Mesures physiques de Dirac portées par des point selle

Séminaire Dynamique et Probabilités
Université de Picardie Jules Verne

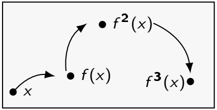
Bruno Santiago
Universidade Federal Fluminense - UFF

13 octobre 2020

Avec le soutien du Conseil National de Développement Scientifique et Technologique

Le scénario

- Soit M^d une variété lisse et compacte de dimension d
- Le but: étant donné $f : M \to M$, décrire le comportement asymptotique des orbites $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, pour x et f "typiques".



- Soit $\mathcal{P}(M)$ le espace des mesures de probabilités boréliennes sur M muni de ça topologie faible*.
- Pour $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$, on note $\mathcal{P}_f(M) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\mu \in \mathcal{P}(M); f_\star\mu = \mu\}$, où $f_\star\mu(B) \stackrel{\text{def.}}{=} \mu(f^{-1}(B))$.

Les mesures asymptotiques d'un point $x \in M$

Mesure empirique

Pour $x \in M$, $n \in \mathbb{N}$, la **mesure empirique a temps** n est $\mu_x^n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \delta_{f^\ell(x)}$.

Mesure asymptotique de $x \in M$

$\mathcal{M}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\mu \in \mathcal{P}(M); \exists\, n_k \to \infty,\ \lim_{k\to\infty} \mu_x^{n_k} = \mu.\}$

Remarque

$\mathcal{M}(x) \subset \mathcal{P}_f(M)$, pour tout $x \in M$;

Les mesures asymptotiques d'un point $x \in M$

Mesure empirique

Pour $x \in M$, $n \in \mathbb{N}$, la **mesure empirique a temps** n est
$\mu_x^n \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} \delta_{f^\ell(x)}$.

Mesure asymptotique de $x \in M$

$\mathcal{M}(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \{\mu \in \mathcal{P}(M); \exists\, n_k \to \infty,\ \lim_{k\to\infty} \mu_x^{n_k} = \mu.\}$

Remarque

$\mathcal{M}(x) \subset \mathcal{P}_f(M)$, pour tout $x \in M$;

Exemple (Sigmund, 1974)

Soit $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, l'Anosov linéaire engendre par $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Alors, les ensembles $\{x; \#\mathcal{M}(x) = 1\}$ et $\{x; \mathcal{M}(x) = \mathcal{P}_f(M)\}$ sont tous les deux dense dans $\mathbb{T}^2$.

Mesures physiques

Définition

Étant donné $\mu \in \mathcal{P}_f(M)$, le **bassin statistique de** μ est

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_f(\mu) &\stackrel{\text{def.}}{=} \{x \in M; \mathcal{M}(x) = \{\mu\}\} \\ &= \left\{ x \in M; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \varphi(f^\ell(x)) = \int \varphi d\mu, \ \forall\, \varphi \in C^0(M) \right\}. \end{aligned}$$

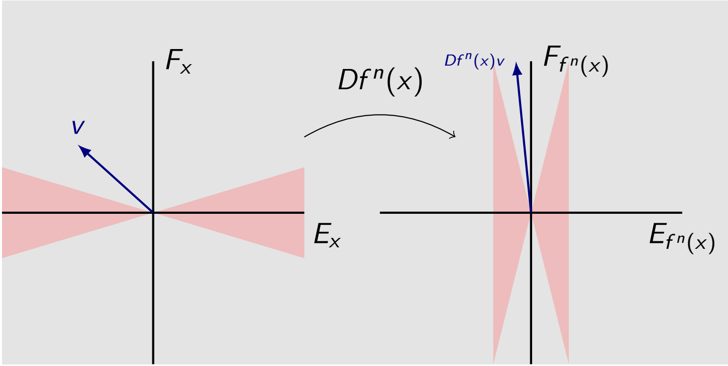
Définition

On dit que $\mu \in \mathcal{P}_f(M)$ est **une mesure physique** si $\mathrm{Leb}\left(\mathcal{B}_f(\mu)\right) > 0$.

