UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISE

Disciplina: Complementos de Matemática Aplicada - Biomedicina e Ciências Ambientais

Segunda Avaliação

Professor: Bruno Santiago

Escreva suas respostas apontando claramente todos os raciocínios que conduziram a solução, bem como todos os resultados e referências utilizadas. Cada questão vale 3 pontos.

Questão 1. *A **equação logística** é uma equação diferencial que modela o crescimento de populações. Segundo esse modelo, o crescimento da população é inicialmente exponencial mas é amortecido a medida que o tamanho da população aumenta, convergindo a um tamanho limite, que deve representar a capacidade do ecossistema. Considere uma função $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo à equação*

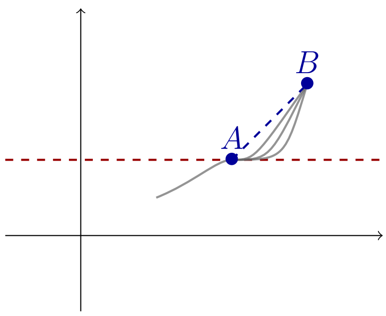
$$p'(t) = p(t)(1 - p(t)).$$

Suponha que $p(0) = 0.5$. Usando a equação diferencial, esboce qualitativamente o gráfico da função p, determinando os intervalos de crescimento/ decrescimento (se houverem), estude o sinal da derivada segunda e determine (caso haja) o ponto de inflexão.

Solução. O objetivo do problema, conforme colocado no enunciado, é deduzir, a partir da equação diferencial, o estudo do sinal das derivadas da função p e com isso esboçar o gráfico. De fato, como $p(0) = 0.5$, vemos pela equação que $p'(0) = 0.5 \times (1 - 0.5) = 0.25 > 0$. Portanto, a função é crescente perto de zero. No entanto, isso permite deduzir o comportamento da derivada em todo o intervalo $(0, +\infty)$: como a função é crescente, a medida que t se afasta de zero, $p(t)$ aumenta, e portanto continua positivo. Enquanto $p(t) < 1$, vamos ter então

$$p'(t) = p(t)(1 - p(t)) > 0.$$

Além disso, vemos que se $p(t) = 1$ então $p'(t) = 0$ e se $p(t) > 1$ então $p'(t) < 0$. Com isso, podemos deduzir que o gráfico da função p deve estar sempre abaixo da reta horizontal $y = 1$. Com efeito,



suponhamos por redução ao absurdo que a função p satisfaça à equação diferencial, com $p(0) = 0.5$, mas que exista algum valor $t > 0$ para o qual $p(t) > 1$. Seja então A o ponto no plano cartesiano no qual o gráfico de p cruza a reta horizontal $y = 1$. Veja a figura acima, na qual várias possibilidades para o gráfico de p estão representadas em cinza. Note que o gráfico de p sai do ponto A tangente à reta vermelha. Isso é porque $p'(t) = 0$ se $p(t) = 1$, como vimos acima. Seja B um ponto qualquer acima da reta vermelha pelo qual o gráfico de p passe. Pelo teorema do valor médio, deve haver algum $t^\star > t$ tal que $p'(t^\star)$ é igual a inclinação do segmento AB, que é positiva. Mas, se $p(t^\star) > 1$ então $p'(t^\star) < 0$, absurdo. Com esse mesmo argumento, conseguimos demonstrar que na verdade $p(t) < 1$ sempre. Vemos assim que a função p é crescente e limitada superiormente por 1.

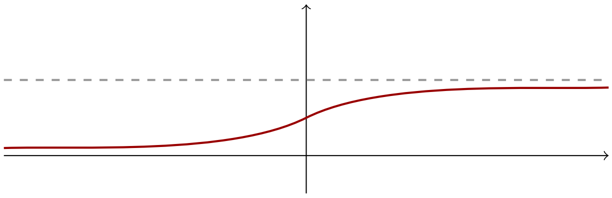
Analogamente, vemos também que a função p é limitada inferiormente por 0, e portanto p é crescente em toda a reta. Vamos analisar a derivada segunda. Como $p'(t) = p(t) - p(t)^2$, aplicando a regra da cadeia, vemos que

$$p''(t) = p'(t) - 2p(t)p'(t) = p'(t)(1 - 2p(t)).$$

Como já sabemos que $p'(t) > 0$ para todo t, vemos que o sinal de $p''(t)$ é governado pelo sinal de $1 - 2p(t)$. Portanto o ponto de inflexão ocorre quando

