamente contínua, concluindo assim a prova do teorema. □

Observe que no teorema anterior, a condição da taxa de expansão uniforme ser $\lambda > 3$ foi necessária, mas podemos obter exemplos de aplicações expansoras por partes com taxa de expansão menor e que ainda assim possuem medidas invariantes absolutamente contínuas, como foi o caso do exemplo 4.3.2.

Lema 4.5.6. *Seja $f : I \rightarrow I$ uma aplicação expansora por partes com taxa de expansão uniforme $\lambda > 3$. Se o operador de Perron-Frobënus de f possui um ponto fixo $\psi \in L^1(m)$ então existe $\varphi \in \mathcal{BV}(I)$ tal que $\varphi(x) = \psi(x)$ para $x \in I$ Lebesgue quase todo ponto.*

Demonstração. Seja $\psi \in L^1(m)$ um ponto fixo do operador de Perron-Frobënus (como nas hipóteses do lema). Pelo teorema 4.1.12 como o subespaço das funções contínuas de variação limitada é denso em $L^1(m)$ então existe uma sequência $(\psi_l)_{l \geq 1}$ tal que $\psi_l \in \mathcal{BV}(I)$ para todo $l \geq 1$ e $\|\psi_l - \psi\|_{L^1} \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow +\infty$. Em particular, existe $K > 0$ de modo que $\|\psi_l\|_{L^1} \leq K$ para todo $l \geq 1$. Pela proposição 4.5.4, dado $\varepsilon = 1$ para cada $l \geq 1$ existe $n_l \geq 1$ de modo que:

$$\text{var } \mathcal{L}_n \psi_l \leq 1 + C_0 \|\psi_l\|_{L^1} \text{ e } \sup_I |\mathcal{L}_n \psi_l| \leq 1 + \|\psi_l\|_{L^1} (C_0 + 1)$$

Para todo $n \geq n_l$. Como $\|\psi_l\|_{L^1} \leq K$ para todo $l \geq 1$ então:

$$\text{var } \mathcal{L}_n \psi_l \leq 1 + C_0 K \text{ e } \sup_I |\mathcal{L}_n \psi_l| \leq 1 + K(C_0 + 1)$$

Para todo $n \geq n_l$ e logo, aplicando o teorema de Helly em cada sequência $(\mathcal{L}_n \psi_l)_{n \geq n_l}$, obtemos para cada $l \geq 1$ uma subsequência $(n_l(k))_{k \geq 1}$ (que varia em função de k) e uma função $\varphi_l \in \mathcal{BV}(I)$ tal que $\|\mathcal{L}_{n_l(k)} \psi_l - \varphi_l\|_{L^1} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$. Mais ainda, o teorema de Helly também garante que $\text{var } \varphi_l \leq 1 + C_0 K$ e $\sup_I |\varphi_l| \leq 1 + K(C_0 + 1)$ para todo $l \geq 1$. Assim, aplicando o teorema de Helly mais uma vez à sequência $(\varphi_l)_{l \geq 1}$ obtemos uma subsequência $l_i \rightarrow +\infty$ e uma função $\varphi \in \mathcal{BV}(I)$ tal que $\|\varphi_{l_i} - \varphi\|_{L^1} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$.

Agora, afirmamos que $\varphi(x) = \psi(x)$ para $x \in I$ lebesgue q.t.p. De fato, como estamos supondo que $\mathcal{L} \psi = \psi$ então para todo $n \geq 1$:

$$\mathcal{L}_n \psi = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}^j \psi = \psi$$

Em particular, para cada $l \geq 1$ temos:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\mathcal{L}_{n_l(k)} \psi - \psi\|_{L^1} = 0$$

Assim, para cada $l \geq 1$ obtemos a desigualdade:

$$\begin{aligned} \|\varphi_l - \psi\|_{L^1} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{n_l(k)} \sum_{j=0}^{n_l(k)-1} \mathcal{L}^j \psi_l - \frac{1}{n_l(k)} \sum_{j=0}^{n_l(k)-1} \mathcal{L}^j \psi \right\|_{L^1} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{n_l(k)} \sum_{j=0}^{n_l(k)-1} \mathcal{L}^j (\psi_l - \psi) \right\|_{L^1} \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_l(k)} \sum_{j=0}^{n_l(k)-1} \|\mathcal{L}^j (\psi_l - \psi)\|_{L^1} \\ &\leq \|\psi_l - \psi\|_{L^1} \end{aligned}$$

Onde na última desigualdade foi usado o fato de que $\|\mathcal{L}^j (\psi_l - \psi)\|_{L^1} \leq \|\psi_l - \psi\|_{L^1}$. Portanto, como $\|\varphi_l - \psi\|_{L^1} \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow +\infty$ então:

$$\|\varphi - \psi\|_{L^1} \leq \lim_{i \rightarrow +\infty} \|\varphi - \varphi_{l_i}\|_{L^1} + \|\varphi_{l_i} - \psi\|_{L^1} = 0$$

A desigualdade acima mostra que $\|\varphi - \psi\|_{L^1} = 0$ e assim, concluímos que $\varphi(x) = \psi(x)$ para $x \in I$ lebesgue q.t.p. □

Teorema 4.5.7. *Seja $f : I \rightarrow I$ expansora por partes com taxa de expansão uniforme $\lambda > 3$. Então, toda medida invariante absolutamente contínua tem densidade de variação limitada. Ou seja, se $\mu = \psi m$ é invariante, então existe $\varphi \in \mathcal{BV}(I)$ tal que $\varphi(x) = \psi(x)$ para $x \in I$ lebesgue q.t.p.*

Demonstração. Se μ é uma medida invariante absolutamente contínua então pelo teorema de Radon-Nykodim existe uma única função $\psi \in L^1(m)$ tal que $\mu = \psi m$. Pelo item (iii) da proposição 4.4.4, φ é um ponto fixo do operador de Perron-Frobënius de f e portanto, pelo lema anterior existe $\varphi \in \mathcal{BV}(I)$ tal que $\varphi(x) = \psi(x)$ para $x \in I$ lebesgue q.t.p. Logo, $\mu = \varphi m$ tem densidade de variação limitada, como queríamos provar. □

Vamos concluir este capítulo observando novamente que, mesmo que seja possível garantir a existência na prova do teorema 4.3.4, nem sempre é possível garantir a unicidade, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 4.5.8. Considere a seguinte família de intervalos $\eta_j^1 = (2^{-1} + 2^{-j-1}, 2^{-1} + 2^{-j}]$, $\eta_j^2 = (2^{-j-1}, 2^{-j}]$ para cada $j \geq 1$ seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a aplicação expansora por partes do intervalo definida por $f(0) = 0$, $f(2^{-1}) = 0$ e:

$$f(x) = \begin{cases} 2^j x - 2^{j-1} & \text{se } x \in \eta_j^1 \\ 2^j x - 2^{-1} & \text{se } x \in \eta_j^2 \end{cases}$$

Então, esta aplicação admite duas medidas invariantes absolutamente contínuas μ_1 e μ_2 cujas densidades são respectivamente $\varphi_1 = \chi_{[0, 2^{-1}]}$ e $\varphi_2 = \chi_{[2^{-1}, 1]}$. Isto segue como consequência do fato de que ambas as funções são pontos fixos do operador de Perron-Frobënius de f , como é possível checar.

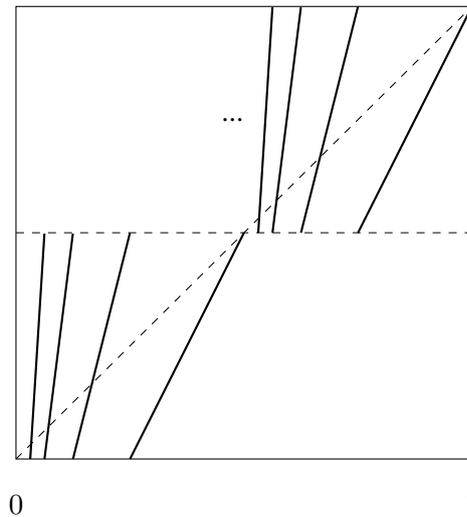


Figura 4.4: Exemplo de uma aplicação expansora por partes com mais de uma medida invariante absolutamente contínua

Mapas com pontos fixos neutrais

5.1 Introdução

Nos dois últimos capítulos, foi discutida a existência de medidas físicas para duas classes de aplicações distintas e vimos como o comportamento expansor-hiperbólico destes dois exemplos desenvolve um papel fundamental para garantir que elas sejam absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue. Em outras palavras, os dois exemplos estudados mostram como a dinâmica pode determinar o comportamento estatístico e como este pode ser tão complicado (ou aleatório) quanto o comportamento que a dinâmica apresenta. Vimos que as aplicações expansoras, por exemplo, são topologicamente misturadoras e de fato, é possível mostrar que são topologicamente conjugadas a um shift de dois símbolos.

No contexto deste trabalho, levando em conta a importância da hiperbolicidade para garantir medidas físicas absolutamente contínuas, uma pergunta natural a ser feita é se o comportamento estatístico de uma transformação que apresenta hiperbolicidade em um conjunto grande, mas não em todo espaço de fase, (junto com outras propriedades dinâmicas como ser topologicamente misturadora, por exemplo) continua sendo estocástico, isto é, aleatório. Mais especificamente, até que ponto podemos relaxar a condição de hiperbolicidade/expansão e ainda obter medidas físicas absolutamente contínuas? Procurando responder parcialmente esta pergunta, o exemplo que vamos exibir neste capítulo mostra que esta é uma questão delicada e que deve ser analisada com cuidado. Mais especificamente, vamos estudar a seguinte classe de aplicações:

Definição 5.1.1. Dizemos que uma aplicação $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é um **mapa com um ponto fixo neutro** se existe $c \in (0, 1)$ que satisfazem as seguintes propriedades:

- (i) f é crescente e de classe C^2 nos intervalos $[0, c]$ e $(c, 1]$, onde $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = 0$, $f^2(c) > c$ e existe o limite lateral $\lim_{x \rightarrow c^+} d^2 f(x)$.
- (ii) $df(0) = 1$, $d^2 f(0) > 0$ e $|df(x)| > 1$ para todo $x \neq 0$

Os mapas com pontos fixos neutrais apresentam um comportamento que difere dos exemplos estudados nos dois capítulos anteriores, onde havia expansão uniforme em todo ponto (ver figura 5.1). De fato, com exceção do ponto fixo na origem do intervalo $[0, 1]$, onde a derivada é igual a 1, a derivada de todos os outros pontos é maior do que 1, o que faz parecê-lo ser proeminentemente expansor ou quase hiperbólico. Por outro lado, podemos obter exemplos de mapas com pontos fixos neutrais cuja dinâmica é tão caótica quanto um shift de dois símbolos, como mostra o seguinte exemplo:

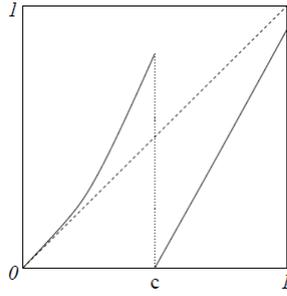


Figura 5.1: Mapa com um ponto fixo neutral na origem

Exemplo 5.1.2. O mapa $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \frac{3x^2}{2} + x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Então, é uma aplicação sobrejetora que satisfaz as hipóteses (i) e (ii) com entropia topológica positiva. Para ver que isso é verdade, vamos mostrar que a aplicação $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

é um fator de f , isto é, existe uma função $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $h(f(x)) = g(h(x))$ para todo $x \in [0, 1]$. Denotando por $d_j = 2^{-j}$ para cada $j \geq 1$ e $c_j = f_0^{-j}(1/2)$ a inversa de f restrita ao intervalo $[0, 1/2]$, denote por:

$$I_j = (c_{j+1}, c_j] \text{ e } L_j = (d_{j+1}, d_j]$$

Começando por um homeomorfismo linear crescente $h_0 : I_1 \rightarrow L_1$ (satisfazendo em particular $h_0(x) \rightarrow d_2$ quando $x \rightarrow c_2^+$ e $h_0(c_1) = d_1$), defina $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ por:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ g_0^{-j} h_0 f^j(x) & \text{se } x \in I_j \\ x & \text{se } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Então, h é uma aplicação contínua que satisfaz $h(f(x)) = g(h(x))$ para todo $x \in [0, 1]$. Em particular, como g é um mapa que tem entropia topológica positiva então f também tem entropia positiva.

Por mais que o comportamento dinâmico de alguns mapas com pontos fixos neutrais sejam tão caóticos quanto um shift de dois símbolos, os teoremas que vamos mostrar neste capítulo e serão enunciados a seguir mostram que o comportamento estatístico destes mapas difere completamente dos exemplos vistos nos capítulos anteriores. O próximo teorema mostra que uma das primeiras características marcantes desta classe de aplicações é a existência de uma medida invariante e absolutamente contínua que dá peso **infinito** ao ponto fixo neutro na origem.

Teorema 5.1.3. Se $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é um mapa com um ponto fixo neutral então existe uma medida μ do intervalo $[0, 1]$ que é f -invariante, σ -finita e absolutamente contínua com respeito à medida de

Lebesgue, mas que **não é finita**. Mais ainda, μ tem densidade de variação limitada, isto é, existe $\varphi \in \mathcal{BV}([0, 1])$ de tal modo que $\mu = \varphi m$.

Vale destacar que a hipótese de que vale $d^2 f(0) > 0$ é essencial para garantir que a medida obtida no teorema acima seja infinita. Outra característica marcante desta classe de aplicações que o seguinte teorema exhibe é o fato de que estes mapas, ao contrário das aplicações expansoras por exemplo, são completamente determinísticos do ponto de vista da estatística: com excessão de um conjunto de medida Lebesgue nula, o tempo que uma órbita típica passa longe do ponto fixo na origem é em média, desprezível.

Teorema 5.1.4. *Se $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é um mapa com ponto fixo neutral e p denota a origem do intervalo $[0, 1]$ então a delta de Dirac δ_p com suporte em p é uma medida física de f . Em particular, para toda função contínua $\varphi \in C^0(M)$ e $x \in [0, 1]$ m-q.t.p. temos:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \varphi(0)$$

O teorema anterior será provado usando a medida infinita μ obtida no teorema 5.1.3 e como consequência, vamos mostrar que um mapa com ponto fixo neutral não pode admitir medidas invariantes e absolutamente contínuas e ergódicas. Outra consequência importante deste teorema mostra que com excessão de um conjunto de medida de Lebesgue nula, seus expoentes de Lyapunov são nulos, isto é, para $x \in [0, 1]$ m-q.t.p temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |df^n(x)| = 0$$

Ou seja, diferente das aplicações expansoras, o comportamento de órbitas típicas de um mapa com ponto fixo neutral não é hiperbólico, por mais que seu comportamento dinâmico aparente ser expansor no seu espaço de fase. Para se convencer de alguns dos resultados anteriores sobre o comportamento estatístico, convidamos o leitor a pegar um lápis e papel, desenhar a figura 5.1 e observar o comportamento típico de algumas órbitas.

5.2 Propriedades elementares

Nesta sessão, vamos introduzir algumas propriedades elementares dos mapas com pontos fixos neutros e exibir as ideias principais para a demonstração dos teoremas enunciados na sessão anterior. Vamos começar com algumas propriedades básicas que descrevem o comportamento típico de uma órbita qualquer de um ponto do intervalo. Dado um mapa com ponto fixo neutral f e denotando por $c = c_1$ como na definição 5.1.1, denote por $\xi_0 = [0, c_1]$, $\xi_1 = (c_1, 1]$ e $f_0 = f|_{\xi_0}$, $f_1 = f|_{\xi_1}$ as restrições de f a cada um destes intervalos. Observe que cada restrição é um difeomorfismo de classe C^2 na imagem de ξ_i , $i = 0, 1$. Em particular, podemos definir a sequência de pontos do intervalo $c_{j+1} = f_0^{-1}(c_j)$ para cada $j \geq 1$.

Proposição 5.2.1. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ um mapa com ponto fixo neutral e denote por $c = c_1$, como na definição 5.1.1. Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- a) *f possui no máximo dois pontos fixos, incluindo a origem. Mais especificamente, f não possui pontos fixos em ξ_0 diferentes da origem e se f possui um ponto fixo $p \in \xi_1$ então $p = 1$.*

b) $f(c_1) > c_1$ e $f^2(c_1) < f(c_1)$

c) $c_{j+1} < c_j$ para todo $j \geq 1$. Em particular, $c_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Para provar o item a), suponha por absurdo que exista algum ponto fixo $p \in \xi_0$ com $p \neq 0$ e considere a função $g(x) = f(x) - x$ onde $x \in \xi_0$. Como $g(0) = 0$ e $g(p) = p$, então aplicando o teorema de Rolle, deve existir um ponto $q \in (0, p)$ tal que $df(q) = 1$, o que contradiz a hipótese de que $|df(x)| > 1$ para todo $x \neq 0$. Logo, f não possui pontos fixos em ξ_0 .

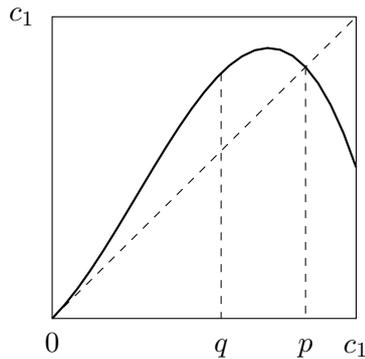


Figura 5.2: Ideia da prova do item a)

Agora, suponha por absurdo que exista um ponto fixo $p \in \xi_1$ com $p \neq 1$. Então, um argumento semelhante ao do parágrafo anterior mostra que $f(1) < 1$. Aplicando o teorema do valor intermediário no intervalo $(p, 1)$ obtemos um ponto fixo $q \in (p, 1)$ distinto de p e assim, argumento semelhante garante a existência de um ponto $t \in (p, q)$ com $df(t) = 1$, como mostra a figura abaixo. Isso novamente contradiz a hipótese inicial.

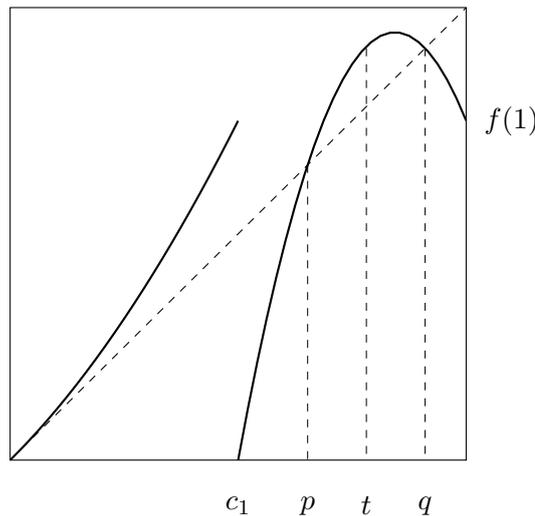


Figura 5.3: Ideia da prova do item a)

O item b) se demonstra observando que caso $f(c_1) \leq c_1$ ou $f^2(c_1) \geq f(c_1)$ então garantimos a existência de pontos fixos em ξ_0 e ξ_1 , o que contradiz o item a)(veja figura 5.2). Finalmente, para provar o item c), basta observar que f_0^{-1} é um difeomorfismo crescente e que $c_2 = f_0^{-1}(c_1) < c_1$. Assim, indutivamente obtemos $c_{j+1} = f_0^{-1}(c_j) < c_j$ para todo $j \geq 1$. \square

Como consequência da proposição anterior, o intervalo $I_* = [0, f(c_1)]$ é invariante por f , ou seja, $f(I_*) \subset I_*$ e além disso, denotando por $\eta_0 = (c_1, f(c_1)]$, a proposição anterior também nos motiva a definir a seguinte sequência de intervalos em I_* :

$$\eta_j = (c_{j+1}, c_j] \text{ para todo } j \geq 1$$

Pelo item c) da última proposição, estes intervalos são não-degenerados e disjuntos. Mais ainda, como f_0 é um difeomorfismo crescente, então $c_j < f(x) < c_{j-1}$ sempre que $c_{j+1} < x < c_j$. Isso mostra que o intervalo η_j é exatamente o conjunto dos pontos do intervalo $\xi_0 = [0, c_1]$ que precisam ser iterados exatamente j vezes pela f para chegar ao intervalo $\eta_0 = (c_1, f(c_1)]$, como mostra a figura abaixo:

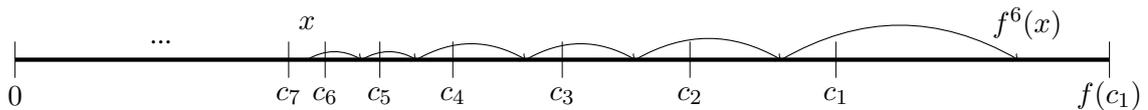


Figura 5.4: O ponto x que pertence ao intervalo η_6 leva 6 iterados para chegar ao intervalo $[c_1, f(c_1)]$

Para o estudo do comportamento estatístico de um mapa com ponto fixo neutral, será necessário (como veremos nas sessões posteriores) estudar os retornos de uma órbita típica ao intervalo η_0 . Com este objetivo, para cada mapa com ponto fixo neutral f podemos associar uma segunda aplicação $\hat{f} : I_* \rightarrow I_*$ definida por:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \xi_1 \\ f^j(x) & \text{se } x \in \eta_j \text{ para algum } j \geq 1 \end{cases}$$

O papel deste mapa é semelhante a de uma aplicação de primeiro retorno ao intervalo η_0 de f e a partir dele, podemos determinar algumas propriedades ergódicas do mapa com ponto fixo neutral original f conhecendo as propriedades ergódicas de \hat{f} , que serão deduzidas na próxima sessão.

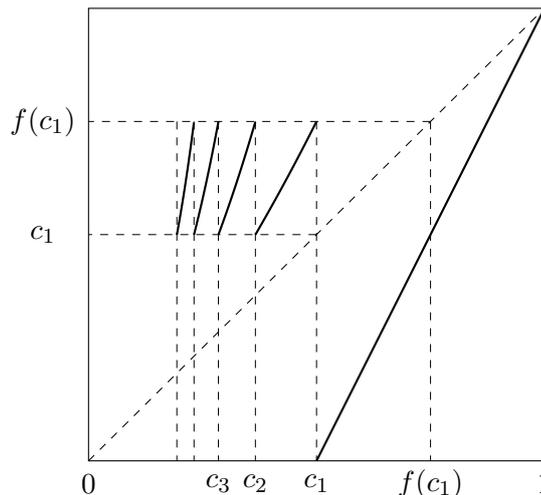


Figura 5.5: Exemplo de uma \hat{f} para um mapa com ponto fixo neutral

Definição 5.2.2. Dizemos que uma aplicação $f : I \rightarrow I$ é **topologicamente exata** se para todo intervalo aberto $J \subset I$ não-vazio existe $N \geq 1$ tal que $f^N(J) = I$.

Observação 5.2.3. Na prova do próximo lema, a hipótese de que os mapas com pontos fixos neutrais satisfazem $f^2(c_1) > c_1$ aparece para garantir que a aplicação \hat{f} definida acima seja topologicamente exata. Caso contrário, obtemos que \hat{f}^2 seja topologicamente exata apenas no intervalo $(0, c_1)$. Como esta propriedade será fundamental para os argumentos a serem usados nas sessões posteriores, incluímos a hipótese adicional de $f^2(c_1) > c_1$ na definição 5.1.1, mesmo que na literatura esta condição não apareça (veja a sessão 3.5 em [Via97]) por exemplo).

Lema 5.2.4. a aplicação $\hat{f} : I_* \rightarrow I_*$ é topologicamente exata.

Demonstração. Suponha primeiramente que $J \subset I_*$ seja um intervalo aberto não-vazio tal que $c_1 \in J$. Seja $\varepsilon_1 > 0$ satisfazendo $J \supset (c_1, c_1 + \varepsilon_1)$. Como estamos supondo que $f(c_1^+) = 0$, então existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $\hat{f}(J) = f(J) \supset (0, \varepsilon_2)$. Observe que $c_j \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow +\infty$. Logo, existe um intervalo η_j tal que $\hat{f}(J) \supset \eta_j$. Segue também da definição de \hat{f} que $\hat{f}(\eta_j) = (c_1, f(c_1)]$, pois $\hat{f}|_{\eta_j} = f^j|_{\eta_j}$. Portanto:

$$\hat{f}^2(J) \supset \hat{f}(\eta_j) = (c_1, f(c_1)] \implies \hat{f}^3(J) \supset (0, f^2(c_1)]$$

Como estamos supondo que $f^2(c_1) > c_1$, então $\hat{f}^3(J) \supset (0, c_1] \cup (c_1, f^2(c_1)]$. Pelo mesmo argumento, como $(0, c_1] \subset \hat{f}^3(J)$, aplicando \hat{f} duas vezes a este intervalo obtemos de forma semelhante que $\hat{f}^5(J) \supset (0, f^2(c_1)]$. Vamos denotar por $L = (c_1, f^2(c_1)]$ e seja $\varepsilon_3 > 0$ de modo que $L \supset (c_1, c_1 + \varepsilon_3)$. Então, os mesmos argumentos anteriores nos dão:

$$\hat{f}^2(L) \supset (c_1, f(c_1)]$$

Como $\hat{f}^5(J) \supset \hat{f}^2(L)$, então concluímos que:

$$\hat{f}^5(J) \supset (0, f^2(c_1)] \cup (c_1, f(c_1)] = I_*$$

Agora, seja $J \subset I_*$ um intervalo não-vazio qualquer. Então, existe um iterado $N \geq 1$ e $j \geq 1$ tal que $c_j \in \hat{f}^N(J)$. De fato, pela propriedade (ii), como $|df(x)| > 1$ para todo $x \neq 0$, então $f|_{\eta_j}$ expande η_j para cada $j \geq 1$. Logo, caso $\hat{f}^N(J) \subset \eta_j$ para todo $j \geq 1$, então $m(\hat{f}^N(J)) \rightarrow +\infty$ quando $N \rightarrow +\infty$, o que é absurdo. Seja $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\hat{f}^N(J) \supset (c_j, c_j + \varepsilon_1)$ e $(c_j, c_j + \varepsilon_1) \subset \eta_{j-1}$. Então, para algum $\varepsilon_2 > 0$:

$$\hat{f}(c_j, c_j + \varepsilon_1) = (c_1, c_1 + \varepsilon_2) \subset \hat{f}^{N+1}(J)$$

Finalmente, aplicando o resultado anterior ao iterado $\hat{f}^{N+1}(J) = \tilde{J}$, obtemos:

$$\hat{f}^{N+6}(J) \supset I_*$$

Como $J \subset I$ foi um intervalo não-vazio arbitrário, segue que \hat{f} é topologicamente exata neste caso. \square

Vamos terminar esta sessão investigando uma propriedade bastante particular destes mapas que será crucial para o desenvolvimento das ideias presentes neste capítulo. Sabendo que a sequência de números c_j definida no intervalo $[0, 1]$ converge a zero quando $j \rightarrow +\infty$, por construção, gostaríamos de obter mais informações a respeito da velocidade de convergência desta sequência. Mais especificamente, queremos

estudar se esta convergência é do tipo **exponencial**, isto é, se existem constantes $\alpha > 0$ e $\beta \in (0, 1)$ tais que:

$$c_j \leq \alpha \beta^j \text{ para todo } j \geq 1$$

Ou se ela é do tipo **polinomial**, ou seja, se existem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que:

$$c_j \geq \alpha j^{-\beta} \text{ para todo } j \geq 1$$

O seguinte exemplo mostra um caso de uma aplicação do intervalo para a qual a sequência c_j converge para zero exponencialmente rápido.

Exemplo 5.2.5. Considere o mapa $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definido por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \in [0, 1/2] \\ 2x - 1 & \text{se } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Definindo $c_1 = 1/2$, obtemos de maneira análoga que $c_j = 2^{-j}$ para todo $j \geq 1$. Em particular, a sequência c_j converge com velocidade exponencial para 0.

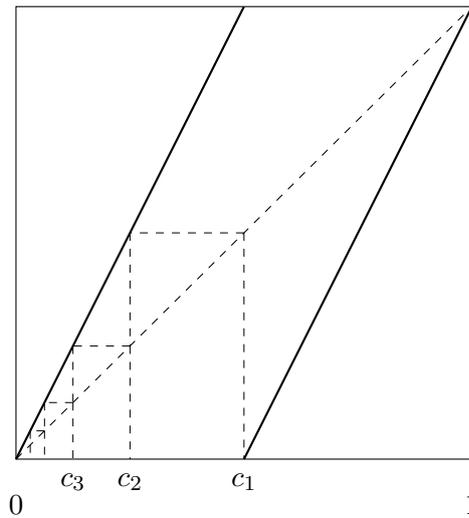


Figura 5.6: Um mapa do intervalo, que não é um mapa com ponto fixo neutro, onde a convergência da sequência c_j é exponencial.

A seguinte proposição garante que os mapas com pontos fixos neutrais não apresentam o mesmo comportamento que o exemplo anterior e de fato, mostra que a velocidade de convergência da sequência c_j é muito mais lenta:

Proposição 5.2.6. A convergência da sequência c_j é polinomial, ou seja, existe uma constante $\alpha_0 > 0$ tal que $c_j \geq \frac{\alpha_0}{j}$ para todo $j \geq 1$.

