FLUXOS ESPECIAIS SOBRE ROTAÇÕES NÃO SÃO TOPOLOGICAMENTE MISTURADORES, SEGUINDO A.KOCHERGIN

BRUNO SANTIAGO

RESUMO. O objetivo dessas notas é apresentar uma demonstração auto-contida de que que não existe fluxo suspensão em cima de uma rotação irracional no círculo, com função teto de variação limitada que seja topologicamente misturadora.

1. INTRODUÇÃO

Seja $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ uma rotação de ângulo $\alpha \in (0, 1)$ irracional. Seja $\tau : \mathbb{S}^1 \to (0, +\infty)$ uma função contínua, interpretada aqui como uma *função teto*. Considere o conjunto o conjunto dos pontos do cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ que ficam abaixo do gráfico da função teto:

$$Y = \{(\theta, t) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R};\ \ 0 \leq t \leq \tau(\theta)\}$$

Topologicamente esse conjunto é um cilindro com duas componentes de bordo. Vamos introduzir nele uma relação de equivalência declarando

$$(\theta, \tau(\theta)) \sim (a, 0) \iff a = f(\theta).$$

Dado $p \in Y$ denotamos por $[p]$ o conjunto dos pontos $q \in Y$ tais que $q \sim p$. Em $X = Y/\sim$ introduzimos a métrica quociente: dados $x = [p], y = [q] \in X$

$$d(x, y) = \min\{d(\tilde{p}, \tilde{q}), \tilde{p} \in [p], \tilde{q} \in [q]\}.$$

Lemma 1.1. *(X, d) é um espaço métrico compacto.*

Demonstração. **Exercício** $\square$

No espaço X definimos um sistema dinâmico em tempo contínuo $\phi : \mathbb{R} \times X \to X$ pondo $\phi_t([p]) = [p + t]$.

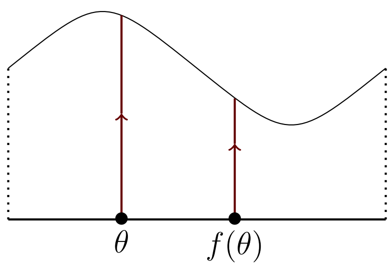

FIGURA 1. Fluxo suspensão modelado no plano cartesiano.

O objetivo dessas notas é demonstrar o seguinte teorema.

Theorem 1.2 (Kochergin [1])**.** *Se a função teto τ for de variação limitada então o fluxo ϕ não é topologicamente misturador.*

Observe que o resultado independe do tipo aritmético do número de rotação, mas demanda uma regularidade mínima para a função teto.

2. Funções BV

Dada uma partição finita $\mathcal{P} = \{\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < ... < \theta_k < \theta_{k+1} = \theta_1\}$ de $\mathbb{S}^1$, denotamos por I_ℓ o intervalo $I_\ell = [x_\ell, x_{\ell+1})$.

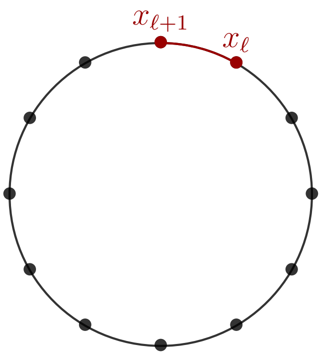

Figura 2. Uma partição do círculo. Em vermelho, um dos seus intervalos.

Dada uma função contínua $\psi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ definimos a variação de ψ com respeito a $\mathcal{P}$ como sendo

$$\mathrm{Var}_{\mathcal{P}}(\psi) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{\ell=1}^{k} \psi(x_{\ell+1}) - \psi(x_\ell).$$

Dizemos que uma função contínua $\psi \in \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ é de variação limitada se existe uma constante $C > 0$ tal que para toda partição finita $\mathcal{P}$ de $\mathbb{S}^1$ tivermos $\mathrm{Var}_{\mathcal{P}}(\psi) \leq C$, ou, equivalentemente, se

$$\sup_{\mathcal{P}} \mathrm{Var}_{\mathcal{P}}(\psi) < \infty.$$

Proposition 2.1. *Toda função de classe C^1 é de variação limitada. Existem funções contínuas que não são de variação limitada.*

Demonstração. **Exercício**. □

Denotamos o conjunto das funções contínuas de variação limitada por $\mathrm{BV}(\mathbb{S}^1)$. Quando $\psi \in \mathrm{BV}(\mathbb{S}^1)$, o número $\mathrm{Var}(\psi) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\mathcal{P}} \mathrm{Var}_{\mathcal{P}}(\psi)$ é chamado a variação total de ψ.

3. A desigualdade de Denjoy-Koksma

Sejam p_n/q_n os convergentes da expansão em frações contínuas do ângulo de rotação α. Em particular, temos que

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Fixe n e por simplicidade vamos denotar $q = q_n$.

Theorem 3.1 (Denjoy-Koksma)**.** *Seja $\psi \in \mathrm{BV}(\mathbb{S}^1)$. Então, para todo $x \in \mathbb{S}^1$ vale que*

$$\left|\sum_{\ell=0}^{q-1} \psi(f^\ell(x)) - q\int \psi(\theta)d\theta\right| \leq \mathrm{Var}(\psi).$$

Antes de começar a demonstração, vamos precisar de um resultado auxiliar. Considere a partição do círculo por intervalo $J_k = [x + \frac{k}{q}, x + \frac{k+1}{q})$, para $k = 0, ..., q-1$.