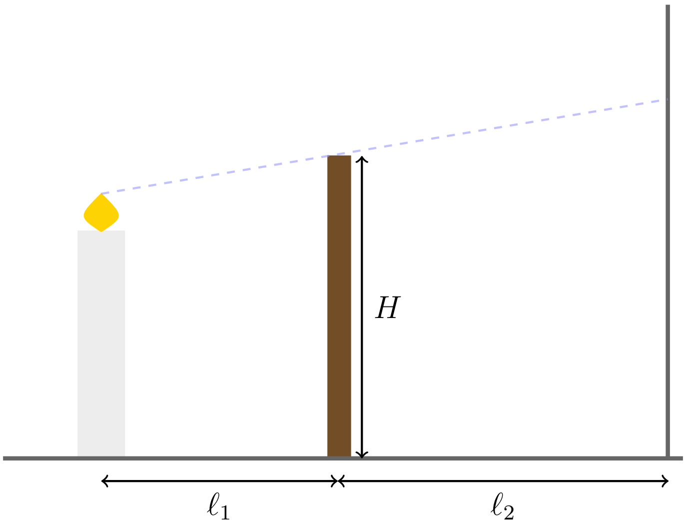
$$p(t) = 0.5 \quad \Longrightarrow \quad t = 0.$$

E vemos que a derivada segunda é positiva em $(-\infty, 0)$ e negativa em $0, +\infty)$. Na figura a seguir



esboçamos o gráfico de p: note que a media que o gráfico desce, a derivada se aproxima de 0, enquanto a medida que o gráfico sobe se aproximando tangencialmente à reta horizontal $y = 1$ a derivada também se aproxima de 0. Vemos também que a derivada deixa de ser crescente exatamente em $t = 0$, que é o ponto de inflexão. □

Questão 2. *Uma vela está localizada a uma distância ℓ_1 de um bloco de madeira muito fino de altura H. O bloco está a uma distância ℓ_2 da parede. A vela queima de forma que a sua altura decresce a uma velocidade constante de* $3\,\mathrm{cm/h}$. *Calcule a velocidade com a qual a sombra do bloco na parede*



aumenta, e verifique que essa velocidade não muda se mudarmos a altura do bloco.

Solução. Começamos estabelecendo as variáveis do problema. A altura da vela ao longo do tempo será denotada por $a(t)$ e a altura da sombra da vela será denotada por $y(t)$. A hipótese de que a

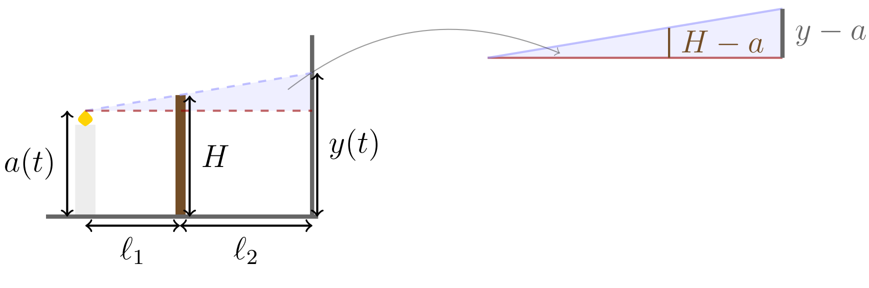


Figura 1. O triângulo azul permite relacionar as funções $a(t)$ e $y(t)$.

altura da vela decai a uma velocidade constante de $3\,\mathrm{cm/h}$ se traduz matematicamente na afirmação

$a'(t) = 3$: a derivada da função a é constante igual a 3. A velocidade de crescimento da sombra, que é o objeto de estudo do problema, é a derivada da função $y(t)$. Olhando a Figura 1 podemos intuir que as quantidades $a(t)$ e $y(t)$ podem ser relacionadas: o triângulo azul contém um sub triângulo menor, semelhante. Com isso, deduzimos que

$$\frac{y(t) - a(t)}{H - a(t)} = \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1}.$$

Por simplicidade, vamos denotar $\lambda = \frac{\ell_1+\ell_2}{\ell_1}$. Da igualdade acima obtemos

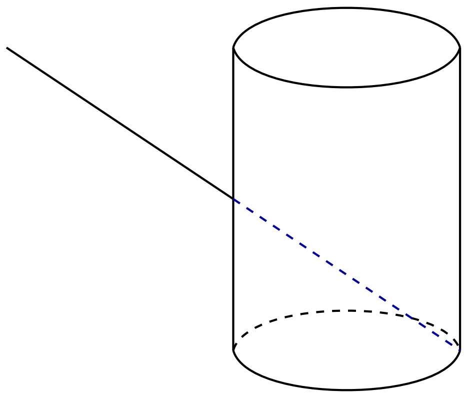
$$y(t) - a(t) = \lambda H - \lambda a(t) \implies y(t) = \lambda H + a(t)(1 - \lambda).$$