Jolie description des mesures physiques: le cas hyperbolique

Définition

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ et soit $\Lambda \subset M$ un compact f-invariant ($f(\Lambda) = \Lambda$). On dit qu'une décomposition Df-invariante $T_\Lambda M = E \oplus F$ est une **décomposition dominé** si il existe $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telle que $\|Df^n(x)|_E\| \|Df^{-n}(f^n(x))|_F\| \leq C\lambda^n$.



Jolie description des mesures physiques: le cas hyperbolique

Définition: ensemble hyperbolique

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ et soit $\Lambda \subset M$ un compact f-invariant avec une décomposition dominé $T_\Lambda M = E \oplus F$. Si $\max_{x\in\Lambda} \|Df(x)|_E\| < 1$ et $\max_{x\in\Lambda} m(Df(x)|_F) > 1$ on appelle $E \oplus F$ une décomposition hyperbolique, et on dit que Λ est une **ensemble hyperbolique**.

Définition: hyperbolicité uniforme globale

On dit que $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ vérifie l'**Axiome A de Smale** si l'ensemble non-errant de la dynamique $\Omega(f) = \{x; \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists n; f^n(B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset\}$ est une ensemble hyperbolique et $\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}}(f)$.

Jolie description des mesures physiques: le cas hyperbolique

Théorème

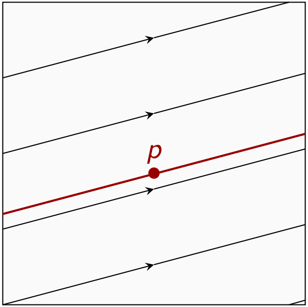
Soit $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ qui vérifie l'Axiome A de Smale, avec une décomposition hyperbolique $E^s \oplus E^u$. Alors, il existe un nombre finie de mesures physiques telles que $\mathrm{Leb}\left(\mathcal{B}_f(\mu_1) \cup ... \cup \mathcal{B}_f(\mu_n)\right) = 1$. En plus, chaque μ_ℓ est aussi une mesure de Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) i.e.

$$h_\mu(f) = \int \log|\det Df|_{E^u}| d\mu.$$

Exemples avec une mesure physique pathologique

Le flot irrationnel arrêté en un point (Saghin-Sun-Vargas 2010)

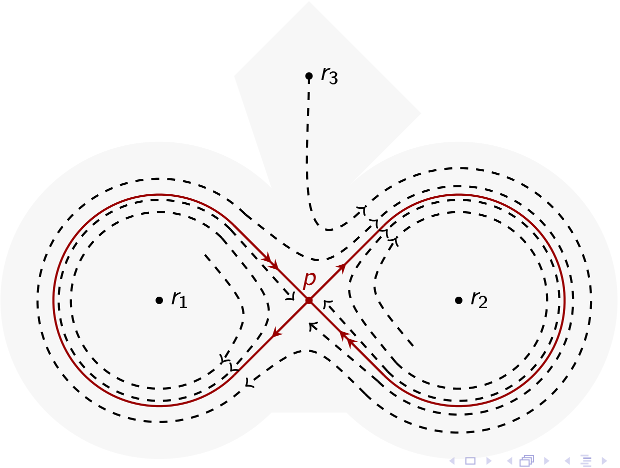
Soit $X \in \mathfrak{X}^\infty(\mathbb{T}^2)$ engendrent un flot irrationnel. Alors, il existe $\psi : \mathbb{T}^2 \to [0,1]$ telle que $\psi^{-1}(0) = \{p\}$ et δ_p est une mesure physique pour le flot du champ $Y = \psi X$ avec $\mathcal{B}(\delta_p) = \mathbb{T}^2$.