A hipótese de que o ponto fixo na origem é **neutro**, isto é, $df(0) = 1$ e $df^2(0) > 0$, é o fato crucial que garante a prova da proposição acima e distingue os mapas com pontos fixos neutrais de aplicações como a exibida no exemplo anterior. Antes de provar esta proposição, vamos provar o seguinte lema:

Lema 5.2.7. Existe uma constante $\alpha > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo: $c_{j+1} \geq c_j - \alpha c_j^2$ para todo $j \geq k$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ de modo que $\varepsilon < d^2 f(0)$, como f é de classe C^2 então pela série de Taylor de f na origem, existe $\delta > 0$ de modo que para todo $x \in (0, \delta)$ vale:

$$f(x) = f(0) + df(0)x + \frac{d^2 f(0)}{2}x^2 + r(x) = x + ax^2 + r(x)$$

Onde $a = df^2(0)/2$ e $|r(x)| \leq \varepsilon x^2$ para todo $x \in (0, \delta)$. Observe que na igualdade acima foi usado o fato de f ser um mapa com ponto fixo neutral, isto é, $f(0) = 0$ e $df(0) = 1$. Agora, como $c_j \rightarrow 0$ quando $j \geq 1$ então podemos tomar $k \geq 1$ de modo que $c_j \in (0, \delta)$ para todo $j \geq k$. Logo, para todo $j \geq k$ temos:

$$f(c_{j+1}) = c_j = c_{j+1} + ac_{j+1}^2 + r(c_{j+1})$$

Em particular, rearranjando os termos e usando que $|r(c_{j+1})| \leq \varepsilon c_{j+1}^2$ obtemos:

$$\begin{aligned} c_{j+1} &= c_j - ac_{j+1}^2 - r(c_{j+1}) \\ &> c_j - ac_{j+1}^2 - \varepsilon c_{j+1}^2 \\ &> c_j - ac_j^2 - \varepsilon c_j^2 \\ &= c_j - (a + \varepsilon)c_j^2 \end{aligned}$$

Onde na penúltima desigualdade foi usado o fato de que $c_j > c_{j+1}$ para todo $j \geq 1$. Assim, basta tomar $\alpha = (a + \varepsilon)$ para terminar a demonstração. \square

Prova da proposição 5.2.6. Sejam $\alpha > 0$ e $k \geq 1$ suficientemente grande, satisfazendo o lema anterior e $c_j < \frac{1}{2\alpha}$ para todo $j \geq k$. Tome $\alpha_0 := \min\{lc_l, \frac{1}{2\alpha}; l = 1, \dots, k\}$. Então, é claro pela definição de α_0 que:

$$c_j \geq \frac{\alpha_0}{j} \text{ para cada } 1 \leq j \leq k \quad (5.1)$$

Além disso, suponha que 5.1 vale para algum $j \geq k$. Como estamos supondo que $\alpha_0 \leq \frac{1}{2\alpha}$, então vale a seguinte desigualdade para todo $j \geq 1$:

$$\alpha\alpha_0 < \frac{1}{2} < \frac{j}{j+1}$$

Logo, rearranjando os termos acima, e multiplicando por $-1/j^2$ obtemos:

$$\frac{j - \alpha\alpha_0(j+1)}{j^2} > 0 \quad (5.2)$$

Observe também que se a desigualdade 5.1 é verdadeira para algum $j \geq k$ então:

$$c_j - \alpha c_j^2 \geq \frac{\alpha_0}{j} - \frac{\alpha\alpha_0^2}{j^2} \quad (5.3)$$

Para ver que isto é verdade, basta observar que a função $g(x) = x - \alpha x^2$ satisfaz $dg(x) > 0$ sempre que $x < 1/2\alpha$. Em particular, g é uma função crescente em $(0, 1/2\alpha)$. Logo, se $c_j < 1/2\alpha$ e c_j satisfaz a desigualdade 5.1 então:

$$g(c_j) = c_j - \alpha c_j^2 \geq g\left(\frac{\alpha_0}{j}\right) = \frac{\alpha_0}{j} - \frac{\alpha \alpha_0^2}{j^2}$$

Com estas observações anteriores, vamos provar por indução que a desigualdade 5.1 vale também para todo $j \geq k$. De fato, supondo que seja verdade para algum $j \geq k$, então usando a desigualdade 5.3 obtemos:

$$\begin{aligned} c_{j+1} &\geq c_j - \alpha c_j^2 \geq \frac{\alpha_0}{j} - \frac{\alpha \alpha_0^2}{j^2} \\ &= \frac{\alpha_0 j(j+1)}{j^2(j+1)} - \frac{\alpha \alpha_0^2(j+1)}{j^2(j+1)} \\ &= \frac{\alpha_0}{j+1} \cdot \frac{1}{j^2} (j(j+1) - \alpha \alpha_0^2(j+1)) \\ &= \frac{\alpha_0}{j+1} \left(1 + \frac{j - \alpha \alpha_0(j+1)}{j^2}\right) \\ &\geq \frac{\alpha_0}{j+1} \end{aligned}$$

Onde na penúltima desigualdade foi usado 5.2. Portanto, por hipótese de indução, segue que $c_j \geq \frac{\alpha_0}{j}$ para todo $j \geq 1$. \square

5.3 Propriedades de distorção

Nesta sessão, vamos estudar algumas propriedades de distorção que um mapa com ponto fixo neutral apresenta e ver que a aplicação \hat{f} definida na sessão anterior é de fato, uma aplicação expansora por partes do intervalo, cujos ramos de monotonicidade são exatamente os intervalos η_j , como na figura 5.2. Antes de investigar essas propriedades mais a fundo, vamos provar a seguinte propriedade elementar sobre mapas com pontos fixos neutrais:

Lema 5.3.1. *Existe uma constante $K_0 > 0$ de tal modo que para todo $x \in I_*$ vale a desigualdade:*

$$|d(\log df(x))| \leq K_0$$

Em particular, $\log df$ é Lipschitz em cada intervalo η_j com constante de Lipschitz K_0 , isto é, para todo $x, y \in \eta_j$ e $j \geq 1$ temos:

$$|\log df(x) - \log df(y)| \leq K_0 |x - y|$$

Demonstração. Observe primeiramente que para cada $x \in I_*$ temos:

$$|d(\log df(x))| = \frac{|d^2 f(x)|}{|df(x)|}$$

Assim, basta provar que a expressão à direita é limitada por alguma constante positiva para provar o lema. Pelo item (i) da definição 5.1.1 temos que $|df(x)| \geq 1$ para todo $x \in I_*$. Além disso, como o item (ii) garante que o limite lateral $\lim_{x \rightarrow c^+} d^2 f(x)$ existe e f é de classe C^2 restrita aos intervalos $\xi_0 = [0, c_1]$, $\eta_0 = (c_1, f(c_1)]$ então segue que existe $K_0 > 0$ tal que $|d^2 f(x)| \leq K_0$ para todo $x \in I_*$. Portanto,

$$|d(\log df(x))| = \frac{|d^2 f(x)|}{|df(x)|} \leq |d^2 f(x)| \leq K_0$$

Como queríamos provar. A última afirmação do lema segue do fato de que $\log df$ é de classe C^1 em cada intervalo η_j . \square

A próxima proposição é bastante importante pois garante que a razão entre as derivadas dos iterados de dois pontos que pertencem ao mesmo intervalo η_j sempre fica limitada superior e inferiormente por uma constante positiva que só depende de f .

Proposição 5.3.2 (Distorção limitada). *Existe uma constante $K_1 > 0$ tal que para todo $j \geq 1$ e $x, y \in \eta_j$ satisfaz:*

$$\frac{1}{K_1} \leq \frac{df^j(x)}{df^j(y)} \leq K_1$$

Demonstração. Pelo lema 5.3.1, temos que $\log df$ é uma aplicação de Lipschitz em cada η_j com constante de Lipschitz $K_0 > 0$. Logo, como temos $f^i(x) \in \eta_{j-i}$ para todo $j \geq 1$ e $i = 0, 1, \dots, j-1$ e $x \in \eta_j$, segue que:

$$\sum_{i=0}^{j-1} |f^i(x) - f^i(y)| \leq \sum_{i=0}^{j-1} m(\eta_j) \leq m(I_*) \leq 1$$

Pela regra da cadeia, para cada $x \in \eta_j$ e $j \geq 1$ vale a seguinte igualdade:

$$df^j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} df(f^i(x))$$

Portanto, usando as observações anteriores obtemos:

$$\begin{aligned} |\log df^j(x) - \log df^j(y)| &= \left| \log \prod_{i=0}^{j-1} df(f^i(x)) - \log \prod_{i=0}^{j-1} df(f^i(y)) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{j-1} \log df(f^i(x)) - \log df(f^i(y)) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{j-1} |\log df(f^i(x)) - \log df(f^i(y))| \\ &\leq K_0 \sum_{i=0}^{j-1} |f^i(x) - f^i(y)| \\ &\leq K_0 \end{aligned}$$

Concluindo que f tem distorção limitada em cada intervalo η_j , ou seja:

$$-K_0 \leq \log \frac{df^j(x)}{df^j(y)} \leq K_0$$

\square

Agora, vamos provar que a aplicação \hat{f} associada ao mapa com ponto fixo neutral f é uma aplicação expansora por partes do intervalo cujos intervalos de monotonicidade são os intervalos η_j . Antes, o seguinte lema será útil:

Lema 5.3.3. *Existe uma constante $K_2 > 0$ de tal modo que para todo $j \geq 1$ e pontos $x_1 \in \eta_1, \dots, x_j \in \eta_j$ vale:*

$$\sum_{l=1}^j \frac{1}{|df^l(x_l)|} \leq K_2$$

Demonstração. Sejam $x_1 \in \eta_1, \dots, x_j \in \eta_j$ como no enunciado. Pelo lema de distorção:

$$df^l(x) \leq df^l(x_l) \cdot K_1 \text{ para todo } x \in \eta_l \text{ e } l = 1, \dots, j$$

Mais ainda, pelo teorema de mudança de variáveis, temos que para cada $l = 1, \dots, j$:

$$m(f^l(\eta_l)) = \int_{\eta_l} |df^l| dm \leq |df^l(x_l)| \cdot K_1 m(\eta_l)$$

Portanto, como $m(f^l(\eta_l)) = m((c, f(c))) = f(c) - c > 0$, então somando cada um dos termos $l \geq 1$ da desigualdade, concluímos que:

$$\sum_{l=1}^j \frac{1}{|df^l(x_l)|} \leq \frac{K_1}{f(c) - c} \sum_{l=1}^j m(\eta_l) \leq \frac{K_1}{f(c) - c} =: K_2$$

□

Teorema 5.3.4. *A aplicação \hat{f} é uma aplicação expansora por partes do intervalo, ou seja, \hat{f} satisfaz a definição 4.3.1.*

Demonstração. Devemos mostrar que \hat{f} satisfaz as condições a), b) e c) da definição 4.3.1, com respeito a família de intervalos η_j com $j \geq 0$. Para checar que \hat{f} satisfaz a condição a), considere:

$$\lambda = \inf_{x \in \eta_1 \cup \eta_0} |df(x)|$$

Então, λ é uma constante de expansão para \hat{f} . Além disso, como por definição é verdade que $\hat{f}(\eta_j) = \eta_0 = (c_1, f(c_1))$ para todo $j \geq 1$, tomando $\delta = m(\eta_0)$ obtemos que $m(\hat{f}(\eta_j)) = \delta$ para todo $j \geq 1$ e $m(\hat{f}(\eta_0)) = m(f(\eta_0)) = m([0, f^2(c_1)]) > 0$. Isso mostra que a aplicação \hat{f} também satisfaz a condição c). Com todas estas observações, falta apenas provar que \hat{f} satisfaz b). Para isso, é suficiente mostrar que existe uma constante $K_3 > 0$ tal que:

$$\frac{|d^2 \hat{f}(x)|}{|d\hat{f}(x)|^2} \leq K_3 \text{ para todo } x \in I_*$$

Como \hat{f} coincide com f quando restrita ao intervalo η_0 então a desigualdade acima é válida para todo ponto $x \in \eta_0$ pelo lema 5.3.1. Agora, suponha que $x \in \eta_j$ onde $j \geq 1$. Por definição, como $f^j(x) = \hat{f}(x)$, então $d(\log d\hat{f})(x) = d(\log df^j)(x)$. Pela regra da cadeia, temos também a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned}
d^2 f^j(x) &= d\left(\prod_{i=0}^{j-1} df(f^i(x))\right) \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} \prod_{i \neq k}^{j-1} d^2 f(f^k(x)) df^k(x) df(f^i(x))
\end{aligned}$$

Logo, usando as igualdades anteriores e $df^j(x) = \prod_{i=0}^{j-1} df(f^i(x))$, obtemos:

$$d(\log df^j)(x) = \frac{d^2 f^j(x)}{df^j(x)} = \sum_{i=0}^{j-1} \frac{d^2 f(f^i(x))}{df(f^i(x))} \cdot df^i(x) = d(\log d\hat{f})(x) \quad (5.4)$$

Além disso, como $df^j(x) = df^{j-i}(f^i(x)) \cdot df^i(x)$ para todo $i = 0, 1, \dots, j-1$, então:

$$\frac{df^i(x)}{df^j(x)} = \frac{1}{df^{j-i}(f^i(x))} \text{ para cada } i = 0, 1, \dots, j-1 \quad (5.5)$$

Finalmente, juntando essas observações com os lemas 5.3.1 e 5.3.3, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \hat{f}}{(d\hat{f})^2}(x) &= \frac{1}{d\hat{f}(x)} \cdot d(\log d\hat{f})(x) \\
&= \frac{1}{d\hat{f}(x)} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{d^2 f(f^i(x))}{df(f^i(x))} \cdot df^i(x) && \text{(por 5.4)} \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} \frac{d^2 f(f^i(x))}{df(f^i(x))} \frac{df^i(x)}{df^j(x)} \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} \frac{d^2 f(f^i(x))}{df(f^i(x))} \frac{1}{df^{j-i}(f^i(x))} && \text{(por 5.5)} \\
&\leq K_0 K_2
\end{aligned}$$

Assim, tomando $K_3 = K_0 K_2$, obtemos o resultado desejado. □

5.4 Medidas invariantes absolutamente contínuas

A partir das propriedades estabelecidas nas duas sessões anteriores, nesta sessão vamos estudar as propriedades ergódicas da aplicação \hat{f} associada a um mapa com ponto fixo neutral f com o objetivo de provar o primeiro teorema enunciado neste capítulo (teorema 5.1.3). Como provamos na sessão anterior, o mapa \hat{f} é uma aplicação expansora por partes do intervalo e logo, é possível usar todas as ferramentas desenvolvidas no último capítulo para deduzir suas propriedades ergódicas. Com efeito, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 5.4.1. *Existe uma única probabilidade $\hat{\mu}$ que é \hat{f} -invariante, absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue com densidade de variação limitada, ou seja, existe $\hat{\varphi} \in \mathcal{BV}(I)$ tal que $\hat{\mu} = \hat{\varphi}m$. Em particular, $\hat{\mu}$ é ergódica.*

Usando a medida garantida pelo teorema anterior, vamos provar o teorema 5.1.3 construindo explicitamente uma medida σ -finita, f -invariante e absolutamente contínua mas que não é finita.

Prova do teorema 5.4.1

Para mostrar a existência da medida $\hat{\mu}$ enunciado no teorema 5.4.1, vamos usar o teorema 4.3.4 provado no último capítulo sobre existência de medidas invariantes absolutamente contínuas para aplicações expansoras por partes do intervalo. O próximo lema é consequência imediata deste teorema, desde que a taxa de expansão de \hat{f} seja suficientemente grande.

Lema 5.4.2. *Seja $\lambda > 1$ a taxa de expansão de \hat{f} e suponha que $\lambda > 3$. Então, existe uma probabilidade $\hat{\mu}$ que é \hat{f} -invariante, absolutamente contínua e com densidade de variação limitada, isto é, existe $\hat{\varphi} \in \mathcal{BV}([0, 1])$ tal que $\hat{\mu} = \hat{\varphi}m$.*

Por outro lado, a situação se complica quando a taxa de expansão de \hat{f} apenas satisfaz $1 < \lambda \leq 3$. Neste caso, a ideia é substituir a aplicação \hat{f} original por uma segunda aplicação expansora por partes \hat{h} de modo que sua taxa de expansão seja suficientemente grande e aplicar novamente o teorema 4.3.4. Vamos explicar como faremos isso: tomando $N \geq 1$ de modo que $\lambda^N > 3$ defina a aplicação $\hat{h} = (\hat{f})^N$.

Lema 5.4.3. *A aplicação \hat{h} é uma aplicação expansora por partes do intervalo cuja taxa de expansão satisfaz $\hat{\lambda} = \lambda^N > 3$.*

Demonstração. Observe que para todo $x \in I_*$ a derivada de \hat{h} satisfaz:

$$|d\hat{h}(x)| = \left| \prod_{i=0}^{N-1} d\hat{f} \circ \hat{f}^i \right| \geq \lambda^N$$

Logo, \hat{h} satisfaz o item a) na definição 4.3.1. Para checar que \hat{h} também satisfaz a condição b), usando que \hat{f} é uma aplicação expansora por partes do intervalo, obtemos a seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \frac{|d^2\hat{h}|}{|d\hat{h}|^2}(x) &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \frac{d^2\hat{f}}{d\hat{f}}(\hat{f}^i(x)) \cdot \frac{1}{d\hat{f}^{N-i}(\hat{f}^i(x))} \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \frac{d^2\hat{f}}{(d\hat{f})^2}(\hat{f}^i(x)) \cdot \frac{1}{d\hat{f}^{N-1-i}(\hat{f}^{i+1}(x))} \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{d^2\hat{f}}{(d\hat{f})^2}(\hat{f}^i(x)) \right| \cdot \left| \frac{1}{d\hat{f}^{N-1-i}(\hat{f}^{i+1}(x))} \right| \\ &\leq K_1 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda^{N-i-1}} \\ &\leq K_1 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^{N-i-1}} \text{ para todo } x \in I \end{aligned}$$

Onde na penúltima desigualdade foi usado o fato de que \hat{f} é expansora por partes. Em particular, \hat{h} também satisfaz a condição b). Para concluir a prova do lema, observe que se η é um intervalo de monotonicidade de \hat{h} então os pontos do bordo de $\hat{h}(\eta)$ pertencem ao seguinte conjunto:

$$\bigcup_{i=1}^N \hat{f}^i(\{0, \dots, c_2, c_1, f(c_1)\}) = \bigcup_{i=1}^N \hat{f}^{i-1}(\{0, c_1, f(c_1), f^2(c_1)\})$$

Logo, as famílias de todas as imagens $\hat{h}(\eta)$ de intervalos de monotonicidade é finita, o que também prova c). \square

A partir do lema anterior e aplicando o teorema 4.3.4, concluímos que existe uma probabilidade $\tilde{\mu}$ que é \hat{h} -invariante e absolutamente contínua, cuja densidade é uma função de variação limitada, isto é, existe $\tilde{\varphi} \in \mathcal{BV}([0, 1])$ tal que $\tilde{\mu} = \tilde{\varphi}m$. Agora, vejamos como a partir desta medida será possível definir uma medida \hat{f} -invariante e absolutamente contínua cuja densidade também tem variação limitada. Defina:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=0}^{N-1} (\hat{f}^i)_* \tilde{\mu}$$

Lema 5.4.4 (Existência). *A medida $\hat{\mu}$ é uma probabilidade \hat{f} -invariante e absolutamente contínua com densidade de variação limitada.*

Demonstração. Observe primeiro que $\hat{\mu}$ é de fato uma probabilidade \hat{f} -invariante pois:

$$\hat{f}_* \hat{\mu} = \sum_{i=1}^N (\hat{f}^i)_* \tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{N-1} (\hat{f}^i)_* \tilde{\mu} + (\hat{f}^N)_* \tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{N-1} (\hat{f}^i)_* \tilde{\mu} + \tilde{\mu} = \sum_{i=0}^{N-1} (\hat{f}^i)_* \tilde{\mu} = \hat{\mu}$$

Onde na segunda igualdade foi usado que $(\hat{f}^N)_* \tilde{\mu} = \tilde{\mu}$. Isso mostra que $\hat{f}_* \hat{\mu} = \hat{\mu}$. Para provar que $\hat{\mu}$ também é absolutamente contínua com densidade de variação limitada, seja $\tilde{\varphi} \in \mathcal{BV}([0, 1])$ de variação limitada tal que $\tilde{\mu} = \tilde{\varphi}m$ e defina a função:

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=0}^{N-1} \hat{\mathcal{L}}^i \tilde{\varphi}$$

Onde $\hat{\mathcal{L}}$ é o operador de transferência de \hat{f} . Observe que, como $\hat{\mathcal{L}}$ é um operador que preserva funções de variação limitada então $\hat{\varphi}$ também tem variação limitada. Mais ainda, afirmamos que $\hat{\mu} = \hat{\varphi}m$. Com efeito, fixado um boreliano $A \subset I_*$ temos:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\hat{f}^{-i}(A)) &= \int_{\hat{f}^{-i}(A)} \tilde{\varphi} dm \\ &= \int \tilde{\varphi}(\chi_A \circ \hat{f}^i) dm \\ &= \int (\hat{\mathcal{L}}^i \tilde{\varphi}) \chi_A dm \\ &= \int_A (\hat{\mathcal{L}}^i \tilde{\varphi}) dm \end{aligned}$$

Onde na penúltima igualdade foi usada a propriedade dual do operador de transferência de \hat{f} (ver 4.15). Logo, usando a igualdade obtida acima:

$$\hat{\mu}(A) = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\mu}(\hat{f}^{-i}(A)) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_A (\hat{\mathcal{L}}^i \tilde{\varphi}) dm = \int_A \hat{\varphi} dm$$

Concluindo a prova do lema. \square

Provada a existência, resta apenas mostrar a unicidade da medida $\hat{\mu}$ construída acima para terminar a prova do teorema 5.4.1. Lembre-se de que não podemos garantir a unicidade de medidas invariantes absolutamente contínuas para aplicações expansoras em geral. Por outro lado, a propriedade fundamental que desempenha um papel de destaque na prova da unicidade e que distingue a aplicação \hat{f} de outras aplicações expansoras por partes é o fato de que esta é topologicamente exata, uma propriedade que nem toda aplicação expansora por partes compartilha. Antes de ver como funciona a prova da unicidade, vamos começar demonstrando o seguinte lema básico sobre \hat{f} :

Lema 5.4.5. *Toda probabilidade \hat{f} -invariante e absolutamente contínua tem densidade de variação limitada.*

Demonstração. Basta observar que toda probabilidade $\hat{\nu}$ que é \hat{f} -invariante e absolutamente contínua também é \hat{h} -invariante e absolutamente contínua, pois $(\hat{f}^N)_*\hat{\mu} = \hat{f}_*\hat{\nu} = \hat{\nu}$. Logo, como consequência do teorema 4.3.4 segue que $\hat{\nu}$ também tem densidade de variação limitada. \square

No próximo lema, usando o fato de que \hat{f} é topologicamente exata vamos mostrar que as densidades de todas as medidas \hat{f} -invariantes e absolutamente contínuas tem suporte total no intervalo I_* .

Lema 5.4.6 (Suporte total). *Se $\hat{\nu} = \hat{\psi}m$ é \hat{f} -invariante e absolutamente contínua, então existe uma constante positiva $c > 0$ de modo que $\hat{\psi}(x) \geq c$ para $x \in I_*$ m-q.t.p. Em particular, $\text{supp } \hat{\psi}$ tem medida de Lebesgue total em I_* .*

Demonstração. Primeiramente, observe que $\hat{\psi}$ tem variação limitada pelo lema 5.4.5. Logo, $\hat{\psi}$ tem no máximo um número infinito enumerável de descontinuidades no intervalo I_* pelo corolário 4.1.10. Em particular, o conjunto dos pontos de continuidade de $\hat{\psi}$ tem medida de Lebesgue total em I_* . Além disso, como $\hat{\nu}$ é absolutamente contínua, então $\text{supp } \hat{\psi}$ tem medida de Lebesgue positiva e portanto, o conjunto dos pontos de continuidade de $\hat{\psi}$ que pertencem a seu suporte também tem medida de Lebesgue positiva, concluindo que existe $x \in \text{supp } \hat{\psi}$ onde $\hat{\psi}$ é contínua.

Como $\hat{\psi}$ é contínua em x e $\hat{\psi}(x) > 0$ então existe um intervalo aberto $J \ni x$ e uma constante $c > 0$ de tal modo que $\inf \hat{\psi}|_J \geq c$.

Afirmção 5.4.7. *Para todo $n \geq 1$ temos $\hat{\psi}(y) \geq c > 0$ para $y \in \hat{f}^n(J)$ m-q.t.p.*

Demonstração. A prova dessa afirmação é feita por indução. A afirmação é clara para $n = 0$, por construção. Agora, supondo que vale para n com $n \geq 1$, para provar o caso $n + 1$ suponha que $y \in \hat{f}^{n+1}(J)$ e seja $x \in \hat{f}^n(J)$ tal que $\hat{\psi}(x) \geq c$. Seja também $j \geq 0$ tal que $x \in \eta_j$ e $f(x) = y$. Então,

$$\frac{\hat{\psi}}{|d\hat{f}|_{\eta_j}} \circ (\hat{f}|_{\eta_j})^{-1}(y) = \hat{\psi}(x) \geq c$$

Logo, usando o fato de que $\hat{\psi}$ é um ponto fixo do operador de transferência de \hat{f} e que $\hat{\mathcal{L}}$ é um operador linear positivo, temos pela desigualdade anterior:

$$\hat{\psi}(y) = (\hat{\mathcal{L}}\hat{\psi})(y) = \sum_{j \geq 0} \frac{\hat{\psi}}{|d\hat{f}|_{\eta_j}} \circ (\hat{f}|_{\eta_j})^{-1}(y) \cdot \chi_{f(\eta_j)}(y) \geq c > 0$$

Portanto, $\hat{\psi}(y) \geq c$ para $y \in \hat{f}^{n+1}(J)$ m-q.t.p. o que prova a afirmação por indução. \square

Como \hat{f} é topologicamente misturadora em I_* , então existe $N \geq 1$ tal que $\hat{f}^N(J) = I_*$. Assim, pela afirmação anterior, segue que $\hat{\psi}(x) \geq c > 0$ para $x \in I_*$ Lebesgue quase todo ponto, o que prova o lema. \square

Definição 5.4.8. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação mensurável com respeito a σ -álgebra de Borel em um espaço métrico (X, d) . Dizemos que duas medidas $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ são **equivalentes** se $\mu \ll \nu$ e $\nu \ll \mu$.*

Corolário 5.4.9. *Todas as medidas \hat{f} -invariantes e absolutamente contínuas são equivalentes à medida de Lebesgue de I_* . Em particular, todas as suas medidas \hat{f} -invariante e absolutamente contínuas são equivalentes entre si.*

Demonstração. Se $\hat{\nu}$ for uma medida \hat{f} -invariante e absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, então basta provar que $m \ll \hat{\nu}$. Por um lado, pelo lema 5.4.6, para todo boreliano $A \subset I_*$ temos:

$$\hat{\nu}(A) = \int_A \hat{\psi} dm \geq c \cdot m(A)$$

Concluindo que $m(A) = 0$ sempre que $\hat{\nu}(A) = 0$, como queríamos mostrar. \square

O seguinte lema de teoria ergódica será útil na prova da unicidade:

Lema 5.4.10 (Lema de teoria ergódica). *Se duas medidas ergódicas μ, ν com respeito a uma aplicação mensurável $f : X \rightarrow X$ são equivalentes então $\mu = \nu$.*

Demonstração. Seja $A \subset X$ um boreliano qualquer fixado. Supondo que μ e ν são ergódicas e aplicando o teorema ergódico de Birkhoff, garantimos a existência de subconjuntos mensuráveis $X_A, Y_A \subset X$ com $\mu(X_A) = \nu(Y_A) = 1$ de tal modo que para todo $x \in X_A$ e $y \in Y_A$ satisfaz:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x)) = \mu(A)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(y)) = \nu(A)$$

Como por hipótese, as medidas μ e ν são equivalentes e temos $\nu(Y_A) = 1$ então Y_A também tem μ -medida total. Em particular, como X_A também tem μ -medida total segue que existe $x \in X_A \cap Y_A$, concluindo pelas igualdades acima que $\mu(A) = \nu(A)$. Logo, as medidas são iguais. \square

Agora, finalmente estamos prontos para provar a unicidade no teorema 5.4.1, usando as conclusões anteriores obtidas.

Unicidade. Vamos mostrar que qualquer medida $\hat{\nu}$ que é \hat{f} -invariante e absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue também é ergódica. Com este objetivo, seja $A \subset I$ um subconjunto mensurável \hat{f} -invariante de medida positiva, ou seja, $\hat{f}^{-1}(A) = A$ e $\hat{\nu}(A) > 0$. Então, a medida definida por:

$$\hat{\nu}_A(B) = \frac{\hat{\nu}(A \cap B)}{\hat{\nu}(A)} \text{ para cada } B \subset I \text{ mensurável}$$

é uma medida \hat{f} -invariante absolutamente contínua com respeito a Lebesgue. Logo, pelo corolário 5.4.9, temos que $\hat{\nu}_A$ é equivalente à medida $\hat{\nu}$. Como $\hat{\nu}_A(A^c) = 0$, segue que $\hat{\nu}(A^c) = 0$, ou seja, $\hat{\nu}(A) = 1$. Portanto, $\hat{\nu}$ é ergódica e assim, pelo lema 5.4.10 conclui-se que $\hat{\mu}$ é única. \square

Prova do teorema 5.1.3

Usando a medida $\hat{\mu}$ construída na prova do teorema 5.4.1, vamos agora construir uma medida especial que satisfaz as condições do teorema 5.1.3. Com este propósito, defina:

$$\mu = (\hat{\mu}|_{\eta_0}) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} f_*^i(\hat{\mu}|_{\eta_j}) \quad (5.6)$$

A medida μ de um subconjunto $A \subset I_*$ pode ser pensada da seguinte maneira: primeiro, cada intervalo η_j dá uma contribuição na medida μ de A que é obtida somando-se as medidas $\hat{\mu}$ das visitas de A ao intervalo η_j até tempo $j - 1$, isto é, fazendo a soma até tempo $j - 1$ dos pesos $\hat{\mu}(f^{-i}(A) \cap \eta_j)$, onde $i = 0, 1, \dots, j - 1$. Assim, a medida μ de A é obtida somando cada uma das contribuições dadas por cada intervalo η_j . Antes de provar o teorema, vamos investigar algumas propriedades básicas desta medida:

Lema 5.4.11. *Para todo $k \geq 1$, a medida μ de η_k satisfaz:*

$$\mu(\eta_k) = \sum_{j \geq k} \hat{\mu}(\eta_j) = \hat{\mu}((0, c_k]) \quad (5.7)$$

Além disso, a medida μ é σ -finita, isto é, existe uma família enumerável $\{I_j\}_{j \geq 1}$ de subconjuntos mensuráveis de I_* tais que $\mu(I_j) < +\infty$ para todo $j \geq 1$, satisfazendo:

$$\bigcup_{j \geq 1} I_j = I_*$$

Demonstração. Para provar 5.7, observe que fixado $k \geq 1$, temos por definição da medida μ que:

$$\mu(\eta_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{j-1} \hat{\mu}(f^{-i}(\eta_k) \cap \eta_j)$$

Onde $\hat{\mu}|_{\eta_0}(\eta_k) = \hat{\mu}(\eta_0 \cap \eta_k) = 0$. Em particular, como $f^{-i}(\eta_k) = \eta_{k+i}$ para todo $i \geq 0$, podemos escrever:

$$\mu(\eta_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{j-1} \hat{\mu}(\eta_{k+i} \cap \eta_j) \quad (5.8)$$

Por outro lado, como os intervalos η_j são disjuntos dois-a-dois, temos que $\eta_{k+i} \cap \eta_j \neq \emptyset$ se e somente se $k + i = j$, ou seja, se e somente se $i = j - k$. Agora, se $1 \leq j < k$ então $\eta_{k+i} \cap \eta_j = \emptyset$, pois neste caso temos $j - k < 0 \leq i$. Logo, a igualdade na expressão 5.8 acima se reduz para:

$$\begin{aligned}
\mu(\eta_k) &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=0}^{j-1} \hat{\mu}(\eta_{k+i} \cap \eta_j) + \sum_{j \geq k} \sum_{i=0}^{j-1} \hat{\mu}(\eta_{k+i} \cap \eta_j) && \text{(por 5.8)} \\
&= \sum_{j \geq k} \sum_{i=0}^{j-1} \hat{\mu}(\eta_{k+i} \cap \eta_j) \\
&= \sum_{j \geq k} \hat{\mu}(\eta_j) \\
&= \hat{\mu}((0, c_k])
\end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade, a primeira parcela da soma acima se anula pelas observações no parágrafo anterior. Agora, para mostrar que a medida μ é σ -finita, para cada $k \geq 1$ defina $I_k = (c_{k+1}, c_1]$ e considere a família destes intervalos. Então, a união destes intervalos cobrem I_* e cada I_k tem μ -medida finita, pois:

$$\mu(I_k) = \mu((c_{k+1}, c_1]) = \mu\left(\bigcup_{l=1}^k \eta_l\right) = \sum_{l=1}^k \mu(\eta_l) = \sum_{l=1}^k \hat{\mu}((0, c_k])$$

Como $\hat{\mu}((0, c_k])$ tem medida finita, segue portanto que $\mu(I_k)$ tem medida finita para todo $k \geq 1$, provando que μ é σ -finita. \square

Lema 5.4.12. *A medida μ é f -invariante e absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue.*

Demonstração. Para mostrar que μ é invariante por f , temos que:

$$f_*^j(\hat{\mu}|_{\eta_j}) = \hat{f}_*(\hat{\mu}|_{\eta_j}) \text{ para todo } j \geq 1 \quad (5.9)$$

Pois, $f_*^j(\hat{\mu}|_{\eta_j})(A) = \hat{\mu}(f^{-j}(A) \cap \eta_j) = \hat{\mu}(\hat{f}^{-1}(A) \cap \eta_j) = \hat{f}_*(\hat{\mu}|_{\eta_j})(A)$ para todo $j \geq 1$ e $A \subset I$ mensurável. Logo, usando o fato de que $\hat{\mu}$ é \hat{f} -invariante, obtemos:

$$\begin{aligned}
f_*(\hat{\mu}|_{\eta_0}) + \sum_{j=1}^{\infty} f_*^j(\hat{\mu}|_{\eta_j}) &= \hat{f}_*(\hat{\mu}|_{\eta_0}) + \sum_{j=1}^{\infty} \hat{f}_*(\hat{\mu}|_{\eta_j}) && \text{(por 5.9)} \\
&= \hat{f}_*(\hat{\mu}|_{\bigcup \eta_j}) \\
&= \hat{f}_*\hat{\mu} \\
&= \hat{\mu} \\
&= \hat{\mu}|_{\eta_0} + \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{\mu}|_{\eta_j})
\end{aligned}$$

Mais especificamente, obtemos a seguinte igualdade:

$$f_*(\hat{\mu}|_{\eta_0}) + \sum_{j=1}^{\infty} f_*^j(\hat{\mu}|_{\eta_j}) = \hat{\mu}|_{\eta_0} + \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{\mu}|_{\eta_j}) \quad (5.10)$$

Portanto, usando a observação 5.10 acima, concluímos que:

$$\begin{aligned}
f_*\mu &= f_*(\mu|_{\eta_0}) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^j f_*^i(\hat{\mu}|_{\eta_j}) \\
&= f_*(\mu|_{\eta_0}) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{j-1} f_*^i(\hat{\mu}|_{\eta_j}) + f_*^j(\hat{\mu}|_{\eta_j}) \right) \\
&= f_*(\mu|_{\eta_0}) + \sum_{j=1}^{\infty} f_*^j(\hat{\mu}|_{\eta_j}) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} f_*^i(\hat{\mu}|_{\eta_j}) \\
&= \hat{\mu}|_{\eta_0} + \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{\mu}|_{\eta_j}) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{j-1} f_*^i(\hat{\mu}|_{\eta_j}) \quad (\text{por 5.10}) \\
&= (\mu|_{\eta_0}) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} f_*^i(\hat{\mu}|_{\eta_j}) \\
&= \mu
\end{aligned}$$

Provando que $f_*\mu = \mu$, ou seja, μ é f -invariante. Para mostrar que μ é uma medida absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue, é suficiente mostrar que existe φ integrável satisfazendo $\mu = \varphi m$. Seja $\hat{\varphi}$ a densidade de variação limitada de $\hat{\mu}$. Denotando por $f_0^{-i} = (f|_{(0,c_i]})^{-1}$, se $A \subset I_*$ é mensurável qualquer, então:

$$\begin{aligned}
f_*^i(\hat{\mu}|_{\eta_j})(A) &= \hat{\mu}(f^{-i}(A) \cap \eta_j) = \int_{f^{-i}(A) \cap \eta_j} \hat{\varphi} dm \\
&= \int_{A \cap f^i(\eta_j)} \frac{\hat{\varphi}}{|df^i|} \circ (f_0^{-i}) dm \quad (\text{mudança de variáveis}) \\
&= \int_A \frac{\hat{\varphi}}{|df^i|} \circ (f_0^{-i}) \cdot \chi_{f^i(\eta_j)} dm
\end{aligned}$$

Logo, $f_*^i(\hat{\mu}|_{\eta_j})$ tem densidade $\frac{\hat{\varphi}}{|df^i|} \circ (f_0^{-i}) \cdot \chi_{f^i(\eta_j)}$. Portanto, pela definição de μ segue que:

$$\varphi = \frac{d\mu}{dm} = \hat{\varphi} \cdot \chi_{\eta_0} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\hat{\varphi}}{|df^i|} \circ (f_0^{-i}) \cdot \chi_{f^i(\eta_j)}$$

Logo, μ é absolutamente contínua e isso conclui a prova do teorema. \square

Finalmente, vamos provar o teorema 5.1.3 mostrando que a medida μ satisfaz as condições dele. A única condição que resta é provar que a medida μ é infinita, garantida pelo próximo lema a ser provado. Vale destacar que a velocidade de convergência da sequência c_j é fato **crucial** para que isto seja verdade e como já bem comentamos, esta propriedade segue como consequência do ponto fixo na origem ser neutro.