Isso expressa y em função de a e nos permite calcular sua derivada:

$$y'(t) = a'(t)(1 - \lambda) = 3(1 - \lambda).$$

Como $\lambda = \frac{\ell_1+\ell_2}{\ell_1} = 1 + \frac{\ell_2}{\ell_1}$, vemos que $1 - \lambda = -\frac{\ell_2}{\ell_1}$. Assim, $y'(t) = \frac{-3\ell_2}{\ell_1}$. $\square$

Questão 3. *O matemático Abel vai casar e está planejando uma festa inesquecível. Como o orçamento está baixo, Abel procurou (e encontrou!) um fornecedor de barris de chopp artesanal que cobra um preço que cabe no bolso. No entanto, o processo de produção é* realmente *artesanal: os barris tem formato cilíndrico de proporção (altura/raio) variada. O preço do barril é dado de uma forma engraçada: introduz-se uma vareta de metal pelo meio do barril até o fundo, como ilustrado na figura abaixo, e o preço é proporcional ao comprimento da parte molhada da vareta (como ilustrado em*



azul na figura). Abel ficou positivamente desconfiado de que dessa forma, para um mesmo preço, haveriam formatos de maior e de menor volume, de forma que para um determinado preço haveria um formato com o maior volume dentre todos os formatos possíveis com aquele preço. Faça como Abel, e calcule a proporção altura/raio do barril que trará mais alegria na festa de casamento pelo mesmo preço.

Solução. Como em outros problemas que vimos no curso, temos aqui um enunciado de otimização geométrica: encontrar, dentre todos os cilindros com a meia diagonal fixada, aquele que tem o maior volume. A estratégia é baseada na intuição de que, fixando-se o comprimento da meia diagonal, a altura e o raio do cilindro ficam "linkados": ao mudar-se o comprimento de muda-se automaticamente o comprimento do outro. Assim, o volume do cilindro é função de uma única variável. Além disso, dá para imaginar que se o raio for muito absurdamente pequeno ou muito absurdamente grande então o volume vai ser pouco. Isso deixa entrever que deve mesmo haver um raio para o qual o volume seja máximo.

A modelagem do problema começa então por declarar as variáveis: r é o raio da base e h a altura. Veja a Figura 2. O triângulo azul permite relacionar essas duas variáveis, por meio do teorema de Pitágoras:

$$4r^2 + \frac{h^2}{4} = L^2 \implies r^2 = \frac{L^2}{4} - \frac{h^2}{16} \qquad (1)$$

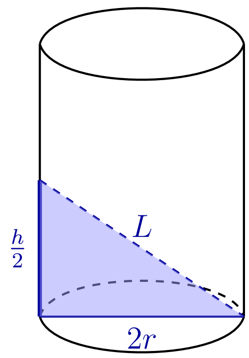


Figura 2. O triângulo azul permite relacionar o raio e a altura.

Como o volume do cilindro é $\pi r^2 h$, podemos expressá-lo apenas como função de h:

$$v(h) = \pi \left(\frac{L^2}{4} - \frac{h^2}{16} \right) h = \frac{\pi h L^2}{4} - \frac{\pi h^3}{16}.$$

O domínio dessa função é o intervalo $(0, 2L)$: observe que se $h = 2L$ temos $\frac{h^2}{16} = \frac{L^2}{4}$ e portanto teríamos $r^2 = 0$, o que não tem interesse na modelagem que estamos fazendo. Assim, para otimizar a função v devemos analisar seu comportamento nos pontos críticos: os extremos do intervalo de definição correspondem a casos degenerados que não fazem parte da modelagem.