Exemples avec une mesure physique pathologique

L'attracteur figure 8

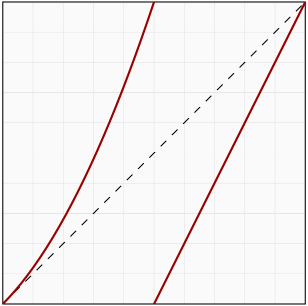
Prenons un flot dans la sphère $\mathbb{S}^2$ avec trois points répulsifs et une selle, comme celui-ci. Si f est le temps 1 de ce flot, alors $\mathcal{B}_f(\delta_p) = \mathbb{S}^2 \setminus \{s_1, s_2, s_3\}$.



Exemples avec une mesure physique pathologique

Applications de l'intervalle avec un point fixe faiblement instable (Lai-Sang Young, 1999)

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application C^2 par morceau avec $Df(x) \geq 1$ et $Df(x) = 1 \iff x = 0$. Si $f(x) = x + x^\alpha$ avec $\alpha \geq 2$, pour tout x proche de 0, alors Leb $\left(\mathcal{B}_f(\delta_0)\right) = 1$.



Exemples avec une mesure physique pathologique

Difféomorphismes presque Anosov (Hu-Young, 1995)

Soit $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$, où M est une surface compacte et sans bord, telle que

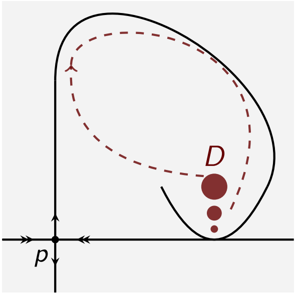
1. Il existe $p \in \mathrm{Fix}(f)$;
2. Il existe $\lambda_s \in (0,1)$, une fonction continue $\lambda_u : M \to [1,+\infty)$ et une décomposition $TM = E^s \oplus F$ telle que
   - $\|Df(x)v\| \leq \lambda_s \|v\|$, pour tout $x \in M$ et tout $v \in E^s$;
   - $\|Df(x)u\| \geq \lambda_u(x)\|v\|$, pour tout $x \in M$ et tout $u \in F$;
3. $\lambda_u^{-1}(1) = \{p\}$.
4. f est topologiquement transitif.

Alors, $Leb\big(\mathcal{B}_f(\delta_p)\big) = 1$.

Exemples avec une mesure physique pathologique

Domaines errants dans une fer a cheval avec tangences (Colli-Vargas 2001)

Il existe $f \in \mathrm{Diff}^2(M)$ où M est une surface compact et sans bord, telle que (a) f possède une fer a cheval avec tangences; (b) Il existe une domaine D (ouverte et connexe) errant pour la dynamique, telle que $\mathrm{diam}(f^n(D)) \to 0$; (c) $\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D) \subset \mathcal{B}(\delta_p)$, où $p \in \mathrm{Fix}_h(f)$.



Question

Quelles sont les mécanismes/configurations dynamiques que donne l'existence d'un point $p \in \mathrm{Fix}(f)$ telle que $\mu = \delta_p$ soit une mesure physique?

Question

Quelles sont les mécanismes/configurations dynamiques que donne l'existence d'un point $p \in \mathrm{Fix}(f)$ telle que $\mu = \delta_p$ soit une mesure physique?

- Est-ce que "typiquement" le seule mécanisme possible c'est l'existence d'un point fixe p topologiquement attractif?

Question

Quelles sont les mécanismes/configurations dynamiques que donne l'existence d'un point $p \in \mathrm{Fix}(f)$ telle que $\mu = \delta_p$ soit une mesure physique?

- Est-ce que "typiquement" le seule mécanisme possible c'est l'existence d'un point fixe p topologiquement attractif? On pourrais donc poser:

Conjecture

Il existe un ensemble G_δ-dense $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ telle que si $f \in \mathcal{R}$ et si $\mu = \delta_p$, avec $p \in \mathrm{Fix}(f)$, est une mesure physique, alors p est un point attractif.