Lema 5.4.13. *A medida μ é infinita. Além disso, $\mu(I_* \setminus [0, \varepsilon)) < +\infty$ para todo $\varepsilon > 0$, ou seja, o complementar de toda vizinhança do ponto fixo tem μ -medida finita.*

Demonstração. Já vimos que a densidade $\hat{\varphi}$ de $\hat{\mu}$ satisfaz $\hat{\varphi}(x) \geq c > 0$ para alguma constante $c > 0$, $x \in I_*$ Lebesgue quase todo ponto. Assim, temos a seguinte desigualdade, para todo $i \geq 1$:

$$\hat{\mu}([0, c_i]) = \int_{[0, c_i]} \hat{\varphi} dm \geq cm([0, c_i]) \geq c \frac{\alpha_0}{i}$$

pois $m([0, c_i]) = c_i$ para todo $i \geq 1$. Portanto, pela definição de μ obtemos:

$$\begin{aligned} \mu(I_*) &= \hat{\mu}(\eta_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{j-1} \hat{\mu}(\eta_j) = \hat{\mu}(\eta_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} \hat{\mu}(\eta_j) \\ &= \hat{\mu}(\eta_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\mu}([0, c_i]) \\ &\geq \sum_{i=1}^{\infty} c \frac{\alpha_0}{i} \end{aligned}$$

Como a série na última desigualdade acima diverge, segue portanto que $\mu(I_*)$ é infinito, concluindo assim que μ é uma medida infinita. Também como consequência da demonstração, segue que a medida do complementar de qualquer vizinhança do ponto fixo tem medida finita. \square

Vamos fechar esta sessão com um resultado que será bastante útil na sessão posterior e que ilustra bem como podemos obter informações sobre a dinâmica de f conhecendo as propriedades estatísticas e ergódicas de \hat{f} .

Teorema 5.4.14. *Para $x \in I_*$ Lebesgue q.t.p. a órbita futura de x com respeito a \hat{f} é densa em I_* . Em particular, $\mathcal{O}_{\hat{f}}^+(x)$ é densa para $x \in I_*$ Lebesgue q.t.p.*

Demonstração. Primeiramente, observe que $\text{supp}(\hat{\mu}) = I_*$. De fato, caso contrário, existe um intervalo $J \subset I_*$ que satisfaz $\hat{\mu}(J) = 0$, o que contradiz o fato de que $\hat{\mu}$ é equivalente à medida de Lebesgue. Seja $\{\mathcal{O}_n\}_{n \geq 1}$ uma base enumerável de abertos básicos para a topologia em I_* . Pelo teorema ergódico de Birkhoff, como $\hat{\mu}$ é uma medida ergódica para \hat{f} e $\hat{\mu}(\mathcal{O}_n) > 0$ para todo $n \geq 1$, então para cada $n \geq 1$ existe um subconjunto mensurável $U_n \subset I_*$ tal que $\hat{\mu}(U_n) = 1$ e para todo $x \in U_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\mathcal{O}_n}(\hat{f}^j(x)) = \hat{\mu}(\mathcal{O}_n) > 0$$

Defina o conjunto $U = \bigcap_{n \geq 1} U_n$. Então, U é um subconjunto mensurável com $\hat{\mu}(U) = 1$. Afirmamos que $\mathcal{O}_{\hat{f}}^+(x)$ é densa em I_* para todo $x \in U$. Para provar essa afirmação, fixado $x \in U$ e dados $y \in I_*$, $J \ni y$ um aberto qualquer, seja \mathcal{O}_n um elemento da base tal que $y \in \mathcal{O}_n \subset J$. Como a média temporal de $\chi_{\mathcal{O}_n}$ existe no ponto x e é igual a $\hat{\mu}(\mathcal{O}_n) > 0$ então existe $j \geq 0$ de modo que $\hat{f}^j(x) \in \mathcal{O}_n$. Portanto, $y \in \overline{\mathcal{O}_{\hat{f}}^+(x)}$ e como y foi arbitrário, segue que a órbita futura de todo ponto $x \in U$ é densa em I_* . Em particular, $\mathcal{O}_{\hat{f}}^+(x)$ é densa para $x \in I_*$ Lebesgue q.t.p. \square

5.5 Comportamento estatístico das órbitas

Vimos na última sessão, como estudar as propriedades ergódicas da aplicação \hat{f} permite obter informações sobre as propriedades ergódicas da aplicação f . Agora, veremos como o comportamento estatístico das órbitas de f se relaciona com a medida μ e como podemos deduzir, usando que μ é infinita, que a bacia estatística da medida delta de Dirac no ponto fixo tem medida de Lebesgue total em I_* . Antes de começar,

vamos introduzir alguns conceitos: para cada $k, n \in \mathbb{N}$ e $x \in I_*$, denotamos o **tempo médio de visita ao conjunto** $I_k = (c_{k+1}, f(c_1)]$ **no tempo** n por:

$$\tau_n(x, k) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \chi_{I_k}(f^s(x)) \quad (5.11)$$

Vamos denotar também para cada $m, j \in \mathbb{N}$ e $x \in I_*$ o **tempo médio de visita ao intervalo** η_j **no tempo** m :

$$\theta_m(x, j) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \chi_{\eta_j}(\hat{f}^i(x)) \quad (5.12)$$

Observe que nas definições anteriores, estamos fazendo distinções entre os tempos de f e \hat{f} : para o tempo médio de visita de f ao conjunto I_k em estamos usando a **letra** n **com índice** s e para o tempo médio de visita de \hat{f} ao intervalo η_j , estamos usando a **letra** m **com índice** i .

O objetivo principal e grande parte da estratégia da prova do teorema 5.1.4 é estimar o tempo médio de visita em cada intervalo I_k . Estudando a relação existente entre os dois tempos médios de visita definidos acima e relacionando com as propriedades ergódicas estudadas da aplicação \hat{f} , vamos mostrar que para $x \in I_*$ lebesgue quase todo ponto, os iterados de x passam em média cem por cento do seu tempo no complementar de I_k . Mais especificamente, vamos provar o seguinte teorema:

Teorema 5.5.1. *Para todo $k \geq 1$ e $x \in I_*$ lebesgue q.t.p, o tempo médio de visita de x ao intervalo I_k converge para zero quando $n \rightarrow +\infty$, isto é, $\tau_n(x, k) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.*

Como consequência, a prova de que a delta de Dirac na origem é uma medida física (teorema 5.1.4) é obtido como corolário deste.

Estimando o tempo de visita

O objetivo agora é estudar os dois tempos médios de visita definidos para f e \hat{f} , com a razão de estimar o tempo médio que uma órbita típica de f passa longe de uma vizinhança da origem. A próxima proposição é um bom começo pois o tempo médio de visita de \hat{f} ao intervalo η_j já é possível estimar com as ferramentas que temos:

Proposição 5.5.2. *Para $x \in I_*$ lebesgue q.t.p. e todo $j \geq 1$:*

$$\theta_m(x, j) \rightarrow \hat{\mu}(\eta_j) \text{ quando } m \rightarrow +\infty \quad (5.13)$$

Demonstração. Como $\hat{\mu}$ é uma medida invariante e ergódica com respeito à aplicação \hat{f} e $\theta_m(x, j)$ foi definida a partir de \hat{f} então pelo teorema ergódico de Birkhoff, para cada $j \geq 1$ existe um conjunto mensurável $X_j \subset I_*$ tal que $\hat{\mu}(X_j) = 1$, satisfazendo $\theta_m(x, j) \rightarrow \hat{\mu}(\eta_j)$ quando $m \rightarrow +\infty$ para todo $x \in X_j$. Assim, $X = \bigcap X_j$ é um conjunto com medida $\hat{\mu}$ -total e como $\hat{\mu}$ é equivalente a medida de Lebesgue, então X também tem medida de Lebesgue total em I_* . Em particular, para $x \in I_*$ lebesgue q.t.p. vale $\theta_m(x, j) \rightarrow \hat{\mu}(\eta_j)$ quando $m \rightarrow +\infty$ para todo $j \geq 1$, o que prova a proposição. \square

Pelo teorema 5.4.14 e pela proposição anterior, o conjunto dos pontos não-periódicos de f que satisfazem 5.13 é um conjunto com medida de Lebesgue total. A partir daqui vamos sempre supor que

$x \in I_*$ é um ponto deste conjunto. Com isso, vamos introduzir uma sequência para distinguir as duas escalas de tempo distintas no ponto x correspondentes às aplicações f e \hat{f} . Para cada $i \geq 0$ existe um único inteiro $l(i) \geq 0$ tal que $\hat{f}^i(x) = f^{l(i)}(x)$. Isso define uma sequência crescente:

$$l : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$$

Que relaciona o tempo de f com o tempo de \hat{f} . Dizemos que essa sequência é a **aplicação tempo de primeiro retorno de f ao ponto x** .

Exemplo 5.5.3 (exemplo ilustrativo). *Suponha que $x \in \eta_5$ e $\hat{f}^2(x) \in \eta_{13}$. Vamos calcular os quatro primeiros termos da sequência $l(i)$. Observe que:*

$$\begin{aligned}\hat{f}(x) &= f^5(x) \in \eta_0 \\ \hat{f}^2(x) &= f^6(x) \\ \hat{f}^3(x) &= \hat{f}(\hat{f}^2(x)) = f^{13}(f^6(x)) = f^{19}(x) \\ \hat{f}^4(x) &= f^{20}(x)\end{aligned}$$

Assim, podemos construir a seguinte tabela:

i	l(i)
0	0
1	5
2	6
3	19
4	20

Existem algumas vantagens que tornam o tempo de primeiro retorno bastante útil dentro do nosso contexto: uma delas é que a sequência l foi definida em termos de \hat{f} e assim, é possível estimá-la usando suas propriedades ergódicas estudadas nas sessões anteriores. Outra vantagem é que o itinerário do ponto x por f fica inteiramente determinado conhecendo o tempo de primeiro retorno. A seguinte proposição ilustra esse ponto:

Proposição 5.5.4. *A aplicação tempo de primeiro retorno de f no ponto x satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *Se $\hat{f}^i(x) \in \eta_0$ então $l(i+1) = l(i) + 1$.*
- (ii) *Se $\hat{f}^i(x) \in \eta_j$ e $j \geq 1$ então $l(i+1) = l(i) + j$*

Demonstração. Basta usar a definição da aplicação \hat{f} . De fato, se $\hat{f}^i(x) \in \eta_0$ então:

$$f^{l(i+1)}(x) = \hat{f}^{i+1}(x) = \hat{f}(\hat{f}^i(x)) = f(f^{l(i)}) = f^{l(i)+1}(x)$$

Logo, $l(i+1) = l(i) + 1$. Analogamente, se $\hat{f}^i(x) \in \eta_j$ então:

$$f^{l(i+1)}(x) = \hat{f}^{i+1}(x) = \hat{f}(\hat{f}^i(x)) = f^j(f^{l(i)}) = f^{l(i)+j}(x)$$

Assim, $l(i+1) = l(i) + j$. □

Como veremos mais a frente, obter uma boa estimativa ou uma expressão que determine o tempo de primeiro retorno em um ponto x será fundamental para o estudo do comportamento estatístico da órbita desse ponto. Com isso, será possível relacionar as propriedades estatísticas das duas aplicações f e \hat{f} . Um bom começo é estudar a relação que existe entre os tempos i e $l(i)$ com respeito aos intervalos η_j e para isso, o seguinte lema será útil:

Lema 5.5.5. *Sejam $j \geq 0$ e $i = 0, 1, \dots, m$ fixados. Então, existe $k \geq j$ tal que $\hat{f}^i(x) \in \eta_k$ se e somente se existe $s \in \{l(i), \dots, l(i+1) - 1\}$ tal que $f^s(x) \in \eta_j$.*

Demonstração. Suponha que $\hat{f}^i(x) \in \eta_k$ onde $k \geq j$. Então:

$$f^{l(i)+(k-j)}(x) = \hat{f}^{i+(k-j)}(x) \in \eta_{k-(k-j)} = \eta_j$$

Pela proposição 5.5.4, como estamos supondo que $\hat{f}^i(x) \in \eta_k$, temos $l(i+1) = l(i) + k$ e portanto, $l(i) \leq l(i) + (k-j) < l(i) + k = l(i+1)$. Assim, basta tomar $s = l(i) + (k-j)$.

Reciprocamente, se $f^s(x) \in \eta_j$ para alguma $s \in \{l(i), \dots, l(i+1) - 1\}$, então $\hat{f}^i(x) = f^{l(i)}(x) \in \eta_{j+(s-l(i))}$, onde $j + (s - l(i)) \geq j$. Portanto, tomando $k = j + (s - l(i))$ concluímos que $\hat{f}^i(x) \in \eta_k$ onde $k \geq j$. \square

Corolário 5.5.6. *Para todo $i = 0, 1, \dots, m-1$ e $j \geq 0$ fixados, temos a seguinte igualdade:*

$$\sum_{k \geq j} \chi_{\eta_k}(\hat{f}^i(x)) = \sum_{s=l(i)}^{l(i+1)-1} \chi_{\eta_j}(f^s(x))$$

Demonstração. Basta usar o lema 5.5.5 para concluir as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \sum_{s=l(i)}^{l(i+1)-1} \chi_{\eta_j}(f^s(x)) &= \begin{cases} 1 & \text{se existe } s \in \{l(i), \dots, l(i+1) - 1\} \text{ tal que } f^s(x) \in \eta_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{se existe } k \geq j \text{ tal que } \hat{f}^i(x) \in \eta_k \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\ &= \sum_{k \geq j} \chi_{\eta_k}(\hat{f}^i(x)) \end{aligned}$$

Isso conclui a prova do corolário. \square

A partir de agora vamos fixar $x \in I_*$ satisfazendo 5.13 na proposição 5.5.2. Para calcular o tempo médio de visita ao intervalo I_k no tempo n no ponto x , será fundamental ter uma estimativa conveniente para os dois tempos m e $l(m)$, ou uma fórmula que os descreva. Com esse propósito, vamos mostrar como ao obter uma boa estimativa sobre o número de iterados, até tempo $l(m)$, de \hat{f} no ponto x que passam pelo intervalo η_j nos permite deduzir uma fórmula para o tempo $l(m)$. Antes, observe que como consequência de 5.13, podemos estimar para cada $j \geq 1$, até tempo $m \geq 1$ o número de iterados da trajetória de \hat{f} no ponto x que passam pelo intervalo η_j . Mais especificamente:

$$\#\{i = 0, 1, \dots, m-1; \hat{f}^i(x) \in \eta_j\} = m\theta_m(x, j)$$

A seguinte proposição, que irá nos ajudar a encontrar uma fórmula para o tempo $l(m)$, dá uma estimativa parecida com a obtida acima até tempo $l(m)$ dos iterados de f que pertencem ao intervalo η_j . :

Proposição 5.5.7. Para cada $j \geq 1$ e $m \geq 1$ temos:

$$\#\{s = 0, 1, \dots, l(m) - 1; f^s(x) \in \eta_j\} = \sum_{k \geq j} m\theta_m(x, k)$$

Demonstração. Observe que vale a seguinte igualdade:

$$\#\{s = 0, 1, \dots, l(m) - 1; f^s(x) \in \eta_j\} = \sum_{s=0}^{l(m)-1} \chi_{\eta_j}(f^s(x)) \quad (5.14)$$

Além disso, podemos escrever pela definição da sequência l :

$$\sum_{s=0}^{l(m)-1} \chi_{\eta_j}(f^s(x)) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{s=l(i)}^{l(i+1)-1} \chi_{\eta_j}(f^s(x)) \quad (5.15)$$

Por outro lado, pelo corolário 5.5.6:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{s=l(i)}^{l(i+1)-1} \chi_{\eta_j}(f^s(x)) &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{k \geq j} \chi_{\eta_k}(\hat{f}^i(x)) \\ &= \sum_{k \geq j} \sum_{i=0}^{m-1} \chi_{\eta_k}(\hat{f}^i(x)) \\ &= \sum_{k \geq j} m\theta_m(x, k) \end{aligned}$$

Onde na segunda igualdade, as séries comutam pois a soma é finita. Logo, substituindo em 5.15 obtemos a igualdade:

$$\sum_{s=0}^{l(m)-1} \chi_{\eta_j}(f^s(x)) = \sum_{k \geq j} m\theta_m(x, k)$$

E assim, por 5.14 concluímos a igualdade desejada. □

Corolário 5.5.8. Para todo $m \geq 1$ temos:

$$l(m) = m\theta_m(x, 0) + \sum_{j \geq 1} jm\theta_m(x, j)$$

Demonstração. Se $m \geq 1$, então pela proposição 5.5.7:

$$\begin{aligned} l(m) &= \sum_{j \geq 0} \#\{s = 0, 1, \dots, l(m) - 1; f^s(x) \in \eta_j\} \\ &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq j} m\theta_m(x, k) && \text{(proposição 5.5.7)} \\ &= m\theta_m(x, 0) + \sum_{j \geq 1} jm\theta_m(x, j) \end{aligned}$$

□

Agora, vamos estimar o tempo médio de visita de x ao intervalo I_k no tempo n , onde $k \geq 1$. Antes, vamos provar o seguinte lema:

Lema 5.5.9. *Seja $0 \leq i \leq m - 1$ fixado e suponha que $\hat{f}^i(x) \in \eta_j$. Então, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) *Se $0 \leq j \leq k$ e $l \in [l(i), l(i + 1))$ então $f^l(x) \in I_k$.*

(ii) *Se $j > k$ então $l \in [l(i) + (j - k), l(i + 1))$ se e somente se $f^l(x) \in I_k$.*

Demonstração. Suponha primeiramente que $0 \leq j \leq k$ como no item (i) e seja $l \in [l(i), l(i + 1))$. Por definição da aplicação de primeiro retorno, $\hat{f}^i(x) = f^{l(i)}(x) \in \eta_j = (c_{j+1}, c_j] \subset I_k$ e assim, $f^l(x) \in \eta_{j-(l-l(i))}$. Por outro lado, $k \geq j - (l - l(i)) = j + l(i) - l = l(i + 1) - l \geq 1$. Em particular, $f^l(x) \in \eta_{j-(l-l(i))} = (c_{j-(l-l(i))+1}, c_{j-(l-l(i))}] \subset (c_k, f(c_1)]$. Logo, $f^l(x) \in I_k$. Para provar o item (ii), se $j > k$ e $l \in [l(i) + (j - k), l(i + 1))$ então os mesmos argumentos acima mostram que $f^l(x) \in I_k$ para todo $l \in [l(i) + (j - k), l(i + 1))$. Reciprocamente, se $l \in [l(i), l(i) + (j - k))$ então $j - (l - l(i)) = j + l(i) - l = l(i + 1) - l > l(i + 1) - l(i) - (j - k) = l(i + 1) - l(i) - j + k = k$. Portanto, $f^l(x) \notin I_k$. □

Em particular, o lema anterior diz que para todo tempo $i \geq 0$ o número de iterados de tempo $l(i), \dots, l(i + 1) - 1$ que pertencem a I_k é no máximo igual k . Agora, estamos prontos para fazer a seguinte estimativa:

Proposição 5.5.10. *Se $n \geq 1$, $k \geq 1$ e $l(m) \leq n < l(m) - 1$ então:*

$$n\tau_n(x, k) \leq m\theta_m(x, 0) + \sum_{1 \leq j \leq k} jm\theta_m(x, j) + \sum_{j > k} km\theta_m(x, j) + k$$

Demonstração. Observe que podemos escrever $\chi_{I_k} = \chi_{I_k \setminus \eta_0} + \chi_{\eta_0}$ pois lembrando que $I_k = (c_{k+1}, f(c_1)]$, temos a união disjunta $I_k = (I_k \setminus \eta_0) \cup \eta_0$. Então:

$$\begin{aligned} n\tau_n(x, k) &= \sum_{s=0}^{n-1} \chi_{I_k}(f^s(x)) \\ &= \sum_{s=0}^{l(m)-1} \chi_{I_k}(f^s(x)) + \sum_{s=l(m)}^{n-1} \chi_{I_k}(f^s(x)) \\ &= \sum_{s=0}^{l(m)-1} \chi_{\eta_0}(f^s(x)) + \sum_{s=0}^{l(m)-1} \chi_{I_k \setminus \eta_0}(f^s(x)) + \sum_{s=l(m)}^{n-1} \chi_{I_k}(f^s(x)) \end{aligned}$$

A ideia agora é estimar cada uma das parcelas da soma acima para obter a desigualdade desejada. Para a primeira parcela, observe que para cada $i = 0, 1, \dots, m - 1$ podemos escrever:

$$\sum_{s=l(i)}^{l(i+1)-1} \chi_{\eta_0}(f^s(x)) = \chi_{\eta_0}(\hat{f}^i(x))$$

De fato, para ver que a igualdade é verdade, suponha que $\hat{f}^i(x) \in \eta_0$. Então, $l(i+1) = l(i) + 1$ pela proposição 5.5.4 e assim,

$$\sum_{s=l(i)}^{l(i+1)-1} \chi_{\eta_0}(f^s(x)) = \chi_{\eta_0}(f^{l(i)}(x)) = \chi_{\eta_0}(\hat{f}^i(x)) = 1$$

Reciprocamente, suponha que $\hat{f}^i(x) \notin \eta_0$ e seja $j \geq 1$ tal que $\hat{f}^i(x) \in \eta_j$. Então, $l(i+1) = l(i) + j$ e portanto, para todo $s = l(i), \dots, l(i+1) - 1$ temos $j - (s - l(i)) = l(i+1) - s \geq 1$, ou seja $f^s(x) \notin \eta_0$. Logo,

$$\sum_{s=l(i)}^{l(i+1)-1} \chi_{\eta_0}(f^s(x)) = \chi_{\eta_0}(\hat{f}^i(x)) = 0$$

Com isso, provamos a seguinte igualdade:

$$\sum_{s=0}^{l(m)-1} \chi_{\eta_0}(f^s(x)) = \sum_{i=0}^{m-1} \chi_{\eta_0}(\hat{f}^i(x)) = m\theta_m(x, 0) \quad (5.16)$$

Agora, vamos estimar a segunda parcela da soma. Observe primeiramente que se $s = 0, 1, \dots, l(m) - 1$, como $I_k \setminus \eta_0$ é união disjunta de η_1, \dots, η_k então:

$$\chi_{I_k \setminus \eta_0}(f^s(x)) = \sum_{j=1}^k \chi_{\eta_j}(f^s(x))$$

Assim, usando a proposição 5.5.7:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{l(m)-1} \chi_{I_k \setminus \eta_0}(f^s(x)) &= \sum_{s=0}^{l(m)-1} \sum_{j=1}^k \chi_{\eta_j}(f^s(x)) \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{s=0}^{l(m)-1} \chi_{\eta_j}(f^s(x)) \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{r \geq j} m\theta_m(x, r) \end{aligned} \quad (\text{proposição 5.5.7})$$

Logo, como consequência da igualdade anterior concluímos que:

$$\sum_{s=0}^{l(m)-1} \chi_{I_k \setminus \eta_0}(f^s(x)) = \sum_{1 \leq j \leq k} jm\theta_m(x, j) + \sum_{j > k} km\theta_m(x, j) \quad (5.17)$$

Pelo lema 5.5.9, para cada $i \geq 0$ existem no máximo k iterados $s = l(i), l(i) + 1, \dots, l(i+1) - 1$ tais que $f^s(x) \in I_k$. Logo, a última parcela da soma fica:

$$\sum_{s=l(m)}^{n-1} \chi_{I_k}(f^s(x)) \leq k \quad (5.18)$$

Portanto, juntando as igualdades 5.16, 5.17 e a desigualdade 5.18 e substituindo na soma, obtemos o resultado desejado. \square

Agora estamos prontos para provar o teorema 5.5.1 enunciado no início desta sessão.

Prova do teorema 5.5.1. Seja $k \geq 1$ e $x \in I_*$ satisfazendo 5.5.2 na proposição 5.13. Então, para cada $j \geq 1$ temos que $\theta_m(x, j) \rightarrow \hat{\mu}(\eta_j)$ quando $m \rightarrow +\infty$. Em particular,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \theta_m(x, 0) + \sum_{j \geq 1} j \theta_m(x, j) = \hat{\mu}(\eta_0) + \sum_{j \geq 1} j \hat{\mu}(\eta_j) = \mu(I_*) = +\infty$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ tome $m_0 \geq 1$ de modo que:

$$\frac{1}{\theta_m(x, 0) + \sum_{j \geq 1} j \theta_m(x, j)} < \frac{\varepsilon}{2k} \quad (5.19)$$

para todo $m \geq m_0$. Agora, fixado $n \geq l(m_0)$ seja $m \geq m_0$ tal que $l(m) \leq n < l(m+1)$. Então, pelo corolário 5.5.8:

$$n = (n - l(m)) + l(m) = (n - l(m)) + m \theta_m(x, 0) + \sum_{j \geq 1} j m \theta_m(x, j)$$

Portanto, obtemos a igualdade:

$$\frac{n}{m} = \frac{(n - l(m))}{m} + \theta_m(x, 0) + \sum_{j \geq 1} j \theta_m(x, j) \quad (5.20)$$

Além disso, pela proposição 5.5.10 temos:

$$\frac{n \tau_n(x, k)}{m} \leq \theta_m(x, 0) + \sum_{1 \leq j \leq k} j \theta_m(x, j) + \sum_{j > k} k \theta_m(x, j) + \frac{k}{m} \quad (5.21)$$

Portanto, juntando a igualdade 5.20 e a desigualdade 5.21:

$$\tau_n(x, k) = \frac{m}{n} \frac{n \tau_n(x, k)}{m} \leq \frac{\theta_m(x, 0) + \sum_{1 \leq j \leq k} j \theta_m(x, j) + \sum_{j > k} k \theta_m(x, j) + \frac{k}{m}}{\frac{(n - l(m))}{m} + \theta_m(x, 0) + \sum_{j \geq 1} j \theta_m(x, j)} \quad (5.22)$$

Agora, como temos $\sum_{j \geq 0} \theta_m(x, j) = 1$ e $n - l(m) \geq 0$ então:

$$\frac{1}{(n - l(m))/m + \theta_m(x, 0) + \sum_{j \geq 1} j \theta_m(x, j)} \leq \frac{1}{\theta_m(x, 0) + \sum_{j \geq 1} j \theta_m(x, j)} \quad (5.23)$$

$$\theta_m(x, 0) + \sum_{1 \leq j \leq k} j \theta_m(x, j) + \sum_{j > k} k \theta_m(x, j) + \frac{k}{m} \leq k + \frac{k}{m} < 2k \quad (5.24)$$

Portanto, juntando as desigualdades e substituindo em 5.22, finalmente obtemos para todo $n \geq l(m_0)$:

$$\tau_n(x, k) \leq \frac{2k}{\theta_m(x, 0) + \sum_{j \geq 1} j \theta_m(x, j)} < 2k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon \quad (\text{por 5.19})$$

Concluindo que $\tau_n(x, k) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$ para $x \in I_*$ lebesgue-q.t.p.

□

Corolário 5.5.11. Para todo $\varepsilon > 0$ e $x \in I_*$ lebesgue-q.t.p. o tempo médio de visita ao intervalo $[0, \varepsilon)$ é igual a 1, ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \chi_{[0, \varepsilon)}(f^s(x)) = 1$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, seja $k \geq 1$ tal que $c_{k+1} \in [0, \varepsilon)$. Pela proposição 5.5.1 temos:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \chi_{I_k}(f^s(x)) = 0$$

Como $I_* = [0, c_{k+1}] \cup I_k$ e a união é disjunta, usando que $\chi_{[0, c_{k+1}]} \leq \chi_{[0, \varepsilon)}$ então:

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \chi_{I_*}(f^s(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \chi_{[0, c_{k+1}]}(f^s(x)) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \chi_{I_k}(f^s(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \chi_{[0, c_{k+1}]}(f^s(x)) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \chi_{[0, \varepsilon)}(f^s(x)) \leq 1 \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \chi_{[0, \varepsilon)}(f^s(x)) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow +\infty$, como queríamos provar. □

Finalmente, com as ferramentas desenvolvidas acima, estamos prontos para provar o teorema 5.1.4 enunciado no início deste capítulo:

Prova do teorema 5.1.4. Seja $x \in I_*$ um ponto que satisfaz o teorema 5.5.1. Queremos mostrar que para toda função contínua $\varphi \in C^0(M)$ é válido o limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \varphi(0)$$

Para mostrar que isso é verdade, fixando $\varphi \in C^0(M)$ e $\varepsilon > 0$, pela continuidade de φ existe $\delta > 0$ de tal modo que $|\varphi(z) - \varphi(0)| < \varepsilon$ para todo $z \in [0, \delta)$. Pelo corolário anterior, temos que o tempo de visita de x ao complementar do intervalo $[0, \delta)$ converge a zero quando $n \rightarrow +\infty$, isto é:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_J(f^j(x)) = 0$$

Onde $J = I_* \setminus [0, \delta)$. Portanto, tome $n_0 \geq 1$ de modo que:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_J(f^j(x)) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq n_0 \tag{5.25}$$

Para cada $n \geq 1$, vamos indicar por A_n o conjunto dos iterados de x que visitam o intervalo $[0, \delta)$ até tempo n e B_n o conjunto dos iterados de f que visitam o complementar J , isto é, $A_n = \{j = 0, 1, \dots, n-1; f^j(x) \in [0, \delta)\}$ e $B_n = \{j = 0, 1, \dots, n-1; f^j(x) \in J\}$. Então, pela definição destes conjuntos, temos para cada $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n} \sum_{j \in A_n} 1 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{[0, \delta)}(f^j(x)) \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j \in B_n} 1 = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_J(f^j(x)) \quad (5.27)$$

Segue da definição de A_n que $|\varphi(f^j(x)) - \varphi(0)| < \varepsilon$ para todo $j \in A_n$ e $n \geq 1$. Agora, tomando $C = \sup_{z \in I_*} |\varphi(z)|$, obtemos as seguintes estimativas para $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) - \varphi(0) \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{j \in A_n} (\varphi(f^j(x)) - \varphi(0)) + \frac{1}{n} \sum_{j \in B_n} (\varphi(f^j(x)) - \varphi(0)) \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j \in A_n} |\varphi(f^j(x)) - \varphi(0)| + \frac{1}{n} \sum_{j \in B_n} |\varphi(f^j(x)) - \varphi(0)| \\ &< \frac{1}{n} \sum_{j \in A_n} \varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{j \in B_n} 2C \\ &< \varepsilon + \frac{2C}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_J(f^j(x)) \quad (\text{por 5.27}) \\ &< \varepsilon + 2C\varepsilon \quad (\text{por 5.25}) \end{aligned}$$

Onde na segunda desigualdade usamos a continuidade de φ e na primeira parcela da soma na terceira desigualdade foi usado o fato de que a média temporal é limitada por uma constante menor ou igual a um. Como x foi um ponto tomado em um conjunto com medida de Lebesgue total, segue a prova do teorema. \square

Consequências e Resultados

Com a discussão feita na sessão anterior, vamos exibir algumas propriedades ergódicas e dinâmicas dos mapas com ponto fixos neutrais que podem ser deduzidas facilmente a partir do teorema 5.1.4:

Corolário 5.5.12. *Se $f : I_* \rightarrow I_*$ é um mapa com ponto fixo neutro então f não possui medidas ergódicas absolutamente contínuas.*

Demonstração. Suponha por absurdo que exista uma medida μ que é ergódica com respeito a f e absolutamente contínua. A contradição a qual vamos chegar mostra que, supondo que isso seja verdade, devemos ter $\mu = \delta_0$. Seja $\varphi \in C^0(I_*)$ uma função contínua fixada. Pelo teorema ergódico de Birkhoff, existe um subconjunto X_φ com $\mu(X_\varphi) = 1$ de modo que para todo $x \in X_\varphi$ satisfaz:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$$

Agora, observe o seguinte: como a bacia estatística de atração de δ_0 tem medida de Lebesgue total, usando o fato de que μ é absolutamente contínua, concluímos que a bacia de δ_0 também tem medida total com respeito a μ , isto é, $\mu(\mathcal{B}_f(\delta_0)) = 1$. Como X_φ também tem μ -medida total, temos $X_\varphi \cap \mathcal{B}_f(\delta_0) \neq \emptyset$. Em particular, existe $x \in I_*$ tal que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu = \varphi(0)$$

Ou seja,

$$\int \varphi d\mu = \varphi(0)$$

Como φ foi arbitrária, concluímos portanto que $\mu = \delta_0$ e isto contradiz o fato de μ ser absolutamente contínua. \square

Em relação ao corolário anterior, usando as técnicas do operador de transferência, é possível dizer ainda mais sobre as medidas invariantes de um mapa com ponto fixo neutro e concluir que de fato, estes mapas *não possuem medidas invariantes absolutamente contínuas finitas* (não necessariamente ergódicas). Isto segue como corolário do seguinte teorema, provado ao final da sessão 3.5 em [Via97] que basicamente diz que toda medida invariante absolutamente contínua é igual a medida μ em 5.4.13 a menos de uma constante positiva.