Para tanto, calculamos a derivada.

$$v'(h) = \frac{\pi L^2}{4} - \frac{3\pi h^2}{16}.$$

Temos um ponto crítico se, e só se:

$$\frac{3\pi h^2}{16} = \frac{\pi L^2}{4} \iff h^2 = \frac{4L^2}{3} \iff h = \frac{2L}{\sqrt{3}}.$$

Para certificar que esse ponto crítico é de fato um ponto de máximo, calculamos a derivada segunda:

$$v''(h) = -\frac{3\pi h}{8} < 0, \ \forall\, h > 0.$$

Isso garante que o ponto crítico é mesmo um ponto de máximo. Pela igualdade (1) vemos que o raio que maximiza o volume será

$$r = \sqrt{\frac{L^2}{4} - \frac{L^2}{12}} = \sqrt{\frac{L^2}{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{h}{2}.$$

Portanto, $\frac{h}{r} = 2\sqrt{2}$. □

Questão 4. *Mais uma vez Wesley não resistiu à tentação da super promoção que oferecia o novo iPhone 20 por apenas 3500 reais, os quais deveriam ser pagos de uma única vez no mês seguinte. Wesley, agora casado, estava num bom emprego, com salário de 10000 reais. No entanto, surgiu uma emergência e ele ficou com o orçamento muito apertado. Agora só pode comprometer, no máximo, 600 reais a cada mês para pagar essa dívida. Mas dessa vez ele não vai pagar a fatura mínima do cartão de crédito, ele vai se organizar financeiramente para quitar, a cada mês, 600 reais da dívida. Ainda assim o banco vai lhe cobrar juros de 14% ao mês. Determine em quantos meses a dívida será quitada e quanto terá custado o celular.*

Demonstração. Seja $M_0 = 3500$ o montante inicial da dívida. Seja $A = 600$ o valor do aporte mensal. Seja $t = 1.14$ o fator multiplicativo mensal, que considera a taxa de juros de 14% ao mês. Ao fim do primeiro mês a dívida será igual a $M_0 - A$, pois Wesley terá pago a primeira parcela, acrescido dos juros:

$$(M_0 - A) \times t.$$

No final do segundo mês, deve-se subtrair o aporte A desse valor e acrescentar os juros:

$$[(M_0 - A) \times t - A] \times t = M_0 t^2 - At^2 - At = M_0 t^2 - A(t^2 + t).$$

Prosseguindo por indução, vemos que passados n meses a dívida será igual a

$$M_0 t^n - A(t^n + t^{n-1} + ... + t^2 + t).$$

Assim, a dívida fica zerada quando

$$\frac{M_0}{A} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + ... + \frac{1}{t^{n-1}}.$$

Seja $\mu = \frac{1}{t}$. Observe que $\mu \simeq 0.877$ e que o lado direito acima é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão μ. Aplicando a fórmula da soma dos termos da PG vemos que devemos encontrar n tal que

$$\frac{M_0}{A} = \frac{1 - \mu^n}{1 - \mu}.$$

Agora, usamos o computador para fazer os cálculos. Primeiro, $\frac{M_0}{A} \simeq 5.83$. O código abaixo, imple-

```
Entrée [21]: g(n)=(1-(1/1.14)^n)/(1-(1/1.14))
   Out[21]: g (generic function with 1 method)

Entrée [23]: for n=1:15
                 println(g(n))
             end

             1.0
             1.8771929824561406
             2.6466605109264387
             3.3216320271284556
             3.913712304498645
             4.4330809688584605
             4.88866751654251
             5.288304839072377
             5.638863893923138
             5.946371836774683
             6.2161156462935825
             6.452733023064546
             6.660292125495216
             6.842361513592295
             7.002071503151138
```

mentado em Julia, calcula os 15 primeiros valores da soma da PG. Vemos que na décima linha a soma da PG ultrapassa 5.83. Portanto a dívida será quitada na 10ª parcela. Para calcular quanto o celular terá custado, devemos calcular o saldo da dívida após o 9º mês. Isso equivale a calcular

$$M_0 t^9 - A(t^9 + t^8 + ... + t^2 + t).$$

Em Julia esse cálculo se faz com o código abaixo. Observe na entrada [31] que aproveito para

```
Entrée [32]: 3500*(1.14)^(9)-600*(sum((1.14)^i for i in 1:9))
   Out[32]: 379.44276354008434

Entrée [31]: for n=1:9
             println(3500*(1.14)^(n)-600*(sum((1.14)^i for i in 1:n)))
             end

             3305.9999999999995
             3084.8399999999997
             2832.7176
             2545.298064
             2217.639792959998
             1844.1093639743976
             1418.2846749308128
             932.8445294211269
             379.44276354008434
```

calcular os saldos devedores, desde o mês 1 até o mês 9, que é a primeira vez que o saldo fica menor do que o aporte mensal de 600 reais do Wesley. Por isso a dívida fica quitada no mês seguinte.

Bem, depois de 10 meses o Wesley terá pago 9 parcelas de 600 e o restante da dívida:

$$9 \times 600 + 379.44 = 5779.44,$$

que será o custo final do telefone. $\square$