Énoncés des résultats

Travail en collaboration avec Pierre-Antoine Guihéneuf (IMJ-Paris) et Pablo Guarino (UFF)

Théorème A

Il existe un ensemble G_δ-dense $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ telle que si $f \in \mathcal{R}$ et si $\mu = \delta_p$, avec $p \in \mathrm{Fix}(f)$, est une mesure physique **telle que** $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) \neq \emptyset$ alors p est un point fixe attractif. En particulier, pour f "générique", si δ_p, avec $p \in \mathrm{Fix}(f)$ hyperbolique de type selle, est une mesure physique alors $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) = \emptyset$

Énoncés des résultats

Travail en collaboration avec Pierre-Antoine Guihéneuf (IMJ-Paris) et Pablo Guarino (UFF)

Théorème A

Il existe un ensemble G_δ-dense $\mathcal{R} \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ telle que si $f \in \mathcal{R}$ et si $\mu = \delta_p$, avec $p \in \mathrm{Fix}(f)$, est une mesure physique **telle que** $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) \neq \emptyset$ alors p est un point fixe attractif. En particulier, pour f "générique", si δ_p, avec $p \in \mathrm{Fix}(f)$ hyperbolique de type selle, est une mesure physique alors $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) = \emptyset$

Théorème B

Soit M une surface. Alors, il existe $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ possédant $p \in \mathrm{Fix}(f)$ hyperbolique de type selle telle que δ_p est une mesure physique avec $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) = \emptyset$. En plus, $h(f) > 0$ et $\# \mathrm{Per}(f) = \infty$.

Quelques mots sur la preuve du Théorème A

La question de base

Quelle propriété empêche l'existence d'une mesure physique portée par un point de type selle?

Quelques mots sur la preuve du Théorème A

La question de base

Quelle propriété empêche l'existence d'une mesure physique portée par un point de type selle?

- Une réponse a cette question est donné par l'estimation de l'entropie de mesures physiques (Catsigueras-Cerminara-Enrich 2015 et Crovisier-Yang-Zhang 2020);

Théorème (Catsigueras-Cerminara-Enrich 2015 et Crovisier-Yang-Zhang 2020)

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ et $\Lambda \subset M$ un compact f-invariant, **Lyapunov stable** avec une décomposition dominé $T_\Lambda M = E \oplus F$. Soit $\mu \in \mathcal{P}_f(M)$ une mesure physique. Alors, $h_\mu(f) \geq \int \log|\det(Df|_F)|d\mu$.

Quelques mots sur la preuve du Théorème A

Définition

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$. Un compact f-invariant $\Lambda \subset M$ est dit Lyapunov stable si pour chaque U voisinage de Λ il existe une voisinage plus petite $V \subset U$ (avec $\Lambda \subset V$) telle que $x \in V \implies f^n(x) \in U, \forall n > 0$.

Quelques mots sur la preuve du Théorème A

Définition

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$. Un compact f-invariant $\Lambda \subset M$ est dit Lyapunov stable si pour chaque U voisinage de Λ il existe une voisinage plus petite $V \subset U$ (avec $\Lambda \subset V$) telle que $x \in V \implies f^n(x) \in U, \forall n > 0$.

Esquisse de la preuve du Théorème A

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ "générique". On suppose par contradiction qu'il existe $p \in \mathrm{Fix}(f)$, hyperbolique de type selle telle que $\mathrm{Leb}\left(\mathcal{B}_f(\delta_p)\right) > 0$ et $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) \neq \emptyset$.

Quelques mots sur la preuve du Théorème A

Définition

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$. Un compact f-invariant $\Lambda \subset M$ est dit Lyapunov stable si pour chaque U voisinage de Λ il existe une voisinage plus petite $V \subset U$ (avec $\Lambda \subset V$) telle que $x \in V \implies f^n(x) \in U, \forall n > 0.$

Esquisse de la preuve du Théorème A

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ "générique". On suppose par contradiction qu'il existe $p \in \mathrm{Fix}(f)$, hyperbolique de type selle telle que $\mathrm{Leb}\left(\mathcal{B}_f(\delta_p)\right) > 0$ et $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) \neq \emptyset$.On utilisant quelques techniques de dynamique C^1, on démontre:

1. $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) \neq \emptyset \implies$ il existe un compacte invariante, Lyapunov stable Λ avec $p \in \Lambda$

Quelques mots sur la preuve du Théorème A

Définition

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$. Un compact f-invariant $\Lambda \subset M$ est dit Lyapunov stable si pour chaque U voisinage de Λ il existe une voisinage plus petite $V \subset U$ (avec $\Lambda \subset V$) telle que $x \in V \implies f^n(x) \in U, \forall n > 0$.