Teorema 5.5.13 ([Via97]). *Se $\nu \in \mathcal{M}(I_*)$ é uma medida f -invariante absolutamente contínua então existe uma constante positiva $C > 0$ tal que $\nu = C\mu$ onde μ é a medida construída em 5.4.13.*

O leitor que estiver interessado também pode consultar [CI96] para mais informações sobre as técnicas utilizadas no teorema anterior. Vamos concluir este capítulo com uma propriedade bastante interessante sobre os mapas com pontos fixos neutros em relação a sua hiperbolicidade: ainda que estes mapas pareçam ser hiperbólicos em quase todos os seus pontos do espaço de fase (com exceção do ponto fixo neutro), o próximo corolário diz que esta intuição não se confirma e que seus expoentes de Lyapunov são nulos exceto por um conjunto de medida de Lebesgue nula.

Corolário 5.5.14. *Para $x \in I_*$ Lebesgue quase todo ponto, vale o seguinte limite:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |df^n(x)| = 0$$

Demonstração. Para provar este corolário, basta aplicar diretamente o teorema 5.1.4 à função $\varphi(x) = \log |df(x)|$. Esta é uma função contínua em $p = 0$ pois f é de classe C^2 em $[0, c]$ e além disso, $\varphi(0) = 0$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log |df^n(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |df(f^j(x))| = 0$$

Para $x \in I_*$ Lebesgue quase todo ponto, como queríamos provar. \square

Além dos resultados exibidos, uma pergunta que pode ser feita é se é possível garantir resultados semelhantes sobre mapas com pontos fixos neutros com ordens de tangência distintas do exemplo estudado neste capítulo. Mais especificamente, o que podemos dizer sobre o mapa se for exigido que a derivada

segunda na origem satisfaça condições adicionais e como isso influencia seu comportamento estatístico? Muito do interesse nestas perguntas surge da necessidade de entender qualitativamente sistemas que apresentam comportamento semelhante ao do mapa com pontos fixos neutrais, onde há expansão em quase todo seu espaço de fase, com exceção de alguns pontos.

Em [You99], na tentativa de entender estes sistemas, Lai-Sang Young desenvolve um método para estudar taxas de recorrência e velocidade de mixing em um contexto mais abstrato, sem recorrer ao operador de transferência. Como consequência, na parte II deste mesmo artigo, utilizam-se os métodos estudados para compreender o comportamento estatístico de mapas do círculo com pontos fixos neutrais que satisfazem a seguinte propriedade: existe $C > 0$ e $\gamma > 0$ tal que para todo $x \neq 0$:

$$C^{-1}x^\gamma \leq -xf''(x) \leq Cx^\gamma \quad (5.28)$$

O caso $\gamma = 1$ corresponde-se ao exemplo estudado neste capítulo. Generalizando os teoremas 5.1.3 e 5.1.4, Lai-Sang Young obtém no teorema 5 em [You99] o seguinte resultado sobre existência de medidas invariantes absolutamente contínuas para mapas com pontos fixos neutrais para diferentes valores de $\gamma > 0$.

Teorema 5.5.15 (Lai-Sang Young). *Seja $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um mapa com ponto fixo neutral em $x = 0$ satisfazendo 5.28. Então:*

a) *Se $\gamma \geq 1$ então para $x \in \mathbb{S}^1$ m-q.t.p. temos:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)} = \delta_0$$

Onde o limite é com respeito a topologia fraca-. Além disso, não existem medidas invariantes absolutamente contínuas finitas neste caso.*

b) *Se $\gamma < 1$ então f admite uma medida invariante absolutamente contínua finita μ . Além disso, o par (f, μ) é mixing.*

Difeomorfismos quase-Anosov

6.1 introdução

Na década de 70, um resultado famoso provado por Sinai em [Sin72] diz que todo difeomorfismo de Anosov transitivo e de classe C^2 admite uma medida física SBR. Assim como vimos para o caso das aplicações expansoras, este sistema dinâmico é **caótico** no seguinte sentido: seus expoentes de Lyapunov são positivos quase todo ponto e sua entropia topológica é igual a soma de seus expoentes de Lyapunov positivos. Além disso, o par (f, μ) é mensuravelmente-conjugado a um shift de Bernoulli e possui decaimento exponencial de correlações para funções contínuas (α, ν) -Hölder. Estes resultados foram estendidos por Bowen e Ruelle para difeomorfismos axioma A também na década de 70 (ver [Bow75]).

Levando em conta os resultados conhecidos acima, neste capítulo estamos interessados em investigar as consequências da ausência de hiperbolicidade uniforme no comportamento estatístico de um difeomorfismo. Mais especificamente, estamos interessados em explorar a seguinte pergunta: dado um difeomorfismo numa superfície compacta que aparenta ser hiperbólico em quase todo o seu espaço de fase, é possível determinar a existência ou não de uma medida SBR? Até o momento, existem muitos trabalhos que procuram explorar esta questão no contexto parcialmente hiperbólico (ver [Pes76] e [LS+81]). Enquanto algumas propriedades das medidas SBR ainda se mantêm neste caso, a existência destas medidas neste contexto ainda é muito pouco entendida.

Assim como fizemos no último capítulo onde procuramos responder uma questão de natureza semelhante, procurando responder parcialmente a pergunta feita no parágrafo anterior, vamos apresentar uma classe muito especial de difeomorfismos chamada de **difeomorfismos quase-Anosov**.

Definição 6.1.1. *Seja M uma variedade Riemanniana e compacta de dimensão 2. Dizemos que um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^2(M)$ é **quase-Anosov** se f satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) f possui um ponto fixo $p \in M$.
- (ii) Existe uma constante $0 < \kappa^s < 1$ e uma função contínua $\kappa^u : M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $\kappa^u(p) = 1$ e $\kappa^u(x) > 1$ para todo $x \in M$ tal que $x \neq p$, e existe uma decomposição $TM = E^s \oplus E^u$ de modo que para todo $x \in M$ e $v^s \in E^s(x), v^u \in E^u(x)$ temos:

$$\begin{aligned} \|df(x)v^s\| &\leq \kappa^s \|v^s\| \\ \|df(x)v^u\| &\geq \kappa^u(x) \|v^u\| \end{aligned}$$

$$\|df(p)v^u\| = \|v^u\|$$

onde $df(x)(E^s(x)) = E^s(f(x))$ e $df(x)(E^u(x)) = E^u(f(x))$ para todo $x \in M$.

(iii) f é topologicamente transitivo.

Dizemos que E^s e E^u são os fibrados **estável** e **instável**, respectivamente. Uma primeira observação sobre esses difeomorfismos é que eles são hiperbólicos em quase todos os seus pontos do espaço de fase, com exceção de um único ponto fixo p onde coexistem uma direção contrativa e outra indiferente. Além disso, é possível construir exemplos de difeomorfismos quase-Anosov no toro com uma dinâmica tão caótica quanto um Arnold Cat Map, obtidos a partir de pequenas deformações do mesmo na origem. Ainda que os difeomorfismos quase-Anosov sejam bastante complicados do ponto de vista da dinâmica topológica, o próximo teorema a ser provado neste capítulo mostra que isto não é o suficiente para a existência de medidas SBR.

Teorema 6.1.2 (Hu-Young). *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo quase-Anosov, então f não admite medidas SBR.*

Por outro lado, por mais que difeomorfismos quase-Anosov não admitam medidas SBR, o próximo teorema garante a existência de uma medida invariante com um papel semelhante à medida *infinita* obtida no exemplo do capítulo anterior. Esta medida pode ser pensada como uma medida SBR *infinita* para f que dá peso infinito ao ponto fixo p do difeomorfismo quase-Anosov.

Teorema 6.1.3 (Hu-Young). *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo quase-Anosov numa superfície compacta então existe uma medida $\bar{\mu}$ que é f -invariante, **infinita** satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) *Para toda vizinhança aberta $U \ni p$ de p temos $\bar{\mu}(M \setminus U) < +\infty$.*

(ii) *$\bar{\mu}$ tem medidas condicionais absolutamente contínuas em variedades fracamente instáveis.*

Assim como vimos no caso dos mapas com pontos fixos neutrais, vimos que existem exemplos destas aplicações cujo comportamento dinâmico é tão caótico quanto um shift de dois símbolos, mas que do ponto de vista da estatística é trivial no seguinte sentido: todas as trajetórias de quase toda condição inicial passam em média cem por cento do seu tempo perto do ponto fixo na origem. Vamos mostrar que para os difeomorfismos quase-Anosov também vale o mesmo resultado:

Teorema 6.1.4 (Hu-Young). *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo quase-Anosov e $p \in M$ é o ponto fixo de f satisfazendo a condição (i) da definição 6.1.1, então a medida Delta de Dirac δ_p é a única medida física de f . Em particular, para toda função contínua $\varphi \in C^0(M)$:*

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) \rightarrow \varphi(p) \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

Os resultados presentes neste capítulo devem ser pensados como uma versão em dimensão 2 do resultado exibido para mapas com pontos fixos neutrais no capítulo anterior. Observe entretanto que a situação presente aqui não é totalmente idêntica ao estudo destes mapas, pois existem difeomorfismos que preservam área com expoentes de Lyapunov positivos e pontos fixos não-hiperbólicos.

6.2 Decomposição Dominada

Antes de começar a estudar mais profundamente a classe de aplicações definida na sessão anterior, vamos introduzir uma propriedade fundamental da teoria parcialmente hiperbólica de difeomorfismos, chamada de **decomposição dominada**, dos quais os difeomorfismos quase-Anosov compartilham. Nesta sessão, vamos supor que M é uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana e $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r onde $r \geq 1$.

Definição 6.2.1. Dizemos que um compacto $\Lambda \subset M$ f -invariante admite uma **decomposição dominada** se existe uma decomposição $T_\Lambda M = E \oplus F$ do fibrado tangente ao longo de Λ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) E e F são subfibrados df -invariantes, isto é, $df(x)(E(x)) = E(f(x))$ e $df(x)(F(x)) = F(f(x))$ para todo $x \in \Lambda$.
- (ii) Existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que para todo $x \in \Lambda$, $n \geq 1$ e $u \in E(x)$, $v \in F(x)$ não-nulos:

$$\frac{\|df^n(x)u\|}{\|u\|} \leq C\lambda^n \frac{\|df^n(x)v\|}{\|v\|} \quad (6.1)$$

A desigualdade 6.1 acima significa que após um grande número de iterados o tamanho dos vetores de F é exponencialmente maior do que os vetores de E . Por este motivo, dizemos que a decomposição é dominada.

Observação 6.2.2. Se uma decomposição $T_\Lambda M = E \oplus F$ é dominada com respeito a uma métrica Riemanniana g em M então esta decomposição também é dominada para qualquer outra métrica Riemanniana h equivalente a g . Em particular, se M é compacto então uma decomposição $T_\Lambda M$ é dominada com respeito a uma métrica Riemanniana g se e somente se é dominada com respeito a qualquer outra métrica Riemanniana h de M , pois numa variedade compacta todas as métricas Riemannianas são equivalentes.

Observação 6.2.3. Se $T_\Lambda M = E \oplus F$ é uma decomposição dominada então vale uma propriedade análoga para 6.1 quando $n \rightarrow -\infty$:

$$\frac{\|df^n(x)v\|}{\|v\|} \leq C\lambda^{-n} \frac{\|df^n(x)u\|}{\|u\|}$$

Para todo $n \leq 0$, $x \in \Lambda$ e $u \in E$, $v \in F$. De fato, temos para todo $n \leq 0$:

$$\frac{\|df^n(x)u\|}{\|u\|} = \frac{\|df^n(x)u\|}{\|df^{-n}(f^n(x))df^n(x)u\|} \geq C^{-1}\lambda^n \frac{\|df^n(x)u\|}{\|df^{-n}(f^n(x))df^n(x)u\|} = C^{-1}\lambda^n \frac{\|df^n(x)v\|}{\|v\|}$$

Ou seja, ao contrário do que ocorre quando n tende para o futuro, quando n tende para o passado, o fibrado E **domina** o fibrado F .

Exemplo 6.2.4. A decomposição $TM = E^s \oplus E^u$ do fibrado tangente de um difeomorfismo quase-Anosov em dois fibrados E^s e E^u é uma decomposição dominada, com constante:

$$\kappa^s = \sup_{x \in M} \frac{\kappa^s}{\kappa^u(x)}$$

Vale comentar que a decomposição quase-Anosov é melhor do que a decomposição dominada, pois a primeira é uma decomposição parcialmente hiperbólica do tipo $TM = E^s \oplus E^{cu}$. Salientamos também que os argumentos deste capítulo vão se beneficiar em larga medida de que f é parcialmente hiperbólico em dimensão dois.

Vejam agora algumas das propriedades fundamentais de uma decomposição dominada. A primeira que vamos exibir diz respeito ao afastamento uniforme do ângulo entre os fibrados E e F e mostra que numa decomposição dominada, o ângulo entre estes fibrados é sempre maior do que uma constante positiva.

Proposição 6.2.5 (Ângulo uniforme). *Existe uma constante $\theta \in (0, 1)$ tal que se $x \in \Lambda$ e $u \in E(x)$, $v \in F(x)$ são unitários então $|\langle u, v \rangle| \leq \theta$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que não. Então para todo $n \geq 1$ existem $x_n \in \Lambda$ e $u_n \in E(x_n)$, $v_n \in F(x_n)$ unitários tais que para todo $n \geq 1$:

$$|\langle u_n, v_n \rangle| > 1 - \frac{1}{n} \quad (6.2)$$

Pela compacidade de Λ , podemos supor que $x_n \rightarrow x \in \Lambda$ e que $u_n \rightarrow u$, $v_n \rightarrow v$ quando $n \rightarrow +\infty$, onde $u, v \in T_x M$ também são unitários. Pela hipótese 6.2, temos que $|\langle u, v \rangle| = 1$ e portanto, a menos de substituir u_n por $-u_n$ na sequência acima, podemos supor que $u = v$ pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Agora, fixe $m \geq 1$ tal que $C\lambda^m < 1/2$. Então, por continuidade:

$$\|df^m(x)u\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|df^m(x_n)u_n\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|df^m(x_n)v_n\|$$

Assim, para $n \geq 1$ suficientemente grande temos:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\|df^m(x_n)u_n\|}{\|df^m(x_n)v_n\|} \leq C\lambda^m < \frac{1}{2}$$

O que é absurdo, concluindo a demonstração da proposição. \square

Mais geralmente, também podemos falar em decomposição dominada incluindo vários subfibrados.

Definição 6.2.6. *Seja $T_\Lambda M = E^1 \oplus \dots \oplus E^k$ uma decomposição de $T_\Lambda M$ em k subfibrados E^i ao longo de Λ . Dizemos que esta decomposição é **dominada** se:*

(i) $df(E^i(x)) = E^i(f(x))$ para todo $x \in \Lambda$ e $i = 1, \dots, k$.

(ii) *Existem constante $C > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que para todo $l = 1, \dots, k - 1$ e $v_l \in E^l(x)$, $v_{l+1} \in E^{l+1}(x)$ vale para todo $n \geq 1$:*

$$\frac{\|df^n(x)v_l\|}{\|v_l\|} \leq C\lambda^n \frac{\|df^n(x)v_{l+1}\|}{\|v_{l+1}\|}$$

A próxima proposição mostra que dada uma decomposição dominada em vários subfibrados, sempre podemos rearranjá-los de modo a obter novas decomposições dominadas. Vamos provar isso para o caso de uma decomposição dominada em três subfibrados. O caso geral é obtido aplicando a próxima proposição sucessivas vezes.

Proposição 6.2.7. *Seja $H \oplus G \oplus F$ uma decomposição dominada de um subfibrado do fibrado tangente ao longo de Λ . Seja $E = H \oplus G$. Então, $E \oplus F$ é uma decomposição dominada.*

Antes de provar esta proposição, o seguinte lema de geometria em espaços vetoriais munidos com produto interno será útil. Este lema afirma que se um vetor se decompõe em dois e temos uma estimativa para o afastamento entre o ângulo de cada uma das partes da decomposição, então o comprimento deste vetor é comparável ao comprimento de cada uma das partes por uma constante que depende apenas da estimativa de afastamento para o ângulo.

Lema 6.2.8 (Lema de geometria). *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita munido com produto interno. Suponha que $|\langle v_1, v_2 \rangle| < \theta$. Então, existe $\gamma = \gamma(\theta)$ de modo que sempre que $w = v_1 + v_2$ então $\|w\| \geq \gamma \|v_j\|$ onde $j = 1, 2$.*

Demonstração. Denotando por w_1 e w_2 as projeções ortogonais de w em v_1 e v_2 respectivamente, basta observar que em um espaço vetorial de dimensão finita munido com produto interno, temos sempre $\|w\| \geq \|w_1\|$ e $\|w\| \geq \|w_2\|$. Logo,

$$\|w_1\| = \frac{|\langle v_1, v_2 \rangle|}{\|v_2\|} = \frac{|\langle v_1, v_2 \rangle|}{\|v_1\| \|v_2\|} \|v_1\| = \cos \angle(v_1, v_2) \|v_1\|$$

Analogamente, $\|w_2\| = \cos \angle(v_1, v_2) \|v_2\|$. Como $|\langle v_1, v_2 \rangle| < \theta < 1$ então $\cos \angle(v_1, v_2) > 0$ e portanto, tomando $0 < \gamma < \cos \angle(v_1, v_2)$ obtemos o resultado desejado. \square

Prova da proposição 6.2.7. Explicitamente, queremos mostrar que existe uma constante $\tilde{C} > 0$ e $\tilde{\lambda} \in (0, 1)$ de modo que para todo $x \in \Lambda$ e $u \in E(x), v \in F(x)$ então para todo $n \geq 1$:

$$\frac{\|df^n(x)u\|}{\|u\|} \leq \tilde{C} \tilde{\lambda}^n \frac{\|df^n(x)v\|}{\|v\|}$$

Com este propósito, pela linearidade de $df^n(x)$ basta provar a desigualdade acima quando u é unitário. Escreva $u = u_1 + u_2$ onde $u_1 \in G(x)$ e $u_2 \in H(x)$. Combinando a proposição 6.2.5 e o lema 6.2.8, vimos que existe $\gamma > 0$ que independe de $x \in \Lambda$ tal que $\|u\| \geq \gamma \|u_j\|$ onde $j = 1, 2$. Em particular,

$$\frac{\|df^n(x)u_j\|}{\|u\|} \leq \gamma^{-1} \frac{\|df^n(x)u_j\|}{\|u_j\|}$$

Portanto, combinando a desigualdade acima com a decomposição dominada obtemos:

$$\begin{aligned} \|df^n(x)u\| &\leq \frac{\|df^n(x)u_1\|}{\|u\|} + \frac{\|df^n(x)u_2\|}{\|u\|} \\ &\leq \gamma^{-1} \left(\frac{\|df^n(x)u_1\|}{\|u_1\|} + \frac{\|df^n(x)u_2\|}{\|u_2\|} \right) \\ &\leq \gamma^{-1} \left(C \lambda^n \frac{\|df^n(x)u_2\|}{\|u_2\|} + \frac{\|df^n(x)u_2\|}{\|u_2\|} \right) \\ &\leq \gamma^{-1} \left(C^2 \lambda^{2n} \frac{\|df^n(x)v\|}{\|v\|} + C \lambda^n \frac{\|df^n(x)v\|}{\|v\|} \right) \\ &\leq 2\gamma^{-1} C(C+1) \lambda^n \frac{\|df^n(x)v\|}{\|v\|} \end{aligned}$$

Assim, basta tomar $\tilde{C} = 2\gamma^{-1}C(C+1)$ e $\tilde{\lambda} = \lambda$ para completar a demonstração. \square

Vamos mostrar agora que, fixados as quantidades de fibrados e suas dimensões, a decomposição dominada quando existe é única. Novamente, vamos mostrar apenas para o caso de uma decomposição dominada em dois subfibrados pois o caso geral é obtido por indução, combinando o lema anterior com este caso particular.

Proposição 6.2.9 (Unicidade da decomposição dominada). *Suponha que existam decomposições dominadas $T_\Lambda M = E \oplus F = G \oplus H$. Se $\dim E(x) \leq \dim G(x)$ para algum $x \in \Lambda$ então $E(x) \subset G(x)$.*

Demonstração. Antes, a seguinte afirmação será útil para provar esta proposição: se $u \in E(x)$ se escreve como $u = u_G + u_H$ onde $u_G \in G(x)$ e $u_H \in H(x)$ então $u_G \in G(x) \cap E(x)$ e $u_H \in H(x) \cap E(x)$. Com efeito, escreva $u_H = u_E + u_F$ onde $u_E \in E(x)$ e $u_F \in F(x)$. Vamos mostrar que necessariamente temos $u_F = 0$. Isso garante em particular que $u_H = u_E \in E(x)$ e $u_G = u - u_H \in E(x)$, o que seria suficiente para o propósito acima.

Suponha por contradição que $u_F \neq 0$. Observe que para cada decomposição dominada $E \oplus F$ e $G \oplus H$ existem pela proposição 6.2.5, constantes θ_1 e θ_2 tais que $|\langle v_E, v_F \rangle| > \theta_1$ e $|\langle v_G, v_H \rangle| > \theta_2$ para todo $v_E \in E(x)$, $v_F \in F(x)$ e $v_G \in G(x)$ e $v_H \in H(x)$. Tome $\theta < \min\{\theta_1, \theta_2\}$. Então, pelo lema 6.2.8, existe $0 < \gamma < \theta$ que não depende de $x \in \Lambda$ de modo que para todo $n \geq 1$ vale:

$$\|df^n(x)u\| \geq \gamma \|df^n(x)u_H\| \text{ e } \|df^n(x)u_H\| \geq \gamma \|df^n(x)u_F\|$$

Combinando as desigualdades anteriores com a dominação $E \oplus F$ obtemos para todo $n \geq 1$:

$$C\lambda^n \geq \frac{\|df^n(x)u\|}{\|df^n(x)u_F\|} \geq \gamma^2$$

O que é absurdo. Isso mostra que $u_F = 0$.

Analogamente, mostra-se que se $v = v_E + v_F \in G(x)$ então $v_E \in E(x) \cap G(x)$ e $v_F \in F(x) \cap G(x)$.

Para completar a prova, suponha por absurdo $E(x)$ não esteja contido em $G(x)$. Então, existe $u \in E(x) \setminus \{0\}$ que se escreve como $u = u_G + u_H$ com $u_H \neq 0$. Como estamos supondo que $\dim(E(x)) \leq \dim(G(x))$ e que $E(x)$ e $G(x)$ não são iguais, então existe uma decomposição $v = v_E + v_F \in G(x)$ onde $v_F \neq 0$ (pois caso contrário, teríamos $G(x) \subset E(x)$ o que não pode ocorrer). Além disso, pelo fato provado acima temos $v_F \in G(x)$. Logo, como H domina G e $\|df^n(x)u\| \geq \gamma \|df^n(x)u_H\|$ para todo $n \geq 1$ então:

$$C^{-1}\lambda^{-n} \leq \frac{\|df^n(x)v_F\|}{\|df^n(x)u\|} \leq \gamma^{-1} \frac{\|df^n(x)v_F\|}{\|df^n(x)u_H\|} \leq \gamma^{-1} C\lambda^n$$

Para todo $n \geq 1$, o que é absurdo. Portanto, $E(x) \subset G(x)$. □

Corolário 6.2.10. *Suponha que existam decomposições dominadas $E \oplus F$ e $G \oplus H$. Se $\dim E(x) = \dim G(x)$ e $\dim F(x) = \dim H(x)$ para todo $x \in \Lambda$ então $E = G$ e $F = H$. Ou seja, fixado o número de fibrados e suas dimensões, a decomposição dominada é única.*

Demonstração. A prova deste corolário é uma aplicação direta da proposição anterior. □

Nesta parte, vamos assumir que o leitor esteja familiarizado com a noção de distribuição e uma boa referência pode ser encontrada no capítulo 2 em [CN13]. Assim, lembre-se de que se $x_k \rightarrow x \in \Lambda$, então uma sequência de subespaços $E(x_k)$ de dimensão m converge para um subespaço $E(x)$ de dimensão m se e somente se para cada $k \geq 1$ existe uma base $\{e(x_k)^1, \dots, e(x_k)^m\}$ de $E(x_k)$ e uma base $\{e_1, \dots, e_m\}$

de $E(x)$ de tal modo que $e(x_k)^j \rightarrow e_j$ quando $k \rightarrow +\infty$ para cada $1 \leq j \leq m$. Isso fornece uma topologia para a Grassmanniana de M de dimensão m :

$$G^m(M) = \{V; V \text{ é um subespaço de dimensão } m \text{ de } T_x M, x \in M\}$$

Pode ser provado que este é um espaço topológico compacto e possui uma estrutura de variedade diferenciável. Uma seção $x \mapsto E(x) \in G^m(M)$ deste espaço é contínua se para todo ponto $p \in M$ existe uma vizinhança $U \ni p$ e campos de vetores contínuos E^1, \dots, E^m linearmente independentes em U que satisfazem $\langle E^1(x), \dots, E^m(x) \rangle = E(x)$ para todo $x \in U$.

Proposição 6.2.11. *Seja $T_\Lambda M = E \oplus F$ uma decomposição dominada. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $x \mapsto \dim E(x)$ e $x \mapsto \dim F(x)$ são localmente constantes.
- (ii) As seções $x \mapsto E(x)$ e $x \mapsto F(x)$ são contínuas.

Demonstração. Supondo que $x \mapsto E(x)$ e $x \mapsto F(x)$ sejam seções contínuas, para provar que $x \mapsto \dim E(x)$ e $x \mapsto \dim F(x)$ são localmente constantes, fixe $p \in M$ e seja $U \ni p$ uma vizinhança de p onde existem campos contínuos linearmente independentes E^1, \dots, E^m e F^1, \dots, F^k que geram $E(x)$ e $F(x)$ respectivamente para cada $x \in U$. Em particular, $\dim E(x) = m$ e $\dim F(x) = k$ para todo $x \in U$, o que mostra que ambas as funções $x \mapsto \dim E(x)$ e $x \mapsto \dim F(x)$ são constantes. Como p foi tomado arbitrariamente, segue que ambas as funções são localmente constantes em M .

Agora, supondo que (i) seja verdade, vamos mostrar que se $x_k \rightarrow x \in \Lambda$ e $E(x_k)$ converge para um subespaço $G(x)$ de $T_x M$ então temos necessariamente que $G(x) = E(x)$. Observe primeiramente que como $x \mapsto \dim E(x)$ é localmente constante então $\dim E(x) = \dim G(x)$. Passando a uma subsequência se necessário, como a Grassmanniana $G^m(M)$ é compacta então podemos supor que $F(x_k)$ converge para um subespaço $H(x)$ de $T_x M$ onde $\dim H(x) = \dim F(x)$, pois $x \mapsto \dim F(x)$ também é localmente constante. Vamos mostrar que vale a seguinte desigualdade para todo $u \in G(x)$, $v \in H(x)$ e $n \geq 1$:

$$\frac{\|df^n(x)u\|}{\|u\|} \leq C\lambda^n \frac{\|df^n(x)v\|}{\|v\|} \quad (6.3)$$

De fato, fixado $n \geq 1$ e $u \in G(x)$, $v \in H(x)$, sejam $u_k \in E(x_k)$ e $v_k \in F(x_k)$ sequências tais que $u_k \rightarrow u$ e $v_k \rightarrow v$ quando $k \rightarrow +\infty$. Então, pela decomposição dominada $T_\lambda M = E \oplus F$ temos para todo $k \geq 1$:

$$\frac{\|df^n(x_k)u_k\|}{\|u_k\|} \leq C\lambda^n \frac{\|df^n(x_k)v_k\|}{\|v_k\|}$$

Logo, a desigualdade 6.3 segue pela continuidade da derivada e passando o limite quando $k \rightarrow +\infty$. Isso mostra que $T_x M = G(x) \oplus H(x)$ é uma decomposição dominada do espaço tangente em x e portanto, usando o fato de que $\dim G(x) = \dim E(x)$ e a unicidade da decomposição dominada (ver proposição 6.2.9) segue que $G(x) = E(x)$, o que prova a continuidade desta seção. A prova de que $x \mapsto F(x)$ é contínua é análoga. \square

Segue como consequência imediata da proposição anterior que uma decomposição dominada $T_\Lambda M = E \oplus F$ em dois subfibrados, cujas fibras tem dimensão constante em M , são contínuos.