Lemma 3.2 (Lemma de Herman)**.** *Para cada $k = 0, ..., q-1$ existe um único $j = 0, ..., q-1$ tal que $f^j(x) \in J_k$.*

Demonstração. **Exercício.** □

Agora estamos em posição de apresentar a demonstração da desigualdade de Denjoy-Koksma.

3.1. **Prova do Teorema 3.1.** Observe que

$$\int \psi(\theta)d\theta = \sum_{k=0}^{q-1} \int_{J_k} \psi(\theta)d\theta,$$

e que

$$\psi(f^j(x)) = \frac{1}{\ell(J_k)} \int \psi(f^\ell(x))d\theta.$$

Aplicando o lema de Herman, podemos reordenar os pontos $x, f(x), f^2(x), ..., f^{q-1}(x)$ usando $k \mapsto j$ cuja existência fica garantida pelo lema de Herman. Logo, como o comprimento $\ell(J_k)$ do intervalo J_k é exatamente $1/q$ temos que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{\ell=0}^{q-1} \psi(f^\ell(x)) - q \int \psi(\theta)d\theta \right| &= \left| \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{\ell(J_k)} \int_{J_k} \psi(f^j(x)) - \psi(\theta)d\theta \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{\ell(J_k)} \int_{J_k} |\psi(f^j(x)) - \psi(\theta)|d\theta \\
&\leq \sum_{k=0}^{q-1} \mathrm{Var}(\psi|_{J_k}) \leq \mathrm{Var}(\psi)
\end{aligned}$$

□

4. Prova do Teorema de Kochergin

Seja $V = \mathrm{Var}(\tau)$. Seja $0 < \delta < \min_{x\in\mathbb{S}^1} \tau(x)$. Fixe $\Delta \subset \mathbb{S}^1$ um intervalo fechado de comprimento pequeno o suficiente para que o conjunto

$$A \overset{\text{def.}}{=} \bigcup_{-3V \leq t \leq 3V+\delta} \phi_t(\Delta)$$

não seja denso em X. Como A é compacto, isso implica que $V \overset{\text{def.}}{=} X \setminus A$ é aberto. Vamos supor por redução ao absurdo que ϕ seja topologicamente misturador. Seja $\Delta_1 \subset \Delta$ um intervalo aberto e seja

$$B \overset{\text{def.}}{=} \bigcup_{0<t<\delta} \phi_t(\Delta_1).$$

Então, existe $T_0 > 0$ tal que se $t > T_0$ então $\phi_t(B) \cap V \neq \emptyset$. Seja $x_0 \in \mathbb{S}^1$ um ponto arbitrário e considere a sequência numérica $t_n = \sum_{\ell=0}^{q_n-1} \tau(f^\ell(x_0))$. Temos que $t_n \geq n\delta$ e portanto $t_n \to \infty$. Em particular, para todo n suficientemente grande devemos ter $t_n > T_0$.

Seja $y \in B$ um ponto arbitrário. Então, existe $x \in \Delta_1$ e $0 < \gamma < \delta$ tais que $y = \phi_\gamma(x)$. Denote $\tau_n = \sum_{\ell=0}^{q_n-1} \tau(f^\ell(x))$. Pela definição do fluxo ϕ temos que $\phi_{\tau_n}(x) = f^{q_n}(x)$, e portanto

$$\begin{aligned}
\phi_{t_n}(y) &= \phi_{\gamma+\tau_n+t_n-\tau_n}(x) \\
&= \phi_{\gamma+(t_n-\tau_n)} \circ \phi_{\tau_n}(x) \\
&= \phi_{\gamma+(t_n-\tau_n)}(f^{q_n}(x)).
\end{aligned}$$

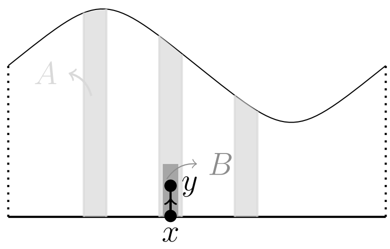

FIGURA 3. Prova do Teorema 1.2: para tempos arbitrariamente grandes a trajetória do conjunto B fica presa na faixa A.

Sabemos da dinâmica das rotações irracionais que $f^{q_n}(x) \to x$. Logo, como Δ_1 é aberto, para todo n suficientemente grande devemos ter não somente $t_n > T_0$ como também devemos ter $f^{q_n}(x) \in \Delta_1$. Isso prova que

$$\phi_{t_n}(y) \in \phi_{\gamma+(t_n-\tau_n)}(\Delta_1).$$

No entanto, pela desigualdade de Denjoy-Koksma, temos que $|\tau_n - t_n| \leq V$, e como $0 < \gamma < \delta$, deduzimos que

$$\gamma + (t_n - \tau_n) \in (-V, V + \delta).$$

Como consequência disso, deduzimos que $\phi_{\gamma+(t_n-\tau_n)}(\Delta_1) \subset A$, o que implica que $\phi_{t_n}(y) \in A$, para todo n suficientemente grande. Isso prova que $\phi_{t_n}(B) \subset A$ para todo n grande e portanto $A \cap V \neq \emptyset$, o que é absurdo. $\square$

Referências

[1] Andrey Vasilyevich Kochergin. On the absence of mixing in special flows over the rotation of a circle and in flows on a two-dimensional torus. In *Doklady Akademii Nauk*, volume 205, pages 515–518. Russian Academy of Sciences, 1972.

Email address: brunosantiago@