Esquisse de la preuve du Théorème A

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ "générique". On suppose par contradiction qu'il existe $p \in \mathrm{Fix}(f)$, hyperbolique de type selle telle que $\mathrm{Leb}\left(\mathcal{B}_f(\delta_p)\right) > 0$ et $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) \neq \emptyset$.On utilisant quelques techniques de dynamique C^1, on démontre:

1. $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) \neq \emptyset \implies$ il existe un compacte invariante, Lyapunov stable Λ avec $p \in \Lambda$
2. $\mathrm{Leb}\left(\mathcal{B}_f(\delta_p)\right) > 0 \implies \Lambda$ admet une décomposition dominé

Quelques mots sur la preuve du Théorème A

Définition

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$. Un compact f-invariant $\Lambda \subset M$ est dit Lyapunov stable si pour chaque U voisinage de Λ il existe une voisinage plus petite $V \subset U$ (avec $\Lambda \subset V$) telle que $x \in V \implies f^n(x) \in U, \forall n > 0$.

Esquisse de la preuve du Théorème A

Soit $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ "générique". On suppose par contradiction qu'il existe $p \in \mathrm{Fix}(f)$, hyperbolique de type selle telle que $\mathrm{Leb}\left(\mathcal{B}_f(\delta_p)\right) > 0$ et $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) \neq \emptyset$.On utilisant quelques techniques de dynamique C^1, on démontre:

1. $\mathrm{int}\left(\overline{\mathcal{B}}_f(\delta_p)\right) \neq \emptyset \implies$ il existe un compacte invariante, Lyapunov stable Λ avec $p \in \Lambda$
2. $\mathrm{Leb}\left(\mathcal{B}_f(\delta_p)\right) > 0 \implies \Lambda$ admet une décomposition dominé
3. Avec tout ça, on démontre que $|\det(Df(p)|_F)| > 1$, et alors $h_{\delta_p}(f) \geq \log|\det(Df(p)|_F)| > 0$, contradiction. $\square$

Esquisse de la preuve du Théorème B

Structure de la preuve:

- Il suffit de construire $f \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^2)$ a support compacte avec les propriétés annoncés;

Esquisse de la preuve du Théorème B

Structure de la preuve:

- Il suffit de construire $f \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^2)$ a support compacte avec les propriétés annoncés;
- D'abord on construit an attracteur figure 8 dans le plan, avec une propriété technique spéciale;

Esquisse de la preuve du Théorème B

Structure de la preuve:

- Il suffit de construire $f \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^2)$ a support compacte avec les propriétés annoncés;
- D'abord on construit an attracteur figure 8 dans le plan, avec une propriété technique spéciale;
- On compose cette difféomorphisme avec une contraction locale pour produire une région attractif, ce que fait une "exclusion d'orbites" du bassin;

Esquisse de la preuve du Théorème B

Structure de la preuve:

- Il suffit de construire $f \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{R}^2)$ a support compacte avec les propriétés annoncés;
- D'abord on construit an attracteur figure 8 dans le plan, avec une propriété technique spéciale;
- On compose cette difféomorphisme avec une contraction locale pour produire une région attractif, ce que fait une "exclusion d'orbites" du bassin;
- On complète ce processus d'exclusion d'orbites avec une perturbation qu'agit en dehors d'un ensemble de Cantor d'aire positif.