6.3 Propriedades básicas

Agora, vamos estabelecer algumas propriedades dinâmicas básicas dos difeomorfismos quase-Anosov que usaremos ao longo de todo o texto. Gostaríamos de reiterar que a decomposição $TM = E^s \oplus E^u$ do fibrado tangente de um difeomorfismo quase-Anosov em um fibrado *estável* e outro *quase-instável* é uma decomposição dominada. Como consequência, já podemos obter algumas propriedades a partir da discussão feita na sessão anterior acerca dos difeomorfismos quase-Anosov. A primeira delas é um corolário do teorema 6.2.11:

Corolário 6.3.1 (Continuidade dos fibrados estável e quase-instável). *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo quase-Anosov então os fibrados $x \mapsto E^s(x)$ e $x \mapsto E^u(x)$ são contínuos.*

Na verdade, é possível garantir uma regularidade ainda maior sobre o fibrado estável de um difeomorfismo quase-Anosov, como o seguinte teorema mostra:

Teorema 6.3.2 ([BS02]). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^2 parcialmente hiperbólico, com decomposição $TM = E^s \oplus F$ em uma variedade compacta M . Então, o fibrado estável é α -Hölder.*

Uma prova deste teorema pode ser encontrada no teorema 6.1.3 em [BS02] e não será feita para não carregar excessivamente este texto. A seguinte propriedade sobre os difeomorfismos quase-Anosov revela uma característica intrínseca desses sistemas que nem toda decomposição dominada compartilha:

Proposição 6.3.3. *Seja $v = v^s + v^u \in T_x M$ unitário, onde $v^s \in E^s(x)$ e $v^u \in E^u(x)$. Então, valem as seguintes propriedades:*

- (i) *Se $v^u \neq 0$ então $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v\| \geq 0$.*
- (ii) *Se $v^s \neq 0$ então $\limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v\| < 0$.*

Demonstração. Fixado $n \geq 1$ qualquer, e supondo que $v^u \neq 0$, temos pela desigualdade triangular e pela decomposição dominada do difeomorfismo quase-Anosov que:

$$\|df^n(x)v\| \geq \|df^n(x)v^u\| - \|df^n(x)v^s\| \geq \|df^n(x)v^u\| \left(1 - \lambda^n \frac{\|v^s\|}{\|v^u\|}\right)$$

Onde $\lambda \in (0, 1)$ é a constante de dominação que aparece no exemplo 6.2.4. Em particular, tomando o logaritmo na desigualdade acima e dividindo por n obtemos:

$$\frac{1}{n} \log \|df^n(x)v\| \geq \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v^u\| + \frac{1}{n} \log \left(1 - \lambda^n \frac{\|v^s\|}{\|v^u\|}\right)$$

Por outro lado, como a segunda parcela da soma acima converge a zero quando $n \rightarrow +\infty$ então:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v\| \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v^u\| \tag{6.4}$$

Agora, usando que o difeomorfismo é quase-Anosov, temos que para todo $n \geq 1$ vale a seguinte desigualdade:

$$\|df^n(x)v^u\| \geq \left(\prod_{j=0}^{n-1} \kappa^u(f^j(x)) \right) \|v^u\|$$

Logo, aplicando o logaritmo na desigualdade e dividindo por n , obtemos que para todo $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n} \|df^n(x)v^u\| \geq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \kappa^u(f^j(x)) + \frac{1}{n} \log \|v^u\|$$

Com a desigualdade anterior e 6.4, concluímos que:

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v\| \geq 0$$

A ideia para provar o item (ii) é a mesma, com excessão de algumas pequenas alterações. Supondo que $v^s \neq 0$, pela desigualdade triangular e pela observação 6.2.3, temos para $n \leq 0$:

$$\begin{aligned} \|df^n(x)v\| &\geq \|df^n(x)v^s\| - \|df^n(x)v^u\| \\ &\geq \|df^n(x)v^s\| \left(1 - \lambda^{-n} \frac{\|v^u\|}{\|v^s\|}\right) \end{aligned}$$

Onde $\lambda \in (0, 1)$ é novamente a constante de dominação do difeomorfismo quase-Anosov. Em particular, da desigualdade acima, obtemos:

$$\|df^n(x)v\|^{-1} \leq \|df^n(x)v^s\|^{-1} \left(1 - \lambda^{-n} \frac{\|v^u\|}{\|v^s\|}\right)^{-1}$$

Assim como fizemos no item (i), tomando o logaritmo da desigualdade acima e dividindo por $-n$:

$$\frac{1}{n} \log \|df^n(x)v\| \leq \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v^s\| + \frac{1}{n} \log \left(1 - \lambda^{-n} \frac{\|v^u\|}{\|v^s\|}\right)$$

Como a segunda parcela da soma acima também converge a zero quando $n \rightarrow -\infty$ então concluímos que:

$$\limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v\| \leq \limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v^s\| \quad (6.5)$$

Por outro lado, como f é um difeomorfismo quase-Anosov então vale $\|df^n(x)v^s\|^{-1} \leq (\kappa^s)^{-n} \|v^s\|^{-1}$ para todo $n \leq 0$. Assim, por argumento análogo ao do item (i), concluímos a partir da desigualdade 6.5 que:

$$\limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v\| \leq \limsup_{n \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v^s\| \leq \log \kappa^s < 0$$

□

Suponha que $x \in M$ seja um ponto regular de M (veja o teorema 1.2.1 na introdução) e sejam $\chi_1 < 0 < \chi_2$ expoentes de Lyapunov de f no ponto x . Observe que neste caso, existem duas decomposições distintas em $T_x M$ associadas a objetos distintos: a primeira provém do difeomorfismo quase-Anosov, dada por $TM = E^s \oplus E^u$ e a segunda é a decomposição de $T_x M = F^1 \oplus F^2$ associada aos expoentes de Lyapunov negativo e positivo, respectivamente. Como consequência da decomposição quase-Anosov e da proposição anterior, vamos mostrar que estas decomposições são de fato iguais. Mais especificamente:

Corolário 6.3.4. *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo quase-Anosov e $x \in M$ é um ponto regular com decomposição $T_x M = F^1 \oplus F^2$ onde F^1, F^2 estão associados aos expoentes de Lyapunov negativo e positivo, respectivamente, então $F^1 = E^s(x)$ e $F^2 = E^u(x)$.*

Demonstração. Dado $v = v^s + v^u \in F^1$, basta observar que $v^u \neq 0$. De fato, caso contrário, a proposição anterior garante que o limite abaixo satisfaz:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(x)v\| \geq 0$$

Mas, isto não pode ocorrer pois $v \in F^1$, o que contradiz o fato de que o limite acima deve convergir para o expoente de Lyapunov negativo χ_1 . Logo, $v^u = 0$ e portanto $F^1 \subset E^s(x)$, mostrando que $E^s(x) = F^1$ pois ambos têm dimensão um. Aplicando o mesmo argumento e usando a proposição anterior, mostra-se de forma análoga que $E^u(x) = F^2$. \square

Definição 6.3.5. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e $1 \leq n < m$. Dizemos que um atlas $\mathcal{F} = \{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$ de classe C^0 é uma **folheação contínua de dimensão n com folhas de classe C^r** ($r \geq 1$) se satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *Para todo $i \in I$ existem abertos $U_i^1 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ e $U_i^2 \subset \mathbb{R}^n$ tais que $\phi_i(U_i) = U_i^1 \times U_i^2$.*
- (ii) *Para todo $i, j \in I$ tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a função de transição $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ é um homeomorfismo que satisfaz:*

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x, y) = (f(x, y), h(y))$$

Para todo $(x, y) \in U_i^1 \times U_i^2$.

- (iii) *As folhas são subvariedades imersas de M de classe C^r e dimensão n .*

Esta definição difere da presente em [CN13], pois neste texto não se exige nenhuma condição sobre a regularidade das folhas. Esta distinção é comum em dinâmica pois é bastante frequente encontrar exemplos de folheações por variedades estáveis e instáveis em conjuntos hiperbólicos dadas por difeomorfismos, cujas funções de transição entre as cartas sejam apenas contínuas, mas com folhas tão regulares quanto o difeomorfismo. Este tipo de situação ocorre por exemplo, na presença de um conjunto hiperbólico para um difeomorfismo de classe C^r , onde existe um par de folheações contínuas com folhas de classe C^r dadas pelas variedades estável e instável.

O próximo teorema que vamos apenas enunciar, também garante que para os difeomorfismos quase-Anosov, as folheações estável e instável são contínuas e suas folhas são gráfico de funções de classe C^2 (em particular, as folhas são de classe C^2). Um esboço de sua demonstração pode ser encontrado na proposição 2.2 em [HY95].

Teorema 6.3.6. *Existem duas folheações contínuas \mathcal{F}^s e \mathcal{F}^u que satisfazem as seguintes propriedades:*

- (1) *$T_x \mathcal{F}^s = E^s(x)$ e $T_x \mathcal{F}^u = E^u(x)$ para todo $x \in M$.*
- (2) *Para todo $x \in M$, $\mathcal{F}^s(x)$ é a **variedade estável global no ponto x** e $\mathcal{F}^u(x)$ é **variedade fracamente instável global no ponto x** . Mais especificamente: $\mathcal{F}^s(x) = \{y \in M; \text{existe } C_y > 0 \text{ tal que } d(f^n(x), f^n(y)) \leq C_y \kappa^{sn} d(x, y)\}$ e $\mathcal{F}^u(x) = \{y \in M; d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}$.*
- (3) *Existem constantes $\beta > 0$ e $D > 0$ tais que para todo $x \in M$, se $\mathcal{F}_\beta^u(x) = \mathcal{F}^u(x) \cap \text{exp}_x(E_\beta^u(x))$ então existe $\varphi : E_\beta^u(x) \rightarrow E_\beta^s(x)$ de Lipschitz satisfazendo $\varphi(0_x) = 0_x$ e $\|\varphi_x\|_{C^2} \leq D$, onde exp_x é a aplicação exponencial de M em x . O mesmo vale para $\mathcal{F}_\beta^s(x)$.*

6.4 Propriedades das folheações estável e instável

Nesta sessão veremos algumas propriedades dinâmicas da folheação estável e instável para a classe de difeomorfismos quase-Anosov. Lembre-se de que no último capítulo, as folheações estável e instável são contínuas e suas folhas são de classe C^2 , ou seja, para cada $x \in M$, $\mathcal{W}_\beta^s(x)$ e $\mathcal{W}_\beta^u(x)$ são gráfico de uma função de classe C^2 , que variam continuamente. Vamos denotar também por \mathcal{W}^s e \mathcal{W}^u as folheações estável e instável, respectivamente.

Holonomia Lipschitz

Seja \mathcal{F} uma folheação de classe C^r ($r \geq 0$) em M e seja \mathcal{F}^\perp uma folheação local transversal a \mathcal{F} , isto é, $T_x M = T_x \mathcal{F} \oplus T_x \mathcal{F}^\perp$ para todo $x \in M$. Se Σ_1 e Σ_2 são pedaços compactos de folhas da folheação \mathcal{F}^\perp , definimos uma aplicação $\theta : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ chamada de **aplicação de holonomia** de tal modo que para cada $x \in \Sigma_1$, escolhamos $\theta(x)$ como o único ponto da interseção $\mathcal{F}(x) \cap \Sigma_2$.

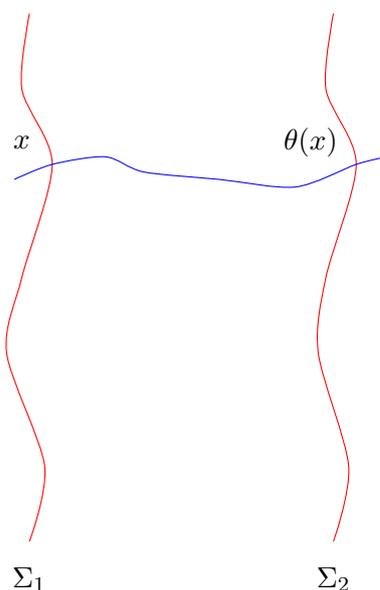


Figura 6.1: Exemplo de uma aplicação de holonomia entre duas folhas instáveis

A figura 6.1 ilustra a ideia subjacente a uma aplicação de holonomia entre duas folhas transversais Σ_1 e Σ_2 . A imagem de um ponto $x \in \Sigma_1$ é obtida caminhando sobre a folha da folheação \mathcal{F} que passa por x até chegar no ponto de interseção $\theta(x)$ entre a folha $\mathcal{F}(x)$ e Σ_2 . Dadas \mathcal{F} e \mathcal{F}^\perp folheações de M com \mathcal{F}^\perp transversal à \mathcal{F} , denote por d^s e d^u a distância d de M restrita às folhas das folheações \mathcal{F} e \mathcal{F}^\perp respectivamente.

Definição 6.4.1. Se \mathcal{F} e \mathcal{F}^\perp são folheações de M , com \mathcal{F}^\perp transversal a \mathcal{F} , dizemos que a folheação \mathcal{F} é **Lipschitz** se satisfaz a seguinte propriedade: para todo $D > 0$ existe uma constante $L > 0$ tal que para todo par de folhas Σ_1, Σ_2 de \mathcal{F}^\perp que satisfaz:

$$d^s(x, \theta(x)) < D$$

Para todo $x \in \Sigma_1$, a aplicação de holonomia θ é Lipschitz com constante de Lipschitz $\text{Lip } \theta < L$.

Observe que sempre que temos duas folheações \mathcal{F} e \mathcal{F}^\perp ambas de classe C^r numa variedade compacta, a aplicação de holonomia entre duas folhas transversais de \mathcal{F}^\perp é sempre Lipschitz. Quando uma folheação é Lipschitz entretanto, é possível garantir que a constante de Lipschitz de qualquer aplicação de holonomia entre duas folhas suficientemente próximas é limitada. A condição da folheação ser Lipschitz é diferente de se exigir que as aplicações de holonomia sejam Lipschitz para todo par de folhas transversais. Por este motivo, nem sempre é possível garantir que uma folheação de classe C^r seja Lipschitz, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 6.4.2. Considere o seguinte subconjunto do plano $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1 \text{ e } y < 0\}$ com a folheação \mathcal{F} exibida na figura 6.2 cujas folhas são os arcos de círculos em vermelho passando pelos pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Observe que esta é uma folheação de classe C^∞ que satisfaz a seguinte propriedade: existe uma constante $C > 0$ de modo que para todo par de folhas Σ_1, Σ_2 transversais a esta folheação, tem-se $d^s(x, \theta(x)) \leq C$ para todo $x \in \Sigma_1$. Por outro lado, é sempre possível encontrar um par de folhas transversais a esta folheação cuja constante de Lipschitz é arbitrariamente grande. De fato, tomando Σ_1 e Σ_2 seções transversais como na figura abaixo, a constante de Lipschitz da holonomia $\theta : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ fica arbitrariamente grande a medida em que Σ_2 se aproxima do ponto $(1, 0)$. Em particular, esta folheação não é Lipschitz.

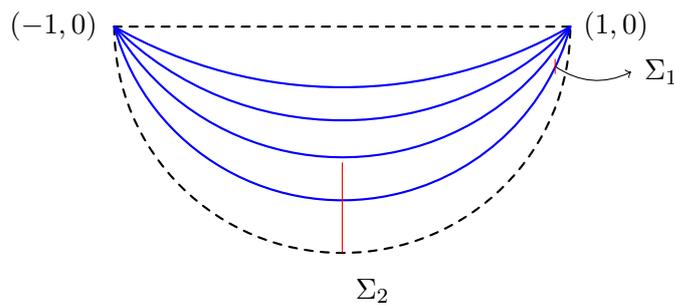


Figura 6.2: Exemplo de uma folheação que não é Lipschitz

Voltando a situação dos difeomorfismos quase-Anosov deste capítulo, mostramos que as folheações estável \mathcal{W}^s e instável \mathcal{W}^u são contínuas com folhas de classe C^2 , mas a princípio não existem muitos motivos para acreditar que \mathcal{W}^s é Lipschitz. O ponto crucial que distingue este caso das outras folheações dos exemplos anteriores que não eram Lipschitz, é a presença de um sistema dinâmico e que estas folheações são as variedades estáveis e instáveis de f . Usando as propriedades dinâmicas de ambas as folheações, vamos provar o seguinte teorema que caracteriza a folheação estável:

Teorema 6.4.3. A folheação \mathcal{W}^s é Lipschitz. De fato, dado $D_1 > 0$ existe $L_1 > 0$ tal que para todo par de folhas instáveis (Σ_1, Σ_2) satisfazendo $d^s(x, \theta(x)) < D_1$ para todo $x \in \Sigma_1$, então $\text{Lip } \theta < L_1$.

Para a conveniência do leitor, a prova deste teorema que vamos apresentar neste texto é uma prova auto-contida e detalhada do esboço presente em [HY95]. Vamos resumir a ideia do teorema acima e explicar o papel da dinâmica em sua demonstração. Começando por um segmentinho $\gamma \subset \Sigma_1$ de comprimento arbitrariamente pequeno, considere $\theta \circ \gamma$ o segmento obtido pela holonomia das folhas. O objetivo principal para mostrar que a holonomia é Lipschitz é garantir que o comprimento destes segmentos é sempre comparável, não importa o quão arbitrariamente pequeno seja o tamanho do segmento

γ . Como o difeomorfismo f contrai na direção horizontal (direção estável), para iterados $n \geq 1$ arbitrariamente grandes de f a distância entre $f^n(\gamma)$ e $f^n(\theta(\gamma))$ fica arbitrariamente pequena. Por outro lado, como o difeomorfismo f não contrai na direção vertical (direção instável), o comprimento de $f^n(\gamma)$ nunca fica menor do que o comprimento de γ . Portanto, deve existir algum iterado $n \geq 1$ de tal forma que os comprimentos de $f^n(\gamma)$ e $f^n(\theta(\gamma))$ são comparáveis com a distância entre $f^n(\gamma)$ e $f^n(\theta(\gamma))$, como mostra a figura 6.3. No seguinte passo, a decomposição dominada adquire um papel de destaque para garantir que os comprimentos de $f^n(\gamma)$ e $f^n(\theta(\gamma))$ também são comparáveis entre si. Depois disso, usando um argumento de distorção limitada, basta apenas garantir que $\ell(\gamma) \approx \ell(f^n(\gamma))$ e $\ell(\theta(\gamma)) \approx \ell(f^n(\theta(\gamma)))$ para concluir que os segmentos originais γ e $\theta(\gamma)$ são comparáveis.

É importante observar que também é possível provar que a folheação \mathcal{W}^s é Lipschitz usando que as seções $x \mapsto E^s(x)$ e $x \mapsto E^u(x)$ são de classe C^1 . Usando isto, garante-se que a folheação estável \mathcal{W}^s é de classe C^1 com folhas de classe C^2 e logo, por um argumento de compacidade, garante-se que a folheação é Lipschitz cobrindo a variedade por um número finito de cartas folheadas onde a constante de Lipschitz é uniforme. Uma prova de que as seções E^s e E^u são de classe C^1 pode ser encontrada em [HP70].

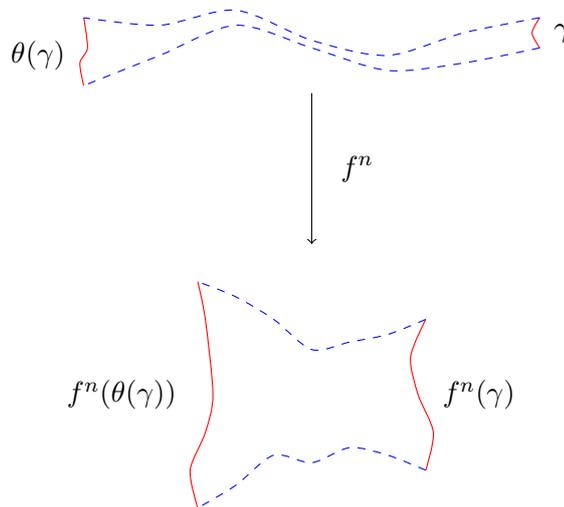


Figura 6.3: Ideia da demonstração do teorema 6.4.3

A prova deste teorema será dividida em vários lemas. O próximo que será provado garante que a holonomia é Lipschitz sempre que $\theta(\gamma)$ e γ são comparáveis para todo segmento $\gamma \subset \Sigma_1$ arbitrariamente pequeno.

Lema 6.4.4. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e suponha que exista uma constante $C > 0$ tal que para todo $x \in [a, b]$ existe $\varepsilon_x > 0$ satisfazendo a seguinte propriedade: se $0 < \delta \leq 2\varepsilon$ e $\gamma \subset (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$ é uma curva de comprimento $l(\gamma) = \delta$ então:*

$$C^{-1}\delta \leq l(f(\gamma)) \leq C\delta \tag{6.6}$$

Então, f é Lipschitz.

Demonstração. Fixe $x, y \in I$ tais que $x < y$ e denote por $J = [x, y] \subset I$. Para cada $z \in J$, tomando $\varepsilon_z > 0$ satisfazendo a hipótese do enunciado, obtemos uma cobertura $\{(z - \varepsilon_z, z + \varepsilon_z) \cap J; z \in J\}$ por abertos de J e logo, por compacidade podemos tomar uma subcoleção finita $\{(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i); i = 1, \dots, k\}$

onde $x_i \in J$ para todo $i = 1, \dots, k$. Podemos supor que $x_0 = x$ e $x_k = y$. Senão, basta acrescentar os intervalos $(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x), (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y)$. Suponha também que $x_0 < x_1 < \dots < x_k$ e que para todo $i = 1, \dots, k - 1$:

$$x_i \in (x_{i-1} - \varepsilon_{i-1}, x_{i-1} + \varepsilon_{i-1}) \cap (x_{i+1} - \varepsilon_{i+1}, x_{i+1} + \varepsilon_{i+1})$$

Caso isso não aconteça, basta acrescentar pontos na interseção dos abertos da subcoleção original (o que é possível por conexidade). Agora, para cada $i = 1, \dots, k$ tome $\gamma_i = [x_{i-1}, x_i]$. Por construção, temos $\gamma_i \subset (x_{i-1} - \varepsilon_{i-1}, x_{i-1} + \varepsilon_{i-1})$ e logo, $l(\gamma_i) \leq 2\varepsilon_{i-1}$ para todo $i = 1, \dots, k$. Em particular:

$$|f(x_{i-1}) - f(x_i)| \leq l(f(\gamma_i)) \leq Cl(\gamma_i) = C(x_i - x_{i-1})$$

Portanto, obtemos:

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq C \sum_{i=1}^k x_i - x_{i-1} = C|x - y|$$

Como $x, y \in I$ foram tomados arbitrários e $C > 0$ não depende de x e y , então concluímos que f é Lipschitz. \square

Para implementar a ideia para provar a proposição 6.4.3, precisamos comparar comprimentos de caminhos que não são necessariamente verticais ou horizontais, o que dificulta um pouco o problema. Contudo, o próximo lema garante que o comprimento de um caminho é comparável a de um segmento horizontal ou vertical, desde que o ângulo entre o vetor velocidade deste caminho e o segmento for pequeno (ver figura 6.4).

Lema 6.4.5 (Primeiro lema geométrico). *Seja $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana e suponha que existam $r \subset \mathbb{R}^2$ uma reta e $\varepsilon > 0$ tais que:*

- (a) $\gamma(0) \in r$
- (b) $\angle(\gamma'(t), r) < \varepsilon$ para todo $t \in [0, T]$.

Denotando por $q \in r$ a projeção ortogonal de $\gamma(T)$ na reta r , então:

$$l(\gamma) \cos(-\varepsilon) \leq \|q - p\| \leq l(\gamma) \cos(\varepsilon)$$

Demonstração. Começando com $\delta > 0$ arbitrário, podemos obter uma sequência de segmentos de reta s_1, \dots, s_n , cada um de comprimento c_i , que aproxima o comprimento de γ , de modo que:

$$l(\gamma) - \delta \leq \sum_{i=1}^n c_i \leq l(\gamma) + \delta \tag{6.7}$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ considere \tilde{s}_i a projeção ortogonal do segmento s_i sobre a reta r e denote por \tilde{c}_i o comprimento deste segmento. Veja a figura 6.4. Diminuindo ε se necessário, podemos supor que ε foi tomado de modo que $\gamma'(t)$ não seja ortogonal a r para todo tempo t . Logo,

$$\sum_{i=1}^n \tilde{c}_i = \|p - q\|$$

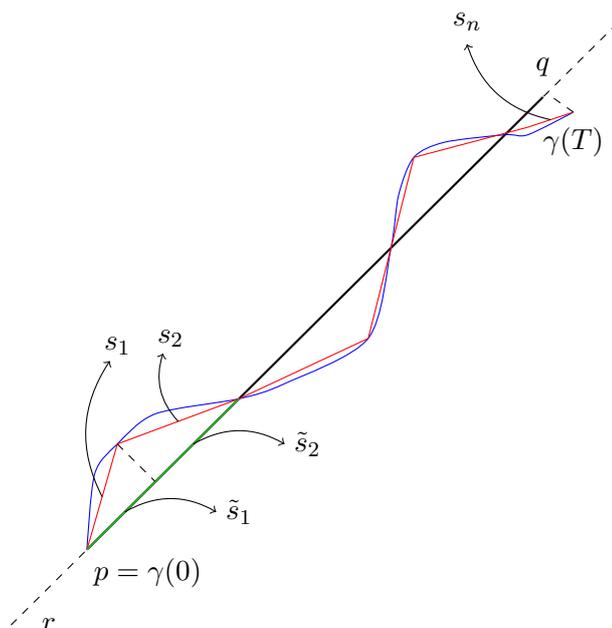


Figura 6.4: Ideia da demonstração do primeiro lema geométrico. Na figura, o caminho poligonal (em vermelho) aproxima a curva γ (em azul) e o caminho em verde representa a projeção do segmento s_i na reta r

Além disso, como $\angle(\gamma'(t), r) < \varepsilon$ então obtemos para cada $i = 1, \dots, n$:

$$\cos(-\varepsilon)c_i \leq \tilde{c}_i \leq \cos(\varepsilon)c_i$$

Portanto, somando cada termo acima e usando a desigualdade 6.7:

$$\begin{aligned} (\cos(-\varepsilon))(l(\gamma) - \delta) &\leq \sum_{i=1}^n (\cos(-\varepsilon))c_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i \\ &= \|p - q\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \cos(\varepsilon)c_i \\ &\leq (\cos(\varepsilon))(l(\gamma) + \delta) \end{aligned}$$

Como $\delta > 0$ foi tomado arbitrariamente, então obtemos a desigualdade desejada. \square

Retornando a ideia da prova, suponha que o caminho γ foi iterado por f em um número suficiente de vezes para obter a situação descrita na figura 6.3. Para implementar a ideia da prova, gostaríamos de que fosse possível comparar os comprimentos dos caminhos $f^n(\gamma)$ e $f^n(\theta(\gamma))$. O próximo lema geométrico garante que isso é possível desde que o comprimento de $f^n(\gamma)$ seja comparável com a distância entre $f^n(\gamma)$ e $f^n(\theta(\gamma))$. Vale destacar a importância da decomposição dominada na demonstração deste lema. De fato, ela garante que o ângulo entre os subespaços estável e instável é sempre maior do que uma constante uniforme que não depende do ponto escolhido, fato crucial para aplicar o primeiro lema geométrico.

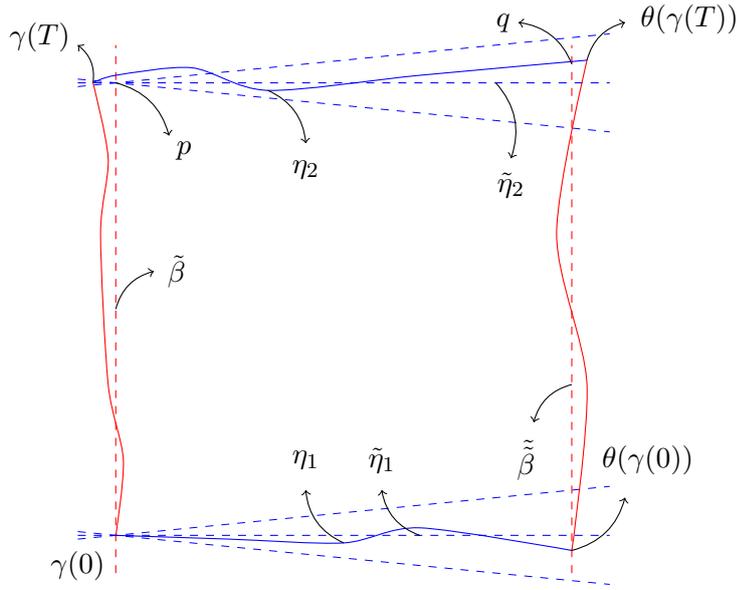


Figura 6.5: Ideia da prova do segundo lema geométrico

Lema 6.4.6 (Segundo lema geométrico). *Existe uma constante $\beta_0 > 0$ tal que para toda constante $C_0 \geq 1$, existe uma constante $C_1 > 0$ satisfazendo a seguinte propriedade: suponha que $\gamma \subset M$ seja um \mathcal{W}^u -segmento com $l(\gamma) = \beta \leq \beta_0$ tal que:*

$$\beta C_0^{-1} \leq d^s(y, \theta(y)) \leq C_0 \beta$$

Então, $l(\theta \circ \gamma)$ e $l(\gamma)$ são comparáveis, ou seja:

$$C_1^{-1} \leq \frac{l(\theta \circ \gamma)}{l(\gamma)} \leq C_1$$

Demonstração. Como M é compacto, então podemos cobrir M por uma cobertura finita de domínios de cartas locais e se $\beta > 0$ é suficientemente pequeno, podemos supor que $\gamma(I)$ está contido no domínio de alguma destas cartas. Além disso, podemos assumir que em p a derivada desta carta leva E^u em $\langle e_2 \rangle$ e E^s em $\langle e_1 \rangle$. Desta forma, curvas instáveis são quase verticais e curvas estáveis são quase horizontais. Vamos denotar por $I = [0, T]$ e sejam η_1 o segmento estável ligando $\gamma(0)$ a $\theta(\gamma(0))$ e η_2 o segmento estável ligando $\gamma(T)$ a $\theta(\gamma(T))$. Seja p a projeção horizontal de $\gamma(T)$ em cima do segmento vertical a partir de $\gamma(0)$ e q a projeção horizontal de $\theta(\gamma(T))$ em cima do segmento vertical a partir de $\theta(\gamma(0))$. Denote por $\tilde{\beta} = d(p, \gamma(0))$ e $\tilde{\beta} = d(q, \theta(\gamma(0)))$. Vamos denotar também por $\tilde{\eta}_1$ o comprimento do segmento horizontal ligando $\gamma(0)$ à reta vertical gerada pelos pontos $\theta(\gamma(0))$ e q . Defina $\tilde{\eta}_2$ analogamente (veja a figura 6.5). Pela decomposição dominada, O ângulo entre as seções e as direções horizontal e vertical fica limitado por $\varepsilon > 0$ dentro da vizinhança de p onde estamos trabalhando. Então, aplicando o primeiro lema geométrico, obtemos:

$$l(\gamma) \cos(-\varepsilon) \leq \tilde{\beta} \leq l(\gamma) \cos(\varepsilon)$$

$$l(\theta(\gamma)) \cos(-\varepsilon) \leq \tilde{\beta} \leq l(\gamma) \cos(\varepsilon)$$

$$\eta_1 \cos(-\varepsilon) \leq \tilde{\eta}_1 \leq \eta_1 \cos(\varepsilon)$$

$$\eta_2 \cos(-\varepsilon) \leq \tilde{\eta}_2 \leq \eta_2 \cos(\varepsilon)$$

Agora, por geometria euclidiana, temos a seguinte desigualdade pelo trapézio formado:

$$\tilde{\beta} - \tilde{\eta}_1 2 \sin \varepsilon \leq \tilde{\beta} \leq \tilde{\beta} + \tilde{\eta}_2 2 \sin \varepsilon$$

Por hipótese, temos que $\beta C_0^{-1} \leq \eta_i \leq \beta C_0$ onde $i = 1, 2$. Logo,

$$\begin{aligned} \ell(\theta(\gamma)) &= \tilde{\beta} \\ &\leq \tilde{\beta} + \tilde{\eta}_2 2 \sin \varepsilon \\ &\leq \ell(\gamma) \cos \varepsilon + \eta_2 2 \cos \varepsilon \sin \varepsilon \\ &\leq \beta \cos \varepsilon + \beta C_0 2 \cos \varepsilon \sin \varepsilon \\ &= \beta(\cos \varepsilon + 2C_0 \cos \varepsilon \sin \varepsilon) \end{aligned}$$

A estimativa inferior é obtida de forma análoga. □

Dada uma folha Σ de \mathcal{W}^u e $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ um segmento de Σ , denote por $\gamma_j = f^j(\gamma)$ para todo $j \in \mathbb{Z}$. Antes de finalmente provar o teorema 6.4.3, o seguinte lema será útil para estabelecer algumas desigualdades.