Esquisse de la preuve du Théorème B

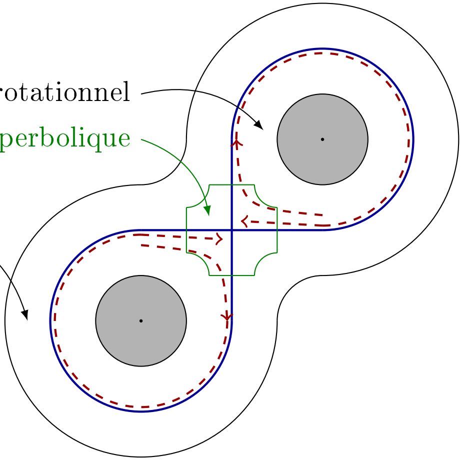
L'attracteur figure 8

Il existe $f_0 \in \mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{R}^2)$, possédant an attracteur figure 8, a support compact et avec les propriétés suivants:

région rotationnel

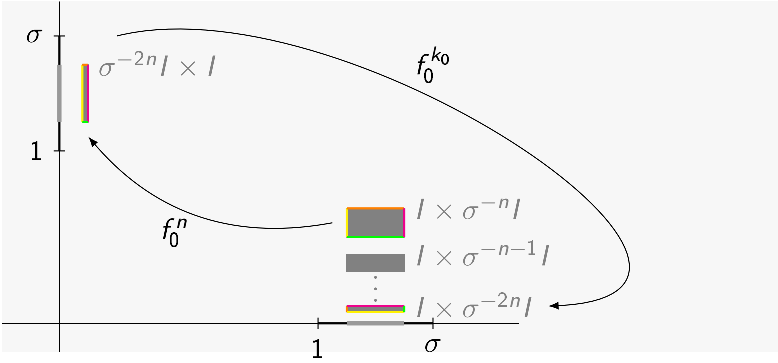
$$f_0 = \begin{bmatrix} \sigma^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \to \text{région hyperbolique}$$

support



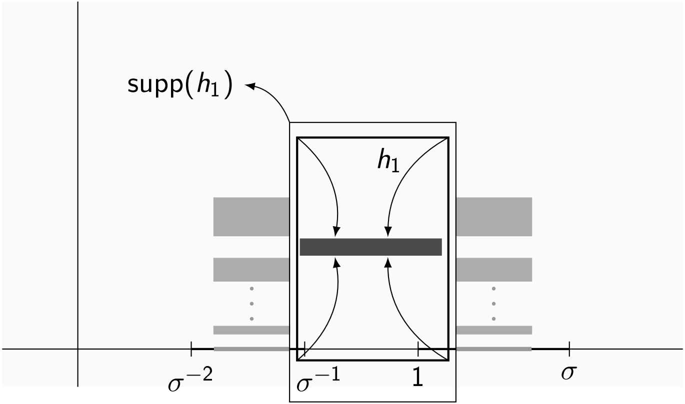
Application de premier retour

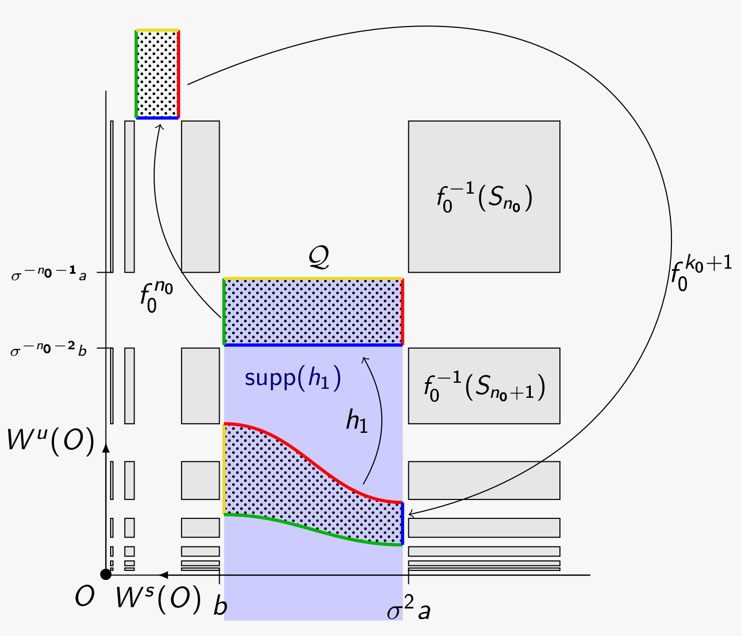
Il existe un entier positif k_0, et n_0 asses grand telle que l'application $g_0 : \cup_{n \geq n_0} I \times \sigma^{-n} I \to \cup_{n \geq n_0} I \times \sigma^{-n} I$, donné par $g_0|_{I \times \sigma^{-n} I} = f_0^{n+k_0}$ est (a une changement de échelé vertical prés) une rotation par 90°.