Lema 6.4.7 (Desigualdade do valor médio). *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma parametrização de um segmento γ contido numa folha Σ de \mathcal{W}^u . Então para todo $j \in \mathbb{Z}$:*

$$\inf_{z \in \gamma} \|df^j(z)|_{E^u(z)}\| l(\gamma) \leq l(\gamma_j) \leq \sup_{z \in \gamma} \|df^j(z)|_{E^u(z)}\| l(\gamma)$$

Em particular, para todo $y, z \in \Sigma$:

$$d^u(z_j, y_j) \leq \sup_{z \in \Sigma} \|df^j(z)|_{E^u(z)}\| d^u(z, y)$$

Demonstração. Suponha que $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ esteja parametrizada por comprimento de arco. Então, por definição:

$$l(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = 1$$

Observe também que $\|df^j(\gamma(t))\gamma'(t)\| \leq \|df^j(\gamma(t))|_{E^u(\gamma(t))}\|$ para todo $t \in [0, 1]$. Logo, pela continuidade da métrica e da derivada de f , temos:

$$0 < \inf_{z \in \gamma} \|df^j(z)|_{E^u(z)}\| \leq \sup_{z \in \gamma} \|df^j(z)|_{E^u(z)}\| < +\infty$$

Com essas observações, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\inf_{z \in \gamma} \|df^j(z)|_{E^u(z)}\|l(\gamma) &\leq \int_0^1 \|df^j(\gamma(t))\gamma'(t)\|dt \\
&= l(\gamma_j) \\
&= \int_0^1 \|(f^j \circ \gamma)'(t)\|dt \\
&= \int_0^1 \|df^j(\gamma(t))\gamma'(t)\|dt \\
&\leq \sup_{z \in \gamma} \|df^j(z)|_{E^u(z)}\|l(\gamma)
\end{aligned}$$

E portanto, segue a primeira desigualdade. Para provar a segunda desigualdade, observe que se $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ é uma curva de Σ tal que $\gamma(0) = z$ e $\gamma(1) = y$ então aplicando a primeira desigualdade:

$$d^u(z_j, y_j) \leq l(\gamma_j) \leq \sup_{z \in \gamma} \|df^j(z)|_{E^u(z)}\|l(\gamma) \leq \sup_{z \in \Sigma} \|df^j(z)|_{E^u(z)}\|l(\gamma)$$

Como γ foi uma curva arbitrária entre y e z , então fica provada a segunda desigualdade. \square

Prova da proposição 6.4.3. Tome um \mathcal{W}^u -segmento com $l(\gamma) = \beta \leq \beta_0$. Como Σ_1, Σ_2 são dados a priori, podemos supor também que $\beta < 1/2d(\Sigma_1, \Sigma_2)$. Assim, em particular, temos $l(\gamma) < 1/2d(\theta(y), y)$ para todo $y \in \gamma$. Observe que $l(f^n(\gamma)) \geq l(\gamma)$ e $d(f^n(y), \theta(f^n(y))) \leq \lambda(\kappa^s)^n$ para todo $n \geq 1$. Logo, para todo $y \in \gamma$ existe $n \geq 1$ tal que $l(f^n(\gamma)) \geq d^s(f^n(y), f^n(\theta(y)))$. Usando o fato de que f é de classe C^1 , conclui-se que existe uma constante $C_2 > 0$ e $n \geq 1$ (dependendo apenas de f) que satisfaz para todo $y \in \gamma$:

$$C_2^{-1}d^s(f^n(y), \theta(f^n(y))) \leq l(f^n(\gamma)) \leq C_2d^s(f^n(\gamma), \theta(f^n(\gamma)))$$

Logo, aplicando o segundo lema geométrico, obtemos:

$$C_1^{-1} \leq \frac{l(\theta \circ f^n(\gamma))}{l(f^n(\gamma))} \leq C_1 \quad (6.8)$$

Fixado este $n \geq 1$ obtido, aplicando o teorema do valor médio aos segmentos γ e $\theta(\gamma)$ temos as seguintes desigualdades:

$$\inf_{z \in \gamma} \|df^n(z)|_{E^u(z)}\|l(\gamma) \leq l(f^n(\gamma)) \leq \sup_{z \in \gamma} \|df^n(z)|_{E^u(z)}\|l(\gamma)$$

$$\inf_{y \in \gamma} \|df^n(\theta(y))|_{E^u(\theta(y))}\|l(\theta(\gamma)) \leq l(f^n(\theta(\gamma))) \leq \sup_{y \in \gamma} \|df^n(\theta(y))|_{E^u(\theta(y))}\|l(\theta(\gamma))$$

Em particular, rearranjando as desigualdades acima:

$$\inf_{z, y \in \gamma} \frac{\|df^n(z)|_{E^u(z)}\|}{\|df^n(\theta(y))|_{E^u(\theta(y))}\|} \frac{l(f^n(\theta(\gamma)))}{l(f^n(\gamma))} \leq \frac{l(\theta(\gamma))}{l(\gamma)} \leq \sup_{z, y \in \gamma} \frac{\|df^n(z)|_{E^u(z)}\|}{\|df^n(\theta(y))|_{E^u(\theta(y))}\|} \frac{l(f^n(\theta(\gamma)))}{l(f^n(\gamma))} \quad (6.9)$$

Da desigualdade acima, tudo o que precisamos fazer para concluir o teorema é obter uma cota superior e inferior para a desigualdade acima, que não dependa do iterado e do ponto escolhido. Com este objetivo, vamos provar as seguintes afirmações:

Afirmção 6.4.8. Existe uma constante $C_2 > 0$ que depende apenas de $\beta_0 > 0$ tal que para todo $y \in \gamma$ e $n \geq 1$ vale:

$$C_2^{-1} \leq \frac{\|df^n(\theta(y))|_{E^u(\theta(y))}\|}{\|df^n(y)|_{E^u(y)}\|} \leq C_2$$

Demonstração. Pelo teorema 6.3.2, a distribuição $y \mapsto \log \|df(y)|_{E^u(y)}\|$ é Hölder com constante de Hölder $\nu > 0$. Assim, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{\|df^n(\theta(y))|_{E^u(\theta(y))}\|}{\|df^n(y)|_{E^u(y)}\|} \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \log \|df(f^i(\theta(y)))|_{E^u(f^i(\theta(y)))}\| - \log \|df(f^i(y))|_{E^u(f^i(y))}\| \right| \\ &\leq C \sum_{i=0}^{n-1} d(f^i(\theta(y)), f^i(y))^\nu \\ &\leq C \sum_{i=0}^{n-1} (\kappa^s)^{i\nu} \\ &\leq \tilde{C}_2 \end{aligned}$$

Assim, basta tomar $\tilde{C}_2 = C_2$ para completar a prova da afirmação. □

Afirmção 6.4.9. Existe uma constante $C_3 > 0$ tal que para todo $z, y \in \gamma$ vale:

$$C_3^{-1} \leq \frac{\|df^n(z)|_{E^u(z)}\|}{\|df^n(y)|_{E^u(y)}\|} \leq C_3$$

Demonstração. Observe que escolhemos $n \geq 1$ de tal modo que $l(f^n(\gamma)) \leq C_0 d^s(f^n(y_0), f^n(\theta(y_0)))$ para algum $y_0 \in \gamma$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{\|df^n(y)|_{E^u(y)}\|}{\|df^n(z)|_{E^u(z)}\|} \right| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \log \|df(f^i(y))|_{E^u(f^i(y))}\| - \log \|df(f^i(z))|_{E^u(f^i(z))}\| \right| \\ &\leq L \sum_{i=0}^{n-1} d^u(f^i(y), f^i(z)) \\ &\leq Ln l(f^n(\gamma)) \\ &\leq Ln C_0 d^s(f^n(y_0), f^n(\theta(y_0))) \\ &\leq Ln C_0 \lambda (\kappa^s)^n \\ &\leq \tilde{C}_3 \end{aligned}$$

Assim, basta tomar a constante $C_3 = \tilde{C}_3$ para completar a afirmação. □

Para finalizar a prova da proposição, dados $z, y \in \gamma$ quaisquer, pela afirmação 6.4.8 temos:

$$\begin{aligned} \|df^n(\theta(z))|_{E^u(\theta(z))}\| &= \frac{\|df^n(\theta(z))|_{E^u(\theta(z))}\|}{\|df^n(y)|_{E^u(y)}\|} \|df^n(y)|_{E^u(y)}\| \\ &\leq C_2 \|df^n(y)|_{E^u(y)}\| \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $\|df^n(\theta(z))|_{E^u(\theta(z))}\| \geq C_2^{-1}\|df^n(y)|_{E^u(y)}\|$ e portanto, para todo $z, y \in \gamma$:

$$C_2^{-1}\|df^n(y)|_{E^u(y)}\| \leq \|df^n(\theta(z))|_{E^u(\theta(z))}\| \leq C_2\|df^n(y)|_{E^u(y)}\|$$

Logo, usando a desigualdade acima e a afirmação 6.4.9, obtemos que para cada $z, y \in \gamma$:

$$\begin{aligned} C_2^{-1}C_3^{-1} &\leq C_2^{-1}\frac{\|df^n(y)|_{E^u(z)}\|}{\|df^n(z)|_{E^u(z)}\|} \\ &\leq \frac{\|df^n(\theta(y))|_{E^u(\theta(y))}\|}{\|df^n(z)|_{E^u(z)}\|} \\ &\leq C_2\frac{\|df^n(y)|_{E^u(\theta(y))}\|}{\|df^n(z)|_{E^u(z)}\|} \\ &\leq C_2C_3 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando 6.8, a desigualdade anterior e 6.9:

$$C_2^{-1}C_3^{-1}C_1^{-1} \leq C_2^{-1}C_3^{-1}\frac{\ell(\theta(f^n(\gamma)))}{\ell(f^n(\gamma))} \leq \frac{\ell(\theta(\gamma))}{\ell(\gamma)} \leq C_2C_3\frac{\ell(\theta(f^n(\gamma)))}{\ell(f^n(\gamma))} \leq C_2C_3C_1$$

Portanto, basta tomar $C = C_2C_3C_1$ e usar o lema 6.4.4 para concluir a proposição. \square

Retângulos

Denotando por $[y, z] = \mathcal{W}_\beta^u(y) \cap \mathcal{W}_\beta^s(z)$, uma primeira propriedade importante destas duas folheações é a de produto local, enunciada logo abaixo:

Proposição 6.4.10 (Estrutura de produto local). *Existe $0 < \varepsilon < \beta$ tal que se $x, y \in M$ satisfaz $d(x, y) < \varepsilon$ então $[y, z]$ e $[z, y]$ contêm exatamente um ponto.*

Demonstração. Fixado $x \in M$ qualquer, observe que existe $\varepsilon_x > 0$ com $0 < \varepsilon_x < \beta$ que satisfaz a seguinte propriedade: a variedade estável local de todo ponto $y \in B(x, \varepsilon_x)$ intersecta a variedade instável local de x em um único ponto, isto é, $[x, y] = \mathcal{W}_\beta^u(x) \cap \mathcal{W}_\beta^s(y)$ é unitário para todo $y \in B(x, \varepsilon_x)$. (veja figura 6.6).

Assim, considere a cobertura $\{B(x, \varepsilon_x)\}_{x \in M}$. Pela compacidade, existem $B(x_i, \varepsilon_{x_i})$ com $i = 1, \dots, n$ de modo que $\{B(x_i, \varepsilon_{x_i})\}_{i=1}^n$ ainda seja uma cobertura de M . Logo, tomando $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_{x_i}$ obtemos o resultado desejado. \square

Definição 6.4.11. *Dizemos que um subconjunto $R \subset M$ é um **retângulo** se $[y, z], [z, y] \in R$ para todo $y, z \in R$.*

Exemplo 6.4.12. *Sejam γ^u, γ^s folhas de $\mathcal{W}^u, \mathcal{W}^s$ respectivamente. Então, o subconjunto:*

$$[\gamma^u, \gamma^s] = \{[y, z]; y \in \gamma^u, z \in \gamma^s\}$$

É um retângulo. De fato, dados $\tilde{z}, \tilde{y} \in [\gamma^u, \gamma^s]$ sejam $y^u, z^u \in \gamma^u$ e $y^s, z^s \in \gamma^s$ tais que $\tilde{y} = [y^u, y^s]$ e $\tilde{z} = [z^u, z^s]$. Observe que $[\tilde{z}, \tilde{y}] \in \mathcal{W}_\beta^u(z^u)$ e $[\tilde{y}, \tilde{z}] \in \mathcal{W}_\beta^u(y^u)$ pois $\tilde{y} \in \mathcal{W}_\beta^u(y^u)$, $[\tilde{y}, \tilde{z}] \in \mathcal{W}_\beta^u(\tilde{y})$ e $\tilde{z} \in \mathcal{W}_\beta^u(z^u)$, $[\tilde{z}, \tilde{y}] \in \mathcal{W}_\beta^u(\tilde{z})$. Analogamente, $[\tilde{z}, \tilde{y}] \in \mathcal{W}_\beta^s(y^s)$ e $[\tilde{y}, \tilde{z}] \in \mathcal{W}_\beta^s(z^s)$.

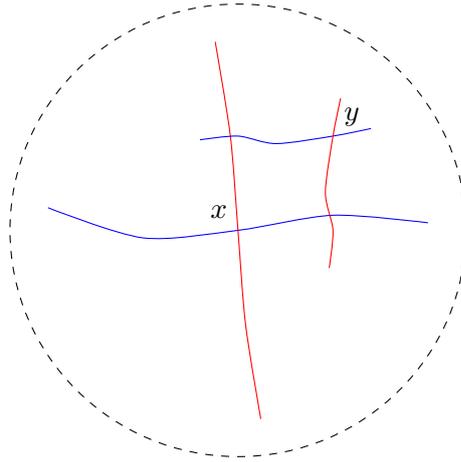


Figura 6.6: Prova da proposição 6.4.10

Portanto, $[\tilde{z}, \tilde{y}] = [z^u, y^s]$ e $[\tilde{y}, \tilde{z}] = [y^u, z^s]$, concluindo que $[\tilde{z}, \tilde{y}], [\tilde{y}, \tilde{z}] \in [\gamma^u, \gamma^s]$. Assim, este subconjunto é um retângulo.

Se R é um retângulo e $x \in R$ denotamos por $\mathcal{W}^u(x, R) = \mathcal{W}_\beta^u(x) \cap R$ e $\mathcal{W}^s(x, R) = \mathcal{W}_\beta^s(x) \cap R$

Definição 6.4.13. Sejam $R, Q \subset M$ retângulos. Dizemos que $f^n(Q)$ **crusa** R **markovianamente** se para todo $x \in Q$ tal que $f^n(x) \in R$ temos:

$$f^n(\mathcal{W}^u(x, Q)) \cap R = \mathcal{W}^u(f^n(x), R)$$

Intuitivamente, dizemos que $f^n(Q)$ u-cruza R se f^n leva segmentos instáveis de Q em segmentos instáveis de R , como mostra a figura 6.7.

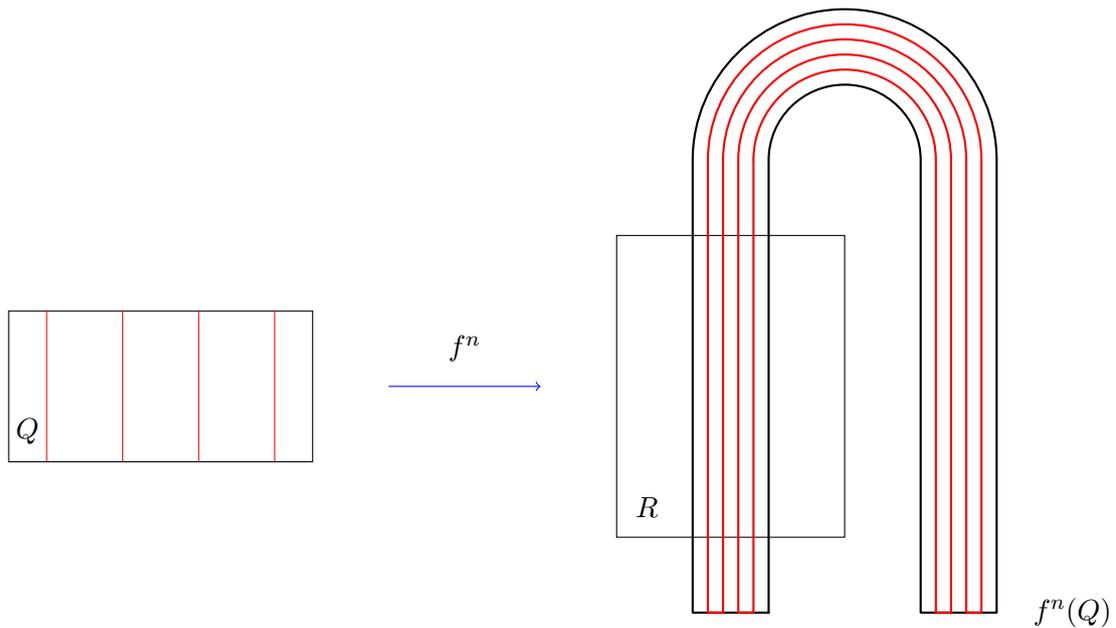


Figura 6.7: O retângulo Q cruza markovianamente o retângulo R

Vamos terminar esta sessão com uma proposição que será muito útil nas sessões posteriores:

Proposição 6.4.14. $\mathcal{W}^s(p)$ e $\mathcal{W}^u(p)$ são ambas densas em M , onde p é o ponto fixo de f na definição 6.1.1.

Demonstração. Dados $y \in M$ e $r > 0$ arbitrários, vamos mostrar que $\mathcal{W}^u(p) \cap B(y, r) \neq \emptyset$. Como estamos supondo que f é um difeomorfismo transitivo, então existe alguma órbita futura densa em M , ou seja, existe $x \in M$ tal que $\overline{\mathcal{O}^+(x)} = M$. Tome $0 < \varepsilon < \beta$ satisfazendo a estrutura de produto local (ver proposição 6.4.10) e seja $n \geq 1$ tal que:

$$d(f^n(x), p) < \min\{\varepsilon, \frac{r}{2}\}$$

Usando a estrutura de produto local, temos que $[f^n(x), p]$ e $[p, f^n(x)]$ contêm exatamente um ponto. Assim, denote por $z \in \mathcal{W}^s(f^n(x)) \cap \mathcal{W}^u(p) = [f^n(x), p]$. Em particular, como $z \in \mathcal{W}^s(f^n(x))$ então para todo $k \geq 1$:

$$d(f^{n+k}(x), f^k(z)) < \frac{r}{2}$$

Ainda usando que a órbita futura de x é densa, podemos fixar $k \geq 1$ de modo que:

$$d(f^{n+k}(x), y) < \frac{r}{2}$$

Logo, reunindo as duas desigualdades acima, obtemos:

$$d(f^k(z), y) \leq d(f^k(z), f^{n+k}(x)) + d(f^{n+k}(x), y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

Portanto, $f^k(z) \in B(y, r) \cap \mathcal{W}^u(p)$, concluindo então que $\mathcal{W}^u(p)$ é um conjunto denso em M . A prova de que $\mathcal{W}^s(p)$ também é um conjunto denso é análoga à demonstração anterior (veja a figura 6.8).

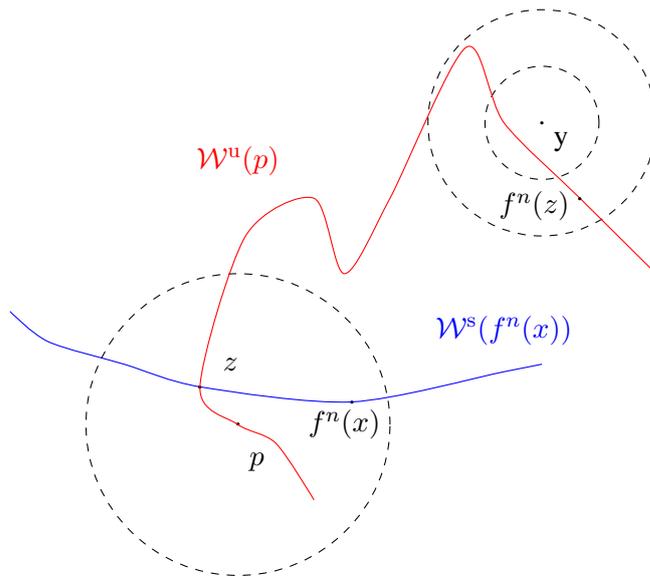


Figura 6.8: Ideia da demonstração da proposição 6.4.14

□

6.5 Estimativas de Distorção

O objetivo dessa seção é provar a seguinte estimativa de distorção:

Proposição 6.5.1. *Dado um retângulo $P \subset M$ tal que $p \in \text{int } P$ existem constantes $\delta > 0$ e $J \geq 1$ satisfazendo a seguinte propriedade: Se γ é um \mathcal{W}^u -segmento com $l(\gamma) \leq \delta$ e $\gamma \cap P = \emptyset$ então para todo $y, z \in \gamma$ e $n \geq 1$:*

$$\frac{1}{J} \leq \frac{\|df^{-n}(z)|_{E^u(z)}\|}{\|df^{-n}(y)|_{E^u(y)}\|} \leq J \quad (6.10)$$

Estimativas de distorção em geral se valem da hiperbolicidade uniforme. Aqui não temos isso em toda a variedade mas temos fora do retângulo P . Logo a estratégia é dividir a análise fora de P e dentro de P . O ponto crucial é o lema a seguir, que usa um argumento de dimensão um: quando um segmento de variedade instável entra em P o somatório dos seus comprimentos (por iterações negativas) fica limitado pelo seu comprimento inicial antes de se entrar em P . Assim, será possível "fingir" que temos hiperbolicidade uniforme para fazer a estimativa de distorção.

Vamos denotar a partir de agora por $y_i = f^{-i}(y)$, $z_i = f^{-i}(z)$ e $\gamma_i = f^{-i}(\gamma)$ para cada $i \geq 1$. Se Γ é um \mathcal{W}^u -segmento em P , denote por:

$$\tilde{\Gamma} = \{[p, x]; x \in \Gamma\}$$

Lema 6.5.2. *Seja $P \subset M$ um retângulo que contém p em seu interior e seja P^+ uma componente de $f(P) \setminus P$. Seja $\gamma = \mathcal{W}^u(x, P^+)$ onde $x \in P^+$ e suponha que $\gamma_j \subset P$ para todo $j = 1, \dots, n-1$. Então existe uma constante $C = C(P) > 0$ que depende apenas do retângulo P tal que para todo $y, z \in \gamma$:*

$$\log \frac{\|df^{-n}(z)|_{E^u(z)}\|}{\|df^{-n}(y)|_{E^u(y)}\|} \leq C \frac{d^u(y, z)}{l(\gamma)} \quad (6.11)$$

Demonstração. Pelo teorema da variedade estável, sabemos que $\mathcal{W}_\beta^u(x)$ é gráfico de uma função de classe C^2 para todo $x \in M$. Logo, se $\gamma \subset \mathcal{W}_\beta^u(x)$ é um segmento de variedade estável, temos que a função:

$$\gamma \ni y \mapsto \log \|df^{-1}(y)|_{E^u(y)}\|$$

É uma função de classe C^1 e portanto Lipschitz para cada. Por outro lado, a constante de Lipschitz desta função varia continuamente de uma folha a outra, pois os gráficos variam continuamente na topologia C^2 . Assim, usando a compacidade de M , obtemos uma constante de Lipschitz $L > 0$ que é uniforme em M e só depende de f . Em particular, para todo $y, z \in \gamma$ e $j = 0, 1, \dots, n-1$ temos:

$$|\log \|df^{-1}(y_j)|_{E^u(y_j)}\| - \log \|df^{-1}(z_j)|_{E^u(z_j)}\|| \leq L d^u(y_j, z_j) \quad (6.12)$$

Pela proposição 6.4.3, sabemos que \mathcal{W}^s é uma folheação Lipschitz e portanto, existe uma constante positiva $C(P) > 0$ que só depende do retângulo P de modo que para cada $j = 0, 1, \dots, n$ vale:

$$l(\gamma_j) \leq C \cdot l(\tilde{\gamma}_j)$$

Afirmção 6.5.3. *Existe uma constante $C_0 > 0$ que depende apenas do retângulo P de tal modo que para todo $j = 0, 1, \dots, n-1$ e $y, z \in \gamma$:*

$$\frac{\|df^{-j}(y)|_{E^u(y)}\|}{\|df^{-j}(z)|_{E^u(z)}\|} \leq C_0$$

Demonstração. Primeiramente, observe que $d^u(y_j, z_j) \leq l(\gamma_j)$ para todo $j = 0, 1, \dots, n-1$ pois $y_j, z_j \in \gamma_j$ e a distância d^u está restrita a folha de \mathcal{W}^u que contém γ . Além disso, observe também que os segmentos $\tilde{\gamma}_j$ são disjuntos dois-a-dois, pela estrutura de produto local, como mostra a figura 6.9.

Assim, como $\tilde{\gamma}_j \subset \mathcal{W}^u(p, P)$ para todo $j = 0, 1, \dots, n-1$ então:

$$\sum_{i=0}^{j-1} l(\tilde{\gamma}_i) \leq l(\mathcal{W}^u(p, P)) \quad (6.13)$$

Portanto, usando que a folheação é Lipschitz e a desigualdade 6.12, obtemos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned} \log \frac{\|df^{-j}(y)|_{E^u(y)}\|}{\|df^{-j}(z)|_{E^u(z)}\|} &\leq \sum_{i=0}^{j-1} |\log \|df^{-1}(y_i)|_{E^u(y_i)}\| - \log \|df^{-1}(z_i)|_{E^u(z_i)}\|| \\ &\leq L \sum_{i=0}^{j-1} d^u(y_i, z_i) \\ &\leq L \sum_{i=0}^{j-1} l(\gamma_i) \\ &\leq LC \sum_{i=0}^{j-1} l(\tilde{\gamma}_i) \\ &\leq LC l(\mathcal{W}^u(p, P)) \end{aligned}$$

Logo, basta tomar $C_0 = \exp(LC l(\mathcal{W}^u(p, P)))$ para completar a prova da afirmação. □

Para terminar a prova do lema, lembre-se de que pela desigualdade do valor médio, temos as seguintes desigualdades para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$:

$$\begin{aligned} d^u(z_j, y_j) &\leq \sup_{x \in \gamma} \|df^{-j}(x)|_{E^u(x)}\| d^u(z, y) \\ \inf_{w \in \gamma} \|df^{-j}(w)|_{E^u(w)}\| l(\gamma) &\leq l(\gamma_j) \end{aligned}$$

Assim, rearranjando as desigualdades acima e aplicando a afirmação 6.5.3, obtemos:

$$\frac{d^u(z_j, y_j)}{l(\gamma_j)} \leq \sup_{x, w \in \gamma} \frac{\|df^{-j}(x)|_{E^u(x)}\|}{\|df^{-j}(w)|_{E^u(w)}\|} \frac{d^u(z, y)}{l(\gamma)} \leq C_0 \frac{d^u(z, y)}{l(\gamma)}$$

Logo, usando 6.13 e a desigualdade anterior:

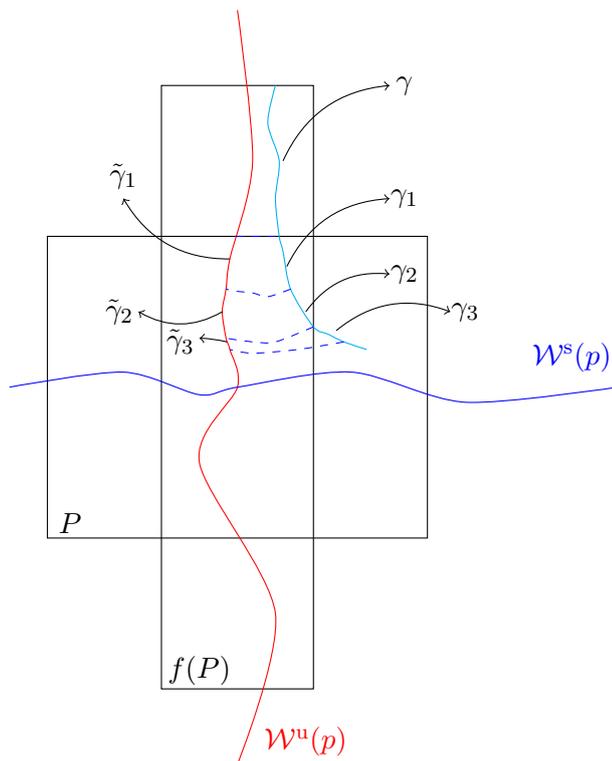


Figura 6.9: $\tilde{\gamma}_j$ são disjuntos dois-a-dois

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} d^u(z_j, y_j) &\leq C_0 \frac{d^u(z, y)}{l(\gamma)} \sum_{j=0}^{n-1} l(\gamma_j) \\ &\leq C_0 C_1 \frac{d^u(z, y)}{l(\gamma)} \end{aligned}$$

Onde a constante $C_1 > 0$ depende apenas do retângulo P e foi obtida na última desigualdade, usando que $l(\gamma_j) \leq Cl(\tilde{\gamma}_j)$ para todo $j = 0, 1, \dots, n-1$ e 6.13. Como a constante C_0 também não depende de n e apenas do retângulo P , para completar a prova do lema basta observar que:

$$\begin{aligned} \log \frac{\|df^{-n}(y)|_{E^u(y)}\|}{\|df^{-n}(z)|_{E^u(z)}\|} &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |\log \|df^{-1}(y_j)|_{E^u(y_j)}\| - \log \|df^{-1}(z_j)|_{E^u(z_j)}\|| \\ &\leq L \sum_{j=0}^{n-1} d^u(y_j, z_j) \end{aligned}$$

E logo, basta tomar a constante $C = LC_0C_1$.

□

Com o lema anterior, estamos prontos para provar a proposição 6.5.1.

Prova da proposição 6.5.1. Dado um retângulo $P \ni p$ onde $p \in \text{int } P$ e γ um W^u -segmento tal que $\gamma \cap P = \emptyset$, seja $n \geq 1$ fixado. Vamos definir uma sequência de tempos que caracteriza quando γ_j intercepta P ou não. Denotando por $n_0 = k_0 = 0$ defina:

$$n_i + 1 = \min\{j \in \mathbb{N}; j > n_{i-1} + k_{i-1} \text{ tal que } \gamma_j \cap P \neq \emptyset\}$$

$$k_i = \min\{j \in \mathbb{N}; \gamma_{n_i+j+1} \cap P = \emptyset\}$$

onde $1 \leq i \leq t$ e $n_{t+1} = n$. Mais explicitamente, $n_i + 1$ é o tempo de primeiro retorno de γ a P e k_i é o primeiro tempo em que γ escapa de P . Então, a sequência definida acima satisfaz o seguinte:

$$\gamma_j \cap P \neq \emptyset \text{ se } n_i < j \leq n_i + k_i \text{ quando } 1 \leq i \leq t$$

$$\gamma_j \cap P = \emptyset \text{ se } n_i + k_i < j \leq n_{i+1} \text{ quando } 0 \leq i \leq t$$

Lembre-se de que temos a seguinte igualdade:

$$\frac{\|df^{-n}(z)|_{E^u(z)}\|}{\|df^{-n}(y)|_{E^u(y)}\|} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\|df^{-1}(z_i)|_{E^u(z_i)}\|}{\|df^{-1}(y_i)|_{E^u(y_i)}\|}$$

Assim como foi feito na prova do lema anterior. Portanto, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \log \frac{\|df^{-n}(z)|_{E^u(z)}\|}{\|df^{-n}(y)|_{E^u(y)}\|} &= \sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{\|df^{-1}(z_i)|_{E^u(z_i)}\|}{\|df^{-1}(y_i)|_{E^u(y_i)}\|} \\ &= \sum_{i=1}^t \sum_{j=n_i}^{n_i+k_i-1} \log \frac{\|df^{-1}(z_j)|_{E^u(z_j)}\|}{\|df^{-1}(y_j)|_{E^u(y_j)}\|} + \sum_{i=0}^t \sum_{j=n_i+k_i}^{n_{i+1}-1} \log \frac{\|df^{-1}(z_j)|_{E^u(z_j)}\|}{\|df^{-1}(y_j)|_{E^u(y_j)}\|} \end{aligned}$$

Além disso, como:

$$\prod_{j=n_i}^{n_i+k_i-1} \frac{\|df^{-1}(z_j)|_{E^u(z_j)}\|}{\|df^{-1}(y_j)|_{E^u(y_j)}\|} = \frac{\|df^{-k_i}(z_{n_i})|_{E^u(z_{n_i})}\|}{\|df^{-k_i}(y_{n_i})|_{E^u(y_{n_i})}\|}$$

Então pelo lema anterior, temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t \sum_{j=n_i}^{n_i+k_i-1} \log \frac{\|df^{-1}(z_j)|_{E^u(z_j)}\|}{\|df^{-1}(y_j)|_{E^u(y_j)}\|} &= \sum_{i=1}^t \log \frac{\|df^{-k_i}(z_{n_i})|_{E^u(z_{n_i})}\|}{\|df^{-k_i}(y_{n_i})|_{E^u(y_{n_i})}\|} \\ &\leq \sum_{i=1}^t C \frac{d^u(y_{n_i}, z_{n_i})}{l(\gamma_{n_i})} \end{aligned}$$

O argumento sutil logo acima é de que como $z_{n_i}, y_{n_i} \in M \setminus P$ para todo $i = 0, 1, \dots, t$ então tomando $\kappa^u = \sup_{z \in M \setminus P} \kappa^u(z)^{-1}$ obtemos que $d^u(y_{n_i}, z_{n_i}) \leq C(\kappa^u)^{n_i}$ para todo $i = 0, 1, \dots, t$, onde $C > 0$ é uma constante positiva. Assim, a primeira série da soma acima fica limitada. Analogamente, usando que:

$$\log \frac{\|df^{-1}(z_j)|_{E^u(z_j)}\|}{\|df^{-1}(y_j)|_{E^u(y_j)}\|} \leq |\log \|df^{-1}(y_i)|_{E^u(y_i)}\| - \log \|df^{-1}(z_i)|_{E^u(z_i)}\|| \leq Ld^u(y_i, z_i)$$

Para cada $i = 0, 1, \dots, n$ concluímos que a segunda série que aparece na soma acima também é limitada e portanto, também converge, o que conclui a prova da proposição. □

6.6 Não-existência de medidas SBR

Nesta sessão vamos finalmente obter uma prova de que os difeomorfismos quase-Anosov não possuem medidas SBR. Para isso, o seguinte lema será fundamental:

Lema 6.6.1. *Seja $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 com $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$ e suponha que $h'(x) \geq 1$ para todo $x \in [-1, 1]$. Seja $a_0 \in [0, 1]$ e defina a sequência $a_i = h^{-i}(a_0)$ para todo $i \geq 1$. Então:*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = +\infty$$

Demonstração. Para mostrar que a série acima diverge, basta mostrar que ela diverge a partir de um certo termo. Observe que h é monótone crescente e $0 < h^{-1}(x) < x$ para todo $x > 0$. Logo, $a_i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta > 0$ tal que:

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(0)}{2}x^2 + R(x)$$

Satisfazendo $|R(x)| \leq \varepsilon x^2$ para todo $x \in (0, \delta)$. Como $h(0) = 0$ e $h(x) > 0$ para todo $x \in (0, \delta)$ então:

$$h(x) = |h(x)| \leq x + \left(\frac{|h''(0)|}{2} + \varepsilon \right) x^2 = x + L_\varepsilon x^2$$

Onde $L_\varepsilon = |h''(0)|/2 + \varepsilon$. Seja $j \geq 1$ tal que $a_j \in (0, \delta)$ e tome $L \geq L_\varepsilon$ de modo que $a_j \geq 1/L$. Por conveniência, defina:

$$b_n = a_{j+n-1} \text{ para todo } n \geq 1$$

Então, afirmamos que $b_i \geq 1/Li$ para todo $i \geq 1$. De fato, temos primeiramente $b_1 \geq 1/L$. Indutivamente, suponha que $b_i \geq 1/Li$, mas:

$$b_{i+1} < \frac{1}{L(i+1)}$$

Então, obtemos:

$$\begin{aligned} h(b_{i+1}) &\leq b_{i+1} + L_\varepsilon b_{i+1}^2 \leq b_{i+1} + L b_{i+1}^2 \\ &< \frac{1}{L(i+1)} \left(1 + \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \frac{1}{Li} \left(1 - \frac{1}{i+1} \right) \left(1 + \frac{1}{i+1} \right) \\ &= \frac{1}{Li} \left(1 - \frac{1}{(i+1)^2} \right) \\ &< \frac{1}{Li} \\ &\leq b_i \\ &\leq h(b_{i+1}) \end{aligned}$$

O que é absurdo. Logo, $b_i \geq 1/Li$ para todo $i \geq 1$ e assim,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} b_i \geq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{Li} = +\infty$$

□

Antes de provar a não-existência de medidas *SBR*, vamos recordar alguns fatos sobre a teoria não-uniformemente hiperbólica de difeomorfismos. O seguinte resultado, que vamos assumir sem demonstração pode ser encontrado na proposição 3.1 em [LS+81].

Teorema 6.6.2 (Ledrapiér). *Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ (que não tem qualquer relação com o difeomorfismo quase-Anosov deste texto) e suponha que f preserve uma medida *SBR* μ . Seja ξ uma partição subordinada a \mathcal{W}^u . Então, para $x \in M$ μ -q.t.p. a densidade da medida μ_x^ξ com respeito a medida de Lebesgue m_x satisfaz para todo $y, z \in \xi(x)$:*

$$\frac{\rho_x(z)}{\rho_x(y)} = \frac{\prod_{i=0}^{+\infty} \|df^{-1}(z_i)|_{E^u(z_i)}\|}{\prod_{i=0}^{+\infty} \|df^{-1}(y_i)|_{E^u(y_i)}\|}$$

Em particular, o quociente acima está bem definido.

Gostaríamos de destacar que pela proposição 6.3.4, supondo que $f : M \rightarrow M$ seja um difeomorfismo quase-Anosov com decomposição dominada $TM = E^s \oplus E^u$ e μ uma medida *SBR* para f , então a decomposição de M garantida pelo teorema de Oseledets coincide μ -q.t.p. com os fibrados estável e instável do difeomorfismo quase-Anosov. Em outras palavras, a menos de um conjunto de medida μ -nula, não é necessário distinguir as duas decomposições.

O seguinte teorema, que também vamos assumir sem demonstração, pode ser encontrado em [Pes76].

Teorema 6.6.3. *Se $f : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de classe $C^{1+\alpha}$ numa variedade compacta M , então para todo $l \geq 1$, existem constantes $\delta_l, C_l > 0$ e $\Lambda_l \subset M$ um conjunto compacto satisfazendo:*

(i) $\mu(\Lambda_l) \geq 1 - \frac{1}{l}$ para todo $l \geq 1$.

(ii) Se $x \in \Lambda_l$ e $y, z \in \mathcal{W}_{\delta_l}^u(x)$ então:

$$\frac{1}{C_l} \leq \frac{\rho_x(z)}{\rho_x(y)} \leq C_l$$

Os conjuntos Λ_l que aparecem no teorema 6.6.3 são conhecidos na literatura como **conjuntos de Pesin**. Voltando à hipótese inicial do texto, onde f é um difeomorfismo quase-Anosov satisfazendo a definição 6.1.1, vamos usar essas observações e as ferramentas desenvolvidas até agora para provar o teorema 6.1.2. Vale comentar que a prova do teorema é por contradição. Supondo que exista uma medida *SBR*, prova-se que a massa total da variedade (com o auxílio do próximo lema) tem massa infinita.

Lema 6.6.4. *Suponha que μ seja uma medida *SBR* ergódica para o difeomorfismo quase-Anosov f e seja ξ uma partição subordinada a folheação instável, isto é, $\xi(x) \subset \mathcal{W}^u(x)$ para todo $x \in M$. Então, existe um conjunto de Pesin $\Lambda \subset M$, um retângulo $R \subset M$ e uma constante $C_0 > 0$ tal que $\mu(R \cap \Lambda) > 0$, satisfazendo também:*

$$C_0^{-1} \leq \frac{\rho_x(y)}{\rho_x(z)} \leq C_0$$

Para todo $y, z \in \xi(x)$ e $x \in \Lambda$.

Demonstração. Nas hipóteses do lema acima, primeiramente vamos provar que $\mu(R) > 0$ para todo retângulo $R \subset M$. Com efeito, tome $x \in R$ e seja Σ uma seção transversal a $\mathcal{W}^u_\beta(x)$. Pela desintegração de μ com respeito a partição mensurável ξ , existe uma medida μ^Σ tal que:

$$\mu^\Sigma(R) = \int_\Sigma \mu^{\mathcal{W}^u(y)}(\mathcal{W}^u(y, R)) d\mu^\Sigma(y) \quad (6.14)$$

Como R é um retângulo, então existe $C > 0$ tal que $m^{\mathcal{W}^u(y)}(\mathcal{W}^u(y, R)) \geq C$ para todo $y \in \Sigma$. Além disso, como μ é SBR então as medidas $\mu^{\mathcal{W}^u(y)}$ são absolutamente contínuas com densidade ρ_y positiva Lebesgue quase todo ponto. Logo, para todo $y \in \Sigma$:

$$\mu^{\mathcal{W}^u(y)}(\mathcal{W}^u(y, R)) = \int \rho_y(z) dm^{\mathcal{W}^u(y)} > 0 \quad (6.15)$$

Isso conclui que $\mu(R) > 0$, por 6.14. Agora, tome Λ_l um conjunto de Pesin de modo que:

$$\frac{1}{l} \leq \frac{\mu(R)}{2}$$

Suponha por contradição que $\mu(\Lambda_l \cap R) = 0$. Então, as estimativas abaixo mostram que:

$$\mu(M) = \mu(\Lambda_l) + \mu(R) \geq \mu(R) + 1 - \frac{\mu(R)}{2} = 1 + \frac{\mu(R)}{2} > 1$$

O que é absurdo pois μ é uma medida de probabilidade. Portanto, $\mu(R \cap \Lambda_l) > 0$. □

Prova do teorema 6.1.2. Suponha por contradição que f admita uma medida μ que é SBR. Então, pelo lema 6.6.4 dado um retângulo $R \subset M$ de μ -medida positiva, existe um conjunto de Pesin Λ_l tal que $\mu(R \cap \Lambda_l) > 0$. Diminuindo R se necessário, podemos supor que $\mathcal{W}^u(x, R) \subset \mathcal{W}^u_{\delta l}(x)$ para todo $x \in R \cap \Lambda_l$.

Fixe um retângulo da forma $P = [\mathcal{W}^u_{\delta l}(p), \mathcal{W}^s_{\delta l}(p)]$ e seja $Q = f^{-1}(P) \setminus P$. Seja ξ a partição de Q dada por $\xi(x) = \mathcal{W}^u(x, Q)$. Um argumento semelhante ao da proposição 6.4.14 mostra que existe $n \geq 1$ tal que $f^n(R)$ cruza Q markovianamente e com o mesmo argumento na prova do lema 6.6.4, se mostra que $\mu(f^n(R) \cap Q) > 0$. Como Q também é um retângulo, então existe algum conjunto de Pesin Λ_k de modo que $\mu(Q \cap \Lambda_k) > 0$. Tomando $\Lambda = \Lambda_l \cup \Lambda_k$ e uma seção transversal Σ em Q , defina o seguinte conjunto:

$$\tilde{Q} = \bigcup_{\substack{y \in \Sigma \cap \Lambda \\ \mu^{\mathcal{W}^u(y)}(\xi(y)) > 0}} \xi(y)$$

Observe que por definição, temos $\xi(y) \subset \tilde{Q}$ para todo $y \in \tilde{Q}$. Além disso, $\tilde{Q} \subset Q \cap f^n(R)$ e $\mu(\tilde{Q}) > 0$ pois $\mu^{\mathcal{W}^u(y)}(\xi(y)) > 0$ para todo $y \in \tilde{Q}$ e:

$$\mu(\tilde{Q}) = \int_\Sigma \mu^{\mathcal{W}^u(y)}(\xi(y)) d\mu^\Sigma(y)$$

Mais ainda, existe uma constante $C_0 > 0$ proveniente da união dos conjuntos de Pesin Λ de modo que:

$$C_0^{-1} \leq \frac{\rho_x(z)}{\rho_x(y)} \leq C_0 \quad (6.16)$$

Para todo $x \in \tilde{Q}$ e $y, z \in \mathcal{W}^u(x, Q)$. Vamos agora definir o seguinte conjunto, para cada $i \geq 1$:

$$Q^{(i)} = \{y \in \tilde{Q}; f^j(y) \in P \text{ para todo } j = 1, \dots, i\} = \bigcap_{j=1}^i f^{-j}(P) \cap \tilde{Q}$$

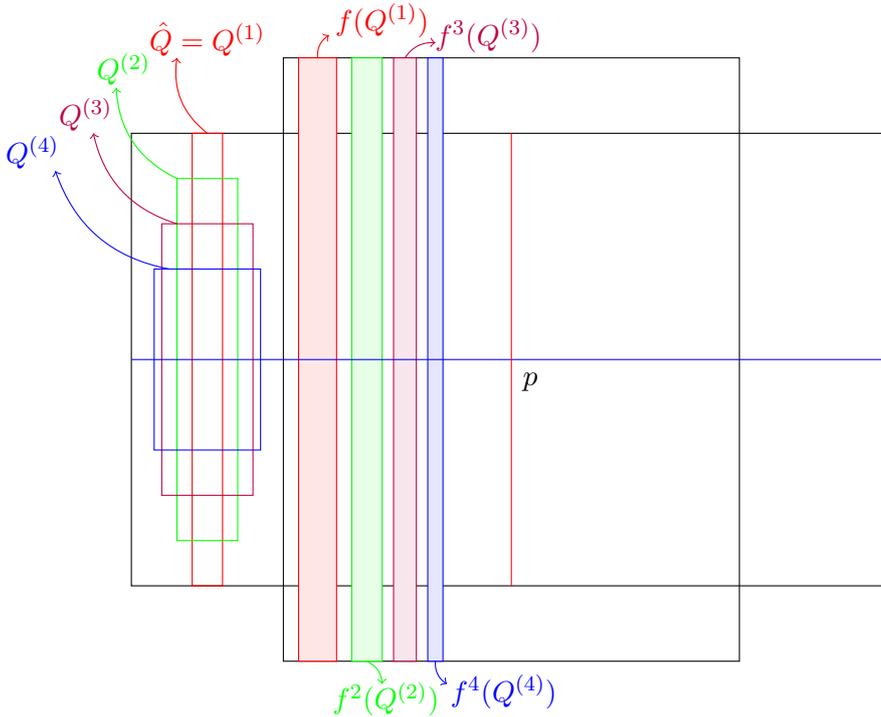


Figura 6.10: Ideia da prova do teorema 6.1.2

Denote também por $\tilde{\gamma}^{(i)}$ a projeção de $Q^{(i)}$ em $\mathcal{W}^u(p, P)$ deslizando sobre a folheação \mathcal{W}^s .

Afirmção 6.6.5. *Existe uma constante $C > 0$ que só depende do retângulo P tal que para todo $i \geq 1$ vale:*

$$\mu(Q^{(i)}) \geq Cl(\tilde{\gamma}^{(i)})$$

Demonstração. Podemos supor que a seção transversal Σ tomada anteriormente é uma folha estável da folheação estável \mathcal{W}^s contida em $\mathcal{W}^s(p, P)$. Logo, Para todo $i \geq 1$ e $x \in Q^{(i)}$ a seção transversal Σ intersecta $\mathcal{W}^u(x, Q^{(i)})$ transversalmente. Como μ é uma medida SBR então:

$$\mu(Q^{(i)}) = \int_{\Sigma} \int_{\mathcal{W}^u(x, Q^{(i)})} \rho_x(y) dm^{\mathcal{W}^u(x)}(y) d\mu^{\Sigma}(x)$$

Temos também por 6.16, que $\rho_x(y) \geq C_0 \rho_x(x)$ para todo $x \in \hat{Q}$ e $y \in \mathcal{W}^u(x, Q)$. Em particular,

$$\begin{aligned}
\mu(Q^{(i)}) &\geq \int_{\Sigma} \int_{\mathcal{W}^u(x, Q^{(i)})} C_0 \rho_x(x) dm^{\mathcal{W}^u(x)}(y) d\mu^{\Sigma(x)} \\
&= \left[\int_{\Sigma} C_0 \rho_x(x) d\mu^{\Sigma(x)} \right] m^{\mathcal{W}^u(x)}(\mathcal{W}^u(x, Q^{(i)})) \\
&= C_0^* \ell(\mathcal{W}^u(x, Q^{(i)}))
\end{aligned}$$

Além disso, usando que a holonomia é Lipschitz, existe uma constante $C_1^* > 0$ que só depende de P de modo que $\ell(\mathcal{W}^u(x, Q^{(i)})) \geq C_1^* \ell(\tilde{\gamma}^{(i)})$ para todo $i \geq 1$. Portanto,

$$\mu(Q^{(i)}) \geq C_0^* C_1^* \ell(\tilde{\gamma}^{(i)})$$

Assim, basta tomar a constante $C_0 = C_0^* C_1^*$ para concluir a prova da afirmação. \square

Para concluir a prova do teorema, observe também que a família de conjuntos $\{f^i(Q^{(i)})\}_{i \geq 1}$ é disjunta dois-a-dois. Logo, como μ é uma medida f -invariante, temos:

$$\mu(P) \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(f^i(Q^{(i)})) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(Q^{(i)}) \geq C \sum_{i=1}^{+\infty} \ell(\tilde{\gamma}^{(i)})$$

Aplicando o lema 6.6.1 a função $f|_{\mathcal{W}^u_\beta(p)}$, concluímos que a soma acima diverge, contradizendo o fato de que $\mu(M) = 1$. \square

6.7 Comportamento estatístico das órbitas

Nesta etapa vamos construir algumas vizinhanças de p que são convenientes de trabalhar. Dado um retângulo fechado, defina:

$$\partial^s R = \{x \in R; x \notin \text{int } \mathcal{W}^u(x, R)\}$$

Lema 6.7.1. *Existem retângulos P da forma $P = [\gamma^u, \gamma^s]$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (1) γ^u e γ^s são segmentos de $\mathcal{W}^u(p)$ e $\mathcal{W}^s(p)$ respectivamente e $p \in \text{int } \gamma^u \cap \text{int } \gamma^s$.
- (2) Existe um segmento compacto $\hat{W}^s \subset \mathcal{W}^s(p)$ tal que $f(\hat{W}^s) \subset \hat{W}^s$ onde $\partial^s P \subset \hat{W}^s$ e $(\hat{W}^s \setminus \mathcal{W}^s(p, P)) \cap P = \emptyset$.
- (3) Existe um segmento compacto $\hat{W}^u \subset \mathcal{W}^u(p)$ satisfazendo propriedades análogas a \hat{W}^s .

Demonstração. A prova deste lema usa o fato de que $\mathcal{W}^u(p)$ e $\mathcal{W}^s(p)$ são ambas densas em M . \square

Seja $P \subset M$ um retângulo que satisfaz as hipóteses do lema acima. Agora, vamos definir uma aplicação que tem um papel semelhante ao da aplicação expansora \hat{f} no estudo dos mapas com pontos fixos neutrais. Suponha que $x \in M \setminus P$ seja um ponto recorrente de $M \setminus P$, isto é existe uma sequência $n_k \rightarrow +\infty$ com $f^{n_k}(x) \in M \setminus P$ para todo $k \geq 1$. Considere:

$$\tau(x) = \min\{n \geq 1; f^n(x) \in M \setminus P\}$$

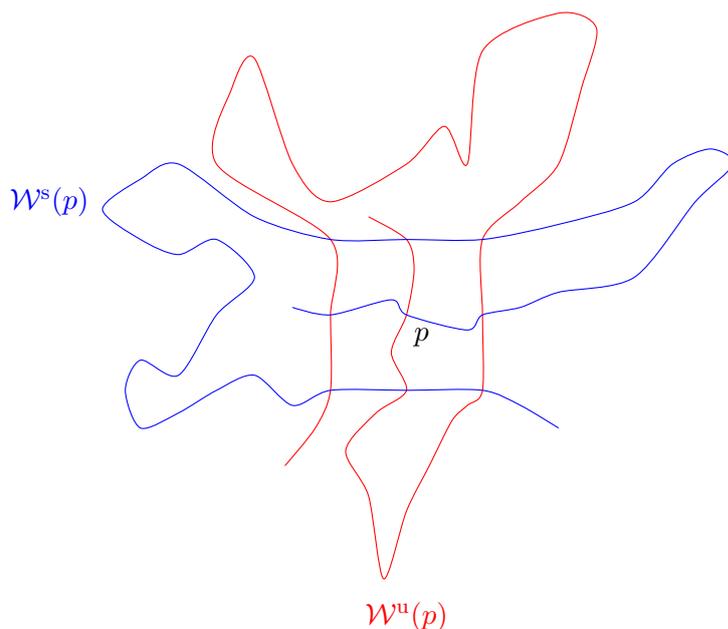


Figura 6.11: Ideia da prova do lema 6.6.1

Com isto, defina $g(x) = f^{\tau(x)}(x)$. Isto então define uma aplicação $g : M \setminus P \rightarrow M \setminus P$ que não está definida em um conjunto cuja medida de Lebesgue é nula. Ou seja, existe $\tilde{P} \subset M \setminus P$ tal que $g|_{\tilde{P}}$ está bem definida. O ponto chave é mostrar que esta aplicação possui uma medida invariante que admite medidas condicionais absolutamente contínuas nas variedades instáveis de f . Esta medida desempenha um papel semelhante à medida $\hat{\mu}$ construída no teorema 5.4.1 para a aplicação expansora por partes do intervalo \hat{f} e será usada para construir a medida infinita $\tilde{\mu}$.

Não vamos mostrar com detalhes como é feita a construção desta medida invariante por g satisfazendo estas propriedades, mas vamos dar uma ideia de como fazer isso, adaptando a prova do seguinte teorema conhecido sobre difeomorfismos parcialmente hiperbólicos: seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^2 com uma decomposição dominada $TM = E^u \oplus E^{cs}$ onde M é uma variedade compacta e conexa de dimensão dois. Então, o seguinte teorema originalmente provado em [PS82], pode ser encontrado com uma demonstração completa em [Via99], teorema 7.1.

Teorema 6.7.2. *Seja $U \subset F$ um disco compacto contido em uma folha F da folheação instável \mathcal{F}^u e denote por m_U a restrição da medida de \mathcal{F}^u a este disco. Qualquer ponto de acumulação da sequência de medidas definida por:*

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m_U$$

É uma medida f -invariante que possui medidas condicionais absolutamente contínuas nas variedades instáveis de f , isto é, ao longo da folheação \mathcal{F}^u .

Antes de explicar como funciona a prova deste teorema para que seja adaptada para g , vamos definir alguns conceitos: dado $p \in U$ e uma carta folheada $\phi : V \rightarrow V^1 \times V^2$ contendo p , dizemos que uma componente conexa γ de $f^j(U) \cap V$ é uma **crossing component** se $\phi(\gamma)$ é gráfico de uma função de classe C^2 $\tilde{\gamma} : V^1 \rightarrow V^2$ em $V^1 \times V^2$. Caso contrário, dizemos que γ é uma **non-crossing component**.

Na figura 6.12 são exibidas duas componentes conexas γ_1 e γ_2 de $f^j(U) \cap V$, a primeira em vermelho sendo uma crossing component e a segunda em azul uma non-crossing component.

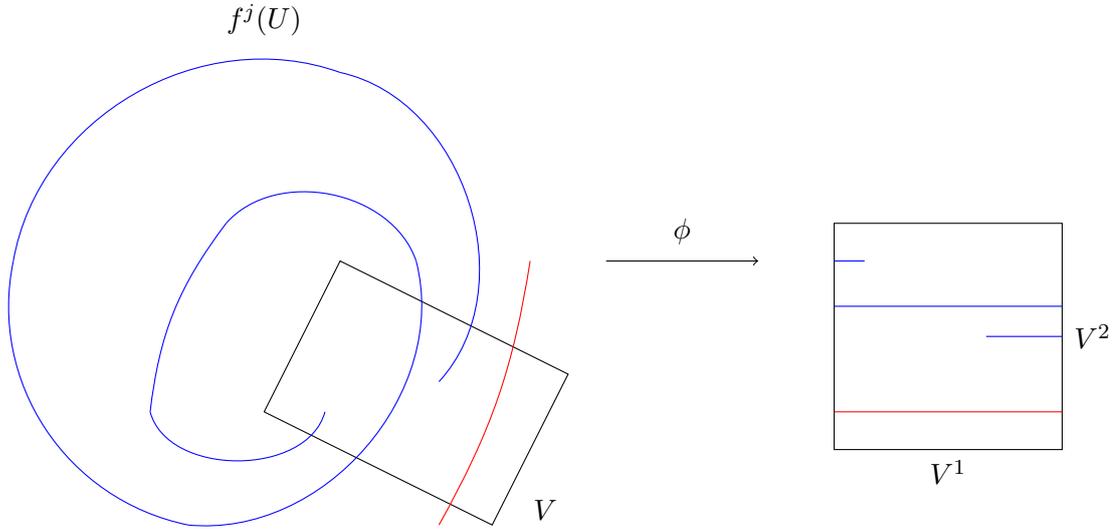


Figura 6.12: A componente de $f^j(U)$ em azul não é uma *crossing component* e a componente de $f^j(U)$ em vermelho é uma *crossing-component*

Agora, denote por Γ_n^c a união de todas as componentes conexas de $f^j(U) \cap V$ que cruzam V e seja Γ_n^{nc} o análogo para as componentes que não cruzam V . Como o suporte das medidas μ_n estão contidos em $f^j(U) \cap V$, então podemos escrever $\mu_n|_V = \mu_n^c + \mu_n^{nc}$ onde:

$$\mu_n^c = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m_U \Big|_{\Gamma_j^c} \quad \text{e} \quad \mu_n^{nc} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_*^j m_U \Big|_{\Gamma_j^{nc}}$$

Vamos explicar como funciona a prova do teorema 6.7.2: primeiro, fazemos uma estimativa de distorção sobre a derivada do difeomorfismo ao longo das folhas instáveis e provamos que esta distorção é limitada. Em seguida, prova-se que para todo ponto de acumulação μ da sequência de médias no teorema 6.7.2 e para todo $p \in \Lambda$ existe uma carta folheada $\phi_p : V \rightarrow V_1 \times V_2$ para a folheação instável em $p \in V$ de modo que a medida $(\phi_p)_* \mu$ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue ao longo da folheação horizontal em $V_1 \times V_2$. Isto é feito assim: prova-se que a massa total de μ_n^{nc} converge a 0 quando $n \rightarrow +\infty$, ou seja, a contribuição das non-crossing components para a medida μ_n se torna desprezível quando $n \rightarrow +\infty$. Como consequência, segue que a fração de μ_n que está suportada em non-crossing components não tem nenhum efeito quando passa ao limite:

$$(\phi_p)_* \mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} (\phi_p)_* \mu_{n_k}^c$$

O ponto crucial da prova deste teorema é garantir que as non-crossing components tenham medida desprezível ao passar o limite, pois todas as estimativas de distorção são válidas apenas para as crossing components. As estimativas de distorção garantem no final que a medida limite $(\phi_p)_* \mu$ é absolutamente contínua ao longo da folheação horizontal com densidade uniformemente limitada superior e inferiormente por uma constante positiva que só depende do difeomorfismo f .

Para adaptar esta demonstração para g , precisamos garantir apenas duas propriedades: primeiro, provar que as estimativas de distorção ao longo da folheação instável é válida para g e segundo, provar que as non-crossing components são *desprezíveis* com respeito a um ponto de acumulação da sequência:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g_*^j m_U$$

Por outro lado, a situação que temos em relação às crossing components é ainda melhor: sendo P^+ uma das componentes de $f(P) \setminus P$ e $x \in P^+$, defina $U = \mathcal{W}^u(x, P^+)$. Seja $R \subset M \setminus P$ um retângulo com diâmetro pequeno e \hat{W}^s satisfazendo o lema 6.7.1 de modo que $\text{int } R \cap \hat{W}^s = \emptyset$. Então, $g^i(U)$ é a união disjunta de segmentos \mathcal{W}^u onde cada elemento dessa união começa e termina em algum ponto em $g^j(\hat{W}^s)$ para algum $j \geq 0$, como mostra a figura 6.13.

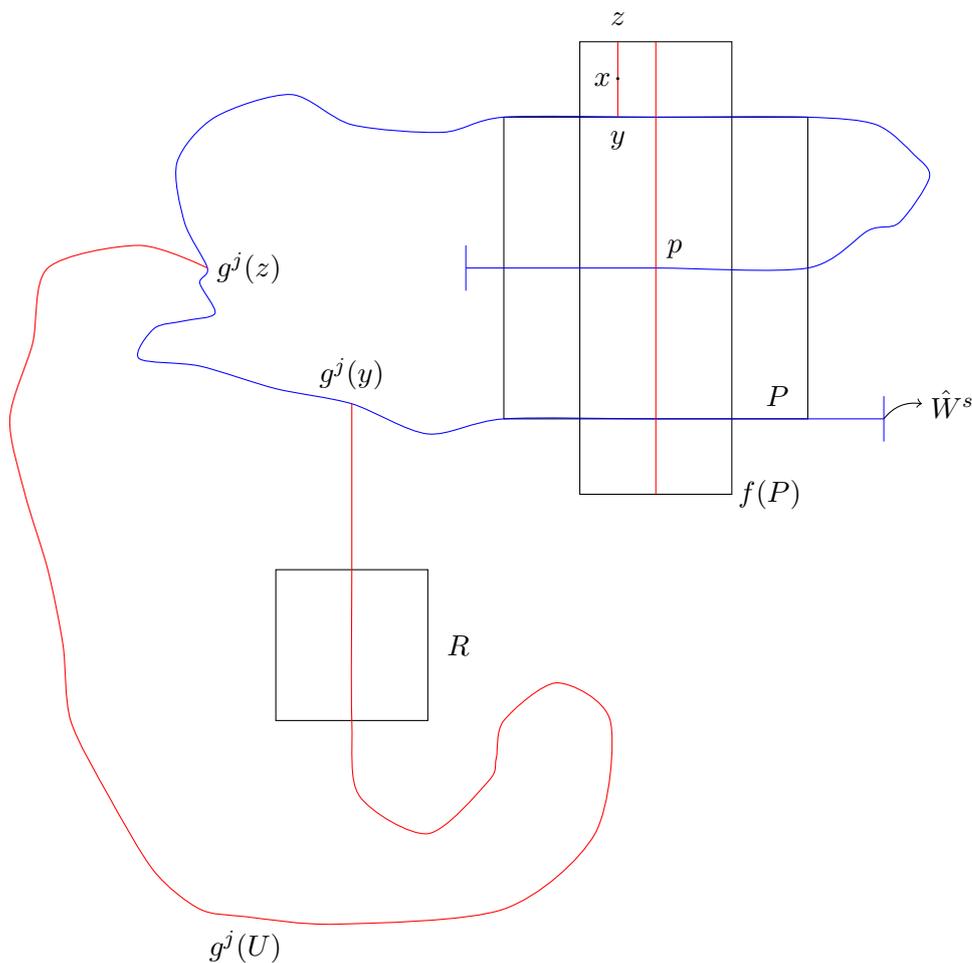


Figura 6.13: Na figura acima, $y \in \hat{W}^s$ e $z \in f(\hat{W}^s) = g(\hat{W}^s)$

Além disso, como $f(\hat{W}^s) \subset \hat{W}^s$ então cada componente conexa de $g^j(U)$ que intersecta R também cruza markovianamente o retângulo R . Em particular, não existem componentes conexas de $g^j(U)$ que intersectam o retângulo R e que não cruzam este retângulo. Em particular, as non-crossing components são desprezíveis, por vacuidade.

Como já garantimos que não existem non-crossing components, tudo que precisamos agora é garantir as estimativas de distorção. Mas, isto também é possível ser feito, pelas propriedades de distorção

estudadas anteriormente. De fato, seja ρ_i a densidade da medida $g_*^i m_L$ com respeito à medida de Lebesgue em $g^i(L)$. Então, pela proposição 6.5.1, existe $J > 0$ (independente de i) tal que para todo x, y que pertence a mesma componente de $g^i(L) \cap R$ vale:

$$J^{-1} \leq \frac{\rho_i(x)}{\rho_i(y)} \leq J$$

Assim, a prova do teorema 6.7.2 pode ser reproduzida também para g com os mesmos argumentos. Isso prova seguinte proposição:

Proposição 6.7.3. *Existe uma medida de probabilidade g -invariante μ com a propriedade de que μ tem medidas condicionais absolutamente contínuas nas variedades instáveis de f .*

Com todas essas ferramentas, estamos prontos para provar o teorema 6.1.3.

Prova do teorema 6.1.3. Seja $Q_i = \{x \in M; \tau(x) = i\}$ onde τ é o tempo de primeiro retorno a $M \setminus P$. Defina:

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{i-1} f_*^j(\mu|_{Q_i}) \quad (6.17)$$

Então, $\tilde{\mu}$ é uma medida f -invariante. Seja $U \subset M$ um aberto de M que contém $p \in U$. Então para n suficientemente grande:

$$M \setminus U \subset M \setminus \left(\bigcap_{i=-n}^n f^i(P) \right)$$

Em particular, $\hat{\mu}(M \setminus U) < +\infty$ e assim, $\hat{\mu}$ é σ -finito. Por outro lado, não pode ser finita pois $\hat{\mu}$ tem medidas condicionais absolutamente contínuas em variedades instáveis de f e o teorema 6.1.2 diz que f não tem medidas SBR. \square

Assim como fizemos no capítulo anterior no estudo dos mapas com pontos fixos neutrais, agora estamos prontos para estudar o comportamento estatístico das órbitas de f . Para isto, vamos provar o seguinte lema:

Lema 6.7.4. *Seja (g, μ) como no lema 6.7.3. Então, (g, μ) é ergódico.*

Demonstração. A ideia para provar este lema se baseia em duas etapas que também estão presentes na prova da ergodicidade da medida SBR para sistemas hiperbólicos: o primeiro passo é usar o argumento de Hopf para mostrar que dado qualquer retângulo $R \subset M$, temos que $x \in R$ é futuro-genérico m-q.t.p. com respeito a alguma medida ergódica μ_R , com μ_R dependendo de R a priori. Lembre-se de que um ponto $x \in R$ é futuro-genérico com respeito a uma medida μ_R se para toda função integrável $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ temos:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi(g^j(x)) \rightarrow \int \phi d\mu_R \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

Definimos de maneira análoga um ponto passado-genérico. O segundo passo é mostrar que esta medida não depende do retângulo R tomado. Ou seja, $\mu = \mu_R$ para todo retângulo R .