Étape 1 du processus d'exclusion d'orbites

On définisse $f_1 = h_1 \circ f_0$ où $h_1 \in \mathrm{Diff}^{\infty}_{+}(\mathbb{R}^2)$ est un difféomorphisme a support compacte et avec une région attractif.

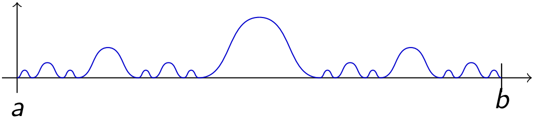




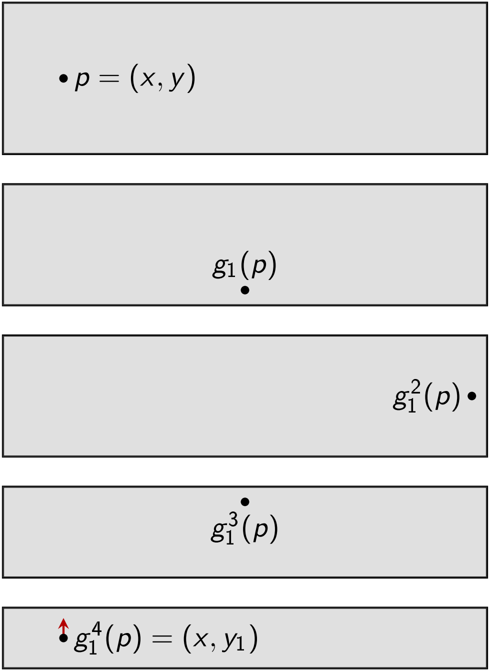
$f_0^{-1}(S_{n_0})$
$\mathcal{Q}$
$f_0^{k_0+1}$
$\sigma^{-n_0-1}a$
$f_0^{n_0}$
$\sigma^{-n_0-2}b$
supp(h_1)
$f_0^{-1}(S_{n_0+1})$
h_1
$W^u(O)$
O
$W^s(O)$
b
$\sigma^2 a$

La dernier exclusion d'orbites

- Soit $K \subset I$ un ensemble de Cantor avec $\mathrm{Leb}(K) > 0$; Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse telle que $\varphi^{-1}(0) = K$.



- Soit $g_1 : \cup_{n \geq n_0} I \times \sigma^{-n} I \to \cup_{n \geq n_0} I \times \sigma^{-n} I$ l'application de premier retour de f_1, donné par $g_1|_{I \times \sigma^{-n} I} = f_1^{n+k_0}$.
- Soit m telle que $\left(I \times \sigma^{-m} I\right) \cap \mathrm{Im}(g_1) = \emptyset$.
- Comme g_1 est affine (une rotation par 90º module une changement d'échelle), on peut écrire $g_1^{4d}(x, y) = (x, y_d)$
- Alors, soit $f_2 = h_2 \circ f_1$, où $h_2(x, y_d) = (x, y_d + \frac{\sigma^{(-16^d m)} \ell(I) \varphi(x)}{\log(16^d m)})$.


$p = (x, y)$
$g_1(p)$
$g_1^2(p)$
$g_1^3(p)$
$g_1^4(p) = (x, y_1)$

Merci beaucoup!