Observação 6.7.5. *Seja $R \subset M \setminus P$ um retângulo. Observe que quando usamos a palavra **retângulo** ou o símbolo $\mathcal{W}^u(x, R)$ neste capítulo, sempre estamos nos referindo a a variedade instável local de f no retângulo R , **que não necessariamente coincide com a variedade instável local de g !** A princípio, precisamos argumentar para algum retângulo R conveniente, $\mathcal{W}^u(x, R)$ é de fato uma variedade instável local de g , no sentido clássico: para todo $y \in \mathcal{W}^u(x, R)$ vale que $d(g^{-n}(x), g^{-n}(y)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Isso será verdade se temos condições parecidas ao do lema 6.6.1, ou seja, $\text{int } R \cap \hat{W}^s = \emptyset$. De fato, esta condição vai garantir que para todo $n \geq 0$, ou $f^{-n}(\mathcal{W}^u(x, R)) \subset P$ ou $f^{-n}(\mathcal{W}^u(x, R)) \cap P = \emptyset$. De forma semelhante, $\mathcal{W}^s(x, R)$ será uma variedade estável local de g se $R \cap \hat{W}^u = \emptyset$.*

Vamos recordar o argumento de Hopf para um retângulo $R \subset M$ com as propriedades apresentadas no último parágrafo. Como as medidas condicionais de μ são absolutamente contínuas em variedades instáveis, existe $L = \mathcal{W}^u(x, R)$ tal que $y \in L$ m-q.t.p. é genérico com respeito a alguma medida ergódica ν_y . Todas estas medidas são de fato idênticas pois $d(g^{-n}(z), g^{-n}(y)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$, para todo $z, y \in L$. Denote esta medida por μ_R . Observe que se y é futuro-genérico com respeito a medida μ_R , então z também é futuro-genérico com respeito a μ_R para todo $z \in \mathcal{W}^u(x, R)$. Logo, como a folheação \mathcal{W}^s é Lipschitz, segue que para $z \in R$ m-q.t.p. é futuro genérico com respeito a μ_R .

Para provar o segundo passo, é suficiente observar que se R_1 e R_2 são retângulos com as propriedades acima então existe $n \geq 1$ tal que $g^n(R_1) \cap R_2 \neq \emptyset$. \square

Antes de provar o teorema 6.1.4, o seguinte lema será útil para as estimativas.

Lema 6.7.6. *Dados $\alpha > 0$ e $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequenos, existem vizinhanças $P_1, P_2 \subset M$ de p tais que $\text{diam } P_1 \leq \alpha$ e que para $x \in M \setminus P_2$ m-q.t.p. vale:*

$$\frac{\#\{0 \leq k \leq n; f^k(x) \in M \setminus P_1\}}{\#\{0 \leq k \leq n; f^k(x) \in P_1 \setminus P_2\}} < \varepsilon \quad (6.18)$$

Para todo $n \geq 1$ suficientemente grande.

Demonstração. Para ver que isso é verdade, seja P_1 um retângulo satisfazendo as mesmas propriedades do lema 6.7.1. Seja $g_1 : M \setminus P_1 \rightarrow M \setminus P_1$ e μ_1 como na proposição 6.7.3 e seja $\tilde{\mu}$ a medida infinita construída na prova do teorema 6.1.3. Seja $P_2 \subset M$ pequeno o suficiente de modo que $\tilde{\mu}(M \setminus P_1) \leq \varepsilon \tilde{\mu}(P_1 \setminus P_2)$. Então, a medida $\mu_2 = \tilde{\mu}|_{M \setminus P_2}$ é invariante sob a aplicação de primeiro retorno $g_2 : M \setminus P_2 \rightarrow M \setminus P_2$ e (g_2, μ_2) é ergódico. Aplicando o teorema de Birkhoff a (g_2, μ_2) obtemos o resultado desejado, concluindo a demonstração. \square

Prova do teorema 6.1.4. Vamos mostrar que fixado $\varepsilon > 0$ e um retângulo P que contém p , para $x \in M$ Lebesgue quase todo ponto e para todo $n \geq 1$ suficientemente grande, vale a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{n} \#\{j = 0, 1, \dots, n-1; f^j(x) \in P\} > 1 - \varepsilon \quad (6.19)$$

Primeiramente, tome um retângulo menor $P' \subset P$ satisfazendo o lema anterior e denote por X o conjunto dos pontos que não satisfazem a desigualdade acima, isto é, $x \in X$ se e somente se existe uma sequência $n_k \rightarrow +\infty$ de tal modo que:

$$\frac{1}{n} \#\{j = 0, 1, \dots, n-1; f^j(x) \in M \setminus P\} > \varepsilon \text{ para todo } k \geq 1 \quad (6.20)$$

Suponha por absurdo que X seja um conjunto de medida de Lebesgue positiva, ou seja, $m(X) > 0$. Como a desigualdade do lema 6.7.6 vale para $x \in M \setminus P'$ Lebesgue quase todo ponto e P' foi um retângulo tomado de modo que $M \setminus P \subset M \setminus P'$ então existe um ponto $x \in X$ que também satisfaz a desigualdade 6.18. Por outro lado, para todo $k \geq 1$ suficientemente grande obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=0}^{n_k-1} \chi_{M \setminus P}(f^j(x))}{\sum_{j=0}^{n_k-1} \chi_{P \setminus P'}(f^j(x))} &= \frac{\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \chi_{M \setminus P}(f^j(x))}{\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \chi_{P \setminus P'}(f^j(x))} \\ &> \frac{\varepsilon}{\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \chi_{P \setminus P'}(f^j(x))} \\ &> \varepsilon \end{aligned}$$

Onde na última desigualdade foi usado o fato de que a média temporal é sempre menor ou igual a um. Isso contradiz o fato de que x satisfaz a desigualdade 6.18. Portanto, temos $m(X) = 0$ mostrando que vale a desigualdade 6.19 para $x \in M$ Lebesgue quase todo ponto e $n \geq 1$ suficientemente grande. Em particular,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_P(f^j(x)) = 1$$

Para $x \in M$ Lebesgue quase todo ponto, o que mostra que δ_p é uma medida física para f . \square

6.8 Construção de um quase-Anosov no toro

Agora que muitas técnicas foram introduzidas para estudar difeomorfismos quase-Anosov, vamos construir explicitamente um exemplo no toro, satisfazendo a definição 6.1.1 que é topologicamente conjugado a um difeomorfismo de Anosov no toro. O exemplo que vamos construir tem a princípio dois papéis: além de mostrar que existem difeomorfismos quase-Anosov e que não estamos falando do conjunto vazio na definição 6.1.1, o exemplo mostra que é possível obter difeomorfismos cujo comportamento estatístico é trivial, mas tão caótico do ponto de vista da topologia quanto um Anosov linear no toro.

Antes de detalhar mais sobre a construção do exemplo, vamos estabelecer algumas hipóteses e notações. Denotando por $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ o Arnold cat map no toro, lembre-se de que este mapa é induzido pela matriz com coeficientes inteiros e com determinante $\det A = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Além disso, os auto-valores $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ desta matriz satisfazem $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ e A é conjugada a matriz diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

Onde $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda^{-1} = \lambda_2$. A ideia para a construção é a seguinte: tomando cartas coordenadas ao redor do ponto fixo $p \in \mathbb{T}^2$ que levam este ponto na origem do plano cartesiano, construímos um

difeomorfismo \tilde{g} ao redor de uma vizinhança pequena que contém a origem e está contida na imagem da carta, de tal modo que sua derivada na origem tenha um auto-valor igual a um. Tomando um disco aberto e pequeno que contém a origem, construímos este difeomorfismo de modo que ele coincida com a matriz diagonal D fora deste disco, preservando a folheação horizontal nesta vizinhança. Construído este difeomorfismo ao redor da origem, induzimos um difeomorfismo quase-Anosov g no toro que coincide com f fora de uma vizinhança do ponto fixo em p e que possui a mesma folheação estável de f .

Antes de entrar nos detalhes de como as ideias acima serão organizadas, vamos provar o seguinte lema que garante a existência de uma função contínua ξ no intervalo cuja derivada tem propriedades análogas à função κ^u de um difeomorfismo quase-Anosov:

Lema 6.8.1. *Existe $\varepsilon > 0$ e uma função $\xi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ que satisfaz $\xi'(y) \geq 1$ para todo $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $\xi'(y) = 1$ se e somente se $y = 0$. Além disso, se $|y| \geq 3\varepsilon/4$ então $\xi(y) = \lambda^{-1}y$.*

Demonstração. Sejam $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ bump functions satisfazendo as seguintes propriedades:

- (1) $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varphi(x) = 1$ quando $x \in (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ e $\varphi(x) = 0$ se $\varepsilon/2 \leq |x| < 3\varepsilon/4$.
- (2) $\psi(x) > 1$ para todo $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $\psi(x) = 1$ se e somente se $x = 0$. Além disso, $\psi(x) = \lambda^{-1}$ para todo $-\varepsilon/2 \leq |x| < \varepsilon$.

Com isto, defina a seguinte função:

$$\xi(y) = \varphi(y) \left[\int_0^y \psi(t) dt + y \right] + \lambda^{-1}(1 - \varphi(y))y \quad (6.21)$$

Vamos mostrar que ξ satisfaz as condições do lema. Primeiramente, escolha $\varepsilon > 0$ e $B > 0$ de tal modo que:

$$-B \leq \varphi'(y) \leq B \quad (6.22)$$

$$\varepsilon > \frac{1 - \lambda^{-1}}{B(1 - 2\lambda^{-1})} \quad (6.23)$$

A derivada de ξ pode ser calculada a partir de 6.21 e obtida como:

$$\xi'(y) = \varphi'(y) \left[\int_0^y \psi(t) dt + y(1 - \lambda^{-1}) \right] + \varphi(y)[\psi(y) - \lambda^{-1}] + \lambda^{-1} \quad (6.24)$$

Como consequência da igualdade acima, usando o fato de que $\varphi \equiv 1$ em $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ e as propriedades de ψ em (2), obtemos $\xi'(0) = 1$, $\xi(y) = \lambda^{-1}y$ sempre que $\varepsilon > |y| \geq \varepsilon/2$ e $\xi'(y) > 1$ para todo $0 < |y| \leq \varepsilon/2$. Resta apenas checar que ξ satisfaz $\xi'(y) > 1$ quando $\varepsilon/2 \leq |y| < 3\varepsilon/4$. Neste caso, como temos $\psi(y) = \lambda^{-1}$ então a derivada se reduz a uma expressão mais simples:

$$\xi'(y) = \varphi'(y) \left[\int_0^y \psi(t) dt + y(1 - \lambda^{-1}) \right] + \lambda^{-1} \quad (6.25)$$

Para ver que $\xi'(y) > 1$ também é verdade no caso em que $\varepsilon/2 \leq |y| < 3\varepsilon/4$, observe primeiramente que como λ^{-1} é uma cota superior de ψ então para todo $y \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ temos:

$$\int_0^y \psi(t) dt \leq \lambda^{-1} \varepsilon$$

Além disso, como $\varphi'(y) < 0$ então obtemos a desigualdade abaixo:

$$\varphi'(y) \int_0^y \psi(t) dt \geq \varphi'(y) \lambda^{-1} \varepsilon \quad (6.26)$$

Logo, reunindo as observações anteriores obtemos:

$$\xi'(y) = \varphi'(y) \left[\int_0^y \psi(t) dt + y(1 - \lambda^{-1}) \right] + \lambda^{-1} \quad (\text{por 6.25})$$

$$\geq \varphi'(y) (\varepsilon \lambda^{-1} - \varepsilon(1 - \lambda^{-1})) + \lambda^{-1} \quad (\text{por 6.26})$$

$$= \varphi'(y) \varepsilon (2\lambda^{-1} - 1) + \lambda^{-1}$$

$$\geq -B\varepsilon (2\lambda^{-1} - 1) + \lambda^{-1} \quad (\text{por 6.22})$$

$$= B\varepsilon (2\lambda^{-1} - 1) + \lambda^{-1}$$

$$> 1 - \lambda^{-1} + \lambda^{-1} \quad (\text{por 6.23})$$

$$> 1$$

Onde na segunda desigualdade, foi usado o fato de que $y > -\varepsilon$ além da observação 6.26. Isso mostra que a função ξ satisfaz as condições do lema. \square

Usando o lema acima, vamos construir um difeomorfismo que fixa a origem, definido num disco, que além de preservar a folheação horizontal do plano cartesiano, a derivada na direção vertical é uma função que satisfaz o lema anterior.

Lema 6.8.2. *Seja $p \in \mathbb{T}^2$ um ponto fixo de f e seja $\phi : B(p, r) \rightarrow B(0, \varepsilon)$ uma carta de \mathbb{T}^2 que lineariza f em uma vizinhança de p , isto é, $\phi \circ f \circ \phi^{-1}(x, y) = D(x, y)$ para todo $(x, y) \in B(0, \varepsilon)$. Então, existe um difeomorfismo $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *Existe uma função $\xi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $(\phi \circ g \circ \phi^{-1})(x, y) = (\lambda x, \xi(y))$ para todo $(x, y) \in B(0, \varepsilon)$ onde ξ satisfaz as condições do lema 6.8.1.*

(ii) *$\phi \circ g \circ \phi^{-1}(x, y) = D(x, y)$ para todo $(x, y) \in B(0, \varepsilon) \setminus B(0, 3\varepsilon/4)$.*

(iii) *$\phi \circ g \circ \phi^{-1}$ preserva a folheação horizontal em $B(0, \varepsilon)$.*

Demonstração. Seja $\xi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada pelo lema anterior e defina $\tilde{g} : B(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $\tilde{g}(x, y) = (\lambda x, \xi(y))$. Então, \tilde{g} satisfaz as propriedades (i),(ii),(iii) por construção da ξ e além disso, é um difeomorfismo (de fato, \tilde{g} é um difeomorfismo local injetor, pois ξ é crescente). Com isto, defina um difeomorfismo $g : B(p, r) \rightarrow B(0, \varepsilon)$ por $g = \phi^{-1} \circ \tilde{g} \circ \phi$. Então $\tilde{g} = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$ e logo, esta função preserva a folheação horizontal em $B(0, \varepsilon)$. Além disso, como $\tilde{g} \equiv D$ em $B(0, \varepsilon) \setminus B[0, 3\varepsilon/4]$ então g coincide com f no aberto $U = \phi^{-1}(B(0, \varepsilon) \setminus B[0, 3\varepsilon/4])$ cujo bordo coincide com o bordo de $B(p, r)$. Isto implica em particular, que podemos estender g em M definindo $g(x) = f(x)$ em $M \setminus B(p, r)$ e portanto, o difeomorfismo g estendido em M é o difeomorfismo procurado. \square

Observe que da prova do lema anterior, o difeomorfismo $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ construído tem a mesma variedade estável do Anosov linear f , pois g e f coincidem fora de uma vizinhança do ponto fixo e $\phi \circ g \circ \phi^{-1}$ preserva a folheação horizontal no plano cartesiano. Em particular, como a variedade estável e instável do Arnold Cat map são órbitas por um fluxo irracional, seque que a variedade estável de g é densa. Para garantir que g é um difeomorfismo quase-Anosov, vamos precisar do seguinte lema sobre difeomorfismos parcialmente hiperbólicos:

Lema 6.8.3. *Suponha que M seja uma variedade Riemanniana compacta e conexa de dimensão 2. Se $g : M \rightarrow M$ é um difeomorfismo parcialmente hiperbólico com decomposição $TM = E^s \oplus F$ e \mathcal{W}^s é minimal, isto é, $\mathcal{W}_g^s(x)$ é denso para todo $x \in M$ então g é topologicamente misturadora.*

Demonstração. A ideia da prova deste lema consiste em mostrar que todo segmento de variedade estável suficientemente grande é ε -denso em M . Para ver que isto é verdade, vamos antes mostrar a seguinte afirmação:

Afirmção 6.8.4. *Para todo $x \in M$ existe uma constante $L(x) > 0$ que satisfaz a seguinte propriedade: se γ é um segmento da variedade estável $\mathcal{W}_g^s(x)$ que contém x com comprimento $\ell(\gamma) \geq L$ então γ é ε -denso.*

Demonstração. Para provar a afirmação, suponha por absurdo que exista um ponto $x \in M$ tal que para toda constante $L > 0$, exista um segmento de variedade estável γ que contém x de comprimento $\ell(\gamma) \geq L$ que não é ε -denso. Então, para todo $n \geq 1$ podemos obter um segmento de variedade estável γ_n que contém x de comprimento $\ell(\gamma_n) \geq n$ e um ponto $y_n \in M$ de tal modo que $d(y_n, z) \geq \varepsilon$ para todo $z \in \gamma_n$. Pela compacidade de M , podemos supor que $y_n \rightarrow y \in M$ passando a uma subsequência se necessário. Afirmamos que neste caso existe $n_0 \geq 1$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$d(y, z) \geq \varepsilon/2 \text{ para todo } z \in \gamma_n \text{ e } n \geq n_0 \quad (6.27)$$

Com efeito, tomando $n \geq n_0$ de modo que $d(y_n, y) < \varepsilon/2$ para todo $n \geq n_0$, fixando $z \in \gamma_n$ temos por construção:

$$d(y, z) \geq d(y_n, z) - d(y_n, y) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Isso prova o 6.27. Por outro lado, como $\mathcal{W}_g^s(x)$ é uma variedade imersa de M de dimensão 1 e γ_n é uma seqüência de segmentos de \mathcal{W}_g^s de comprimento arbitrariamente grande que contém x , então:

$$\mathcal{W}_g^s(x) = \bigcup_{n \geq 1} \gamma_n$$

Assim, 6.27 prova que $d(y, z) \geq \varepsilon/2$ para todo $z \in \mathcal{W}_g^s(x)$, mostrando em particular que \mathcal{W}_g^s não é denso. Isso contradiz a hipótese do lema, o que prova a afirmação por absurdo. \square

Afirmção 6.8.5. *Para todo $\varepsilon > 0$ existe uma constante $L > 0$ satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $x \in M$, se $\gamma \subset \mathcal{W}_g^s(x)$ é um segmento de variedade estável com comprimento $\ell(\gamma) \geq L$ então γ é ε -denso em M .*

Demonstração. Como consequência da afirmação anterior e da continuidade da folheação estável em M , observe que para cada $x \in M$ existe $r(x) > 0$ que depende de x , satisfazendo a seguinte propriedade: se $y \in B(x, r(x))$ e γ é um segmento de $\mathcal{W}_g^s(y)$ que contém y de comprimento $\ell(\gamma) \geq 2L(x)$ então γ é 2ε -denso em M . Desta forma, a coleção $\{B(x, r(x))\}_{x \in M}$ é uma cobertura por abertos de M e portanto, por compacidade, podemos obter uma subcoleção finita indexada por x_1, \dots, x_k que ainda cobre M . Defina:

$$L = \max_{1 \leq i \leq k} 2L(x_i)$$

Como consequência, para todo $x \in M$, todo segmento $\gamma \subset \mathcal{W}_g^s$ que contém x é ε -denso, desde que seu comprimento satisfaça $\ell(\gamma) \geq L$, como queríamos mostrar. \square

Provada esta última afirmação, vamos mostrar que todo segmento de variedade estável suficientemente grande é denso em M . Para provar que g é topologicamente misturadora, sejam $U, V \subset M$ abertos de M e seja $y \in V$ qualquer fixado. Tome $\varepsilon < \min\{\text{diam } U, \text{diam } V\}$ e seja $L > 0$ a constante satisfazendo a afirmação 6.8.5. Com este $L > 0$, escolha $n \geq 1$ suficientemente grande de modo que $C\lambda^{-n} \geq L\ell(\gamma)^{-1}$ e seja $\gamma \subset V$ um segmento suficientemente pequeno que contém y contido na variedade estável local de y . Então:

$$\begin{aligned} \ell(f^{-n}(\gamma)) &= \int \|(f \circ \gamma)'(t)\| dt \\ &\geq C\lambda^{-n} \int \|\gamma'(t)\| dt \\ &\geq L\ell(\gamma)^{-1} \ell(\gamma) \\ &= L \end{aligned}$$

Logo, $f^{-n}(\gamma)$ é um segmento da variedade estável de y com comprimento $\ell(f^{-n}(\gamma)) \geq L$ e portanto, segue que $f^{-n}(\gamma)$ é ε -denso em M . Como U também é aberto, segue que $f^{-n}(\gamma) \cap U \neq \emptyset$ e em particular, $f^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset$, como queríamos provar. Isto mostra que g é topologicamente misturadora. \square

Corolário 6.8.6. *Se $g : M \rightarrow M$ é o difeomorfismo do lema anterior, então g é quase-Anosov. Além disso, $\mathcal{W}_g^s(x) = \mathcal{W}_f^s(x)$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Pela construção do difeomorfismo g no lema 6.8.2, temos que g satisfaz as condições (i) e (ii) da definição 6.1.1. Além disso, como a folheação estável de g coincide com a folheação estável do Anosov linear, que é minimal, segue do lema anterior que g é topologicamente misturadora e em particular, é transitiva, mostrando que g também satisfaz a condição (iii) da definição 6.1.1. Isso mostra que g é quase-Anosov. \square

Agora, vejamos como a construção do difeomorfismo g acima nos leva a concluir que este quase-Anosov é topologicamente conjugado a um difeomorfismo de Anosov. Dizemos que um homeomorfismo $f : M \rightarrow M$ é **expansivo** se para todo $x \neq y$ existe uma constante $r > 0$ e um inteiro $n \geq 1$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq r$. Muitos resultados interessantes foram estudados para homeomorfismos expansivos do toro nos últimos anos (veja [Lew89]). Um deles, que será enunciado agora e que pode ser encontrado no teorema 5.5 em [Lew89], classifica a dinâmica dos homeomorfismos expansivos do toro:

Teorema 6.8.7 ([Lew89]). *Se $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é um homeomorfismo expansivo do toro, então f é topologicamente conjugado a um difeomorfismo de Anosov. Ou seja, existe um difeomorfismo de Anosov $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ e um homeomorfismo $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ que satisfaz $h \circ f = A \circ h$.*

Com isso, podemos concluir este trabalho resumindo toda a discussão acima no seguinte teorema:

Teorema 6.8.8. *Existe um difeomorfismo quase-Anosov em \mathbb{T}^2 que é topologicamente conjugado a um difeomorfismo de Anosov no toro.*

6.9 Discussão

Como vimos neste trabalho, um dos problemas centrais mais recentes na teoria de sistemas dinâmicos e teoria ergódica é sobre a existência de medidas físicas e quais propriedades elas carregam. Como o leitor também pôde perceber, provar a existência destas medidas constitui-se um problema muito difícil e as técnicas existentes são limitadas apenas a alguns sistemas, como os uniformemente hiperbólicos por exemplo. Este problema faz parte da *Conjectura de Palis* originalmente formulada em [Pal00] que afirma que para f em um conjunto C^r -denso de difeomorfismos, existe apenas um número finito de medidas físicas onde a união de suas bacias estatísticas de atração constitui-se um conjunto de medida de Lebesgue total na variedade ambiente. Outra conjectura conhecida que aborda este problema é a *Conjectura de Viana*¹: se uma aplicação diferenciável f tem apenas expoentes de Lyapunov não-nulos para Lebesgue quase todo ponto, então f admite alguma medida SBR.

Ainda menos conhecidos são os mecanismos/configurações dinâmicas do sistema que são responsáveis pela existência de uma medida física de Dirac suportada em um ponto fixo do tipo sela, como os exemplos dos mapas com pontos fixos neutrais e os difeomorfismos quase-Anosov. Além disso, estes exemplos não são estáveis por perturbações. Isto leva a crer que medidas físicas de Dirac suportadas em um ponto fixo do tipo sela é um fenômeno não-genérico no seguinte sentido: o conjunto dos difeomorfismos f de classe C^1 que admitem um ponto fixo do tipo sela é *pequeno*. Buscando entender este problema mais a fundo, foi enunciado em [GG20] a seguinte conjectura:

Conjectura 6.9.1. *O conjunto $U \subset \text{Diff}^1(M)$ dos difeomorfismos f de classe C^1 de M que possuem uma medida física de Dirac com suporte em um ponto fixo do tipo sela é uma união enumerável de fechados de $\text{Diff}^1(M)$ com interior vazio.*

Também com o objetivo de responder a esta conjectura de forma parcial, Guarino, Guihéneuf e Santiago foram capazes de provar no teorema A em [GG20] que para variedades fechadas de dimensão $d \geq 2$, existe um conjunto residual (isto é, interseção enumerável de abertos densos) de difeomorfismos f de M que satisfazem a seguinte propriedade: se δ_p é uma medida física de f tal que a bacia estatística de atração de δ_p é densa em algum aberto então p é um ponto fixo atrator. Em particular, se p é um ponto fixo do tipo sela e δ_p também é uma medida física então a bacia estatística de atração de f é um conjunto denso em lugar nenhum (ou seja, é um conjunto cujo fecho tem interior vazio). Em outras palavras, a dinâmica de um difeomorfismo C^1 -genérico com uma medida física de Dirac cuja bacia estatística de atração é densa em algum aberto é trivial numa vizinhança do ponto fixo. É bom observar que é possível concluir, como consequência deste teorema, que o difeomorfismo quase-Anosov não é estável por perturbações C^1 .

¹Esta conjectura foi primeiramente enunciada em [Via98]. Uma referência interessante que oferece uma resposta parcial a esta conjectura para difeomorfismos $C^{1+\alpha}$ em superfícies se encontra em [CLP19]

De fato, caso ele fosse C^1 -genérico, como a bacia estatística de atração é um conjunto denso pois tem medida de Lebesgue total, então o ponto fixo do tipo sela do quase-Anosov seria um atrator, o que não ocorre.

Por mais que este teorema responda a conjectura parcialmente, as técnicas usadas para prová-lo se restringem ao caso em que a bacia estatística de atração é densa e até o momento, não são conhecidas técnicas mais gerais que permitem concluir a não-existência de medidas físicas de Dirac em pontos fixos do tipo sela. Além disso, os exemplos conhecidos e que foram estudados neste trabalho possuem bacias estatísticas de atração com medida de Lebesgue total (em particular, densas). Isto nos leva a seguinte pergunta motivada por este teorema: existe algum difeomorfismo f em uma superfície que possui uma medida física de Dirac um ponto fixo do tipo sela cuja bacia estatística de atração é um conjunto denso em lugar nenhum? A resposta é afirmativa e é respondida no seguinte teorema também provado no teorema B em [GGS20]:

Teorema 6.9.1 (Guarino, Guihéneuf, Santiago). *Seja S^2 uma superfície fechada. Existe um difeomorfismo $f \in \text{Diff}^1(S^2)$ que possui um ponto fixo do tipo sela $p \in M$ cuja bacia estatística de atração $\mathcal{B}_f(\delta_p)$ é um conjunto denso em lugar nenhum (em particular, tem interior vazio) com medida de Lebesgue positiva em S^2 . Mais ainda, sua entropia topológica é positiva e possui infinitos pontos periódicos.*

Ao leitor que estiver interessado em continuar seus estudos neste problema de pesquisa e gostaria de mais exemplos de sistemas dinâmicos caóticos admitindo medidas físicas de Dirac, além dos artigos já citados neste trabalho, gostaríamos de destacar que em [HK90] é provada a existência de um exemplo que admite uma medida física de Dirac com suporte em um ponto fixo hiperbólico repulsor. Sobre os difeomorfismos quase-Anosov, são provadas em [Hu00] sob quais condições é possível garantir a existência de medidas SBR para estes difeomorfismos.

Bibliografia

- [ABV00] J. F. Alves, C. Bonatti e M. Viana. “SRB measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding”. Em: *The Theory of Chaotic Attractors*. Springer, 2000, pp. 443–490.
- [Bal00] V. Baladi. *Positive transfer operators and decay of correlations*. Vol. 16. World scientific, 2000.
- [Bir40] G. Birkhoff. *Lattice theory*. Vol. 25. American Mathematical Soc., 1940.
- [Bow75] R. Bowen. “Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms”. Em: *Springer Lecture Notes in Math* 470 (1975), pp. 78–104.
- [Bro+18] A. W. Brown et al. “Entropy, Lyapunov exponents, and rigidity of group actions”. Em: *arXiv preprint arXiv:1809.09192* (2018).
- [BS02] M. Brin e G. Stuck. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.
- [Car92] M. P. d. Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [CI96] M. Campanino e S. Isola. “Infinite invariant measures for non-uniformly expanding transformations of $[0, 1]$: weak law of large numbers with anomalous scaling”. Em: *Forum Mathematicum*. Vol. 8. 1. Berlin; New York: De Gruyter, c1989-. 1996, pp. 71–92.
- [CLP19] V. Climenhaga, S. Luzzatto e Y. Pesin. “SRB measures and Young towers for surface diffeomorphisms”. Em: *arXiv preprint arXiv:1904.00034* (2019).
- [CN13] C. Camacho e A. L. Neto. *Geometric theory of foliations*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [DR07] L. J. Diaz e D. de Rezende Jorge. *Uma introdução aos sistemas dinâmicos via frações contínuas*. IMPA, 2007.
- [GGS20] P. Guarino, P.-A. Guihéneuf e B. Santiago. “Dirac physical measures on saddle-type fixed points”. Em: *Journal of Dynamics and Differential Equations* (2020), pp. 1–66.
- [Gro81] M. Gromov. “Groups of polynomial growth and expanding maps”. Em: *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques* 53.1 (1981), pp. 53–78.
- [Han89] M. Handel. “Periodic point free homeomorphism of T^2 ”. Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 107.2 (1989), pp. 511–515.

- [HK90] F. Hofbauer e G. Keller. “Quadratic maps without asymptotic measure”. Em: *Communications in mathematical physics* 127.2 (1990), pp. 319–337.
- [HP70] M. W. Hirsch e C. C. Pugh. “Stable manifolds and hyperbolic sets”. Em: *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*. 1970, pp. 133–163.
- [Hu00] H. Hu. “Conditions for the existence of SBR measures for “almost Anosov” diffeomorphisms”. Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 352.5 (2000), pp. 2331–2367.
- [HY95] H. Hu e L.-S. Young. “Nonexistence of SBR measures for some diffeomorphisms that are ‘Almost Anosov’”. Em: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 15.1 (1995), pp. 67–76.
- [KH97] A. Katok e B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. 54. Cambridge university press, 1997.
- [Kwa07] J. Kwapisz. “A toral flow with a pointwise rotation set that is not closed”. Em: *Nonlinearity* 20.9 (2007), pp. 2047–2060.
- [Lee13] J. M. Lee. “Smooth manifolds”. Em: *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2013, pp. 1–31.
- [Lew89] J. Lewowicz. “Expansive homeomorphisms of surfaces”. Em: *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society* 20.1 (1989), pp. 113–133.
- [LS+81] F. Ledrappier, J.-M. Strelcyn et al. *A proof of the estimation from below in Pesin entropy formula*. CSP, Dép. de mathématiques, 1981.
- [LY73] A. Lasota e J. A. Yorke. “On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations”. Em: *Transactions of the American Mathematical Society* (1973), pp. 481–488.
- [Ose68] V. Oseledec. “Multiplicative ergodic theorem”. Em: (1968).
- [OV10] K. Oliveira e M. Viana. “Teoria Ergódica: Um Curso Introdutório”. Em: *IMPA* 103 (2010), p. 104.
- [Pal00] J. Palis. “A global view of dynamics and a conjecture on the denseness of finitude of attractors”. Em: *Astérisque* 261.xiiiiv (2000), pp. 335–347.
- [Pes76] J. B. Pesin. “Families of invariant manifolds corresponding to nonzero characteristic exponents”. Em: *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 10.6 (1976), p. 1261.
- [PS82] Y. B. Pesin e Y. G. Sinai. “Gibbs measures for partially hyperbolic attractors”. Em: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 2.3-4 (1982), pp. 417–438.
- [RF88] H. L. Royden e P. Fitzpatrick. *Real analysis*. Vol. 32. Macmillan New York, 1988.
- [Ryc83] M. Rychlik. “Bounded variation and invariant measures”. Em: *Studia mathematica* 76.1 (1983), pp. 69–80.
- [San15] B. Santiago. “Commuting vector fields and generic dynamics”. Tese de dout. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.
- [Shu70] M. Shub. “Expanding maps”. Em: *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*. 1970, pp. 273–276.

- [Sin72] Y. G. Sinai. “Gibbs measures in ergodic theory”. Em: *Russian Mathematical Surveys* 27.4 (1972), p. 21.
- [SSV10] R. Saghin, W. Sun e E. Vargas. “On Dirac physical measures for transitive flows”. Em: *Communications in Mathematical Physics* 298.3 (2010), pp. 741–756.
- [Tak94] F. Takens. “Heteroclinic attractors: time averages and moduli of topological conjugacy”. Em: *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society* 25.1 (1994), pp. 107–120.
- [Via97] M. Viana. *Stochastic dynamics of deterministic systems*. Vol. 21. IMPA Rio de Janeiro, 1997.
- [Via98] M. Viana. “A probabilistic and geometric perspective”. Em: *The Work of the Fields Medalists and of the Rolf Nevanlinna Prize Winner* (1998), p. 557.
- [Via99] M. Viana. *Lecture notes on attractors and physical measures*. 1999.
- [You02] L.-S. Young. “What are SRB measures, and which dynamical systems have them?” Em: *Journal of statistical physics* 108.5 (2002), pp. 733–754.
- [You99] L.-S. Young. “Recurrence times and rates of mixing”. Em: *Israel Journal of Mathematics* 110.1 (1999), pp. 153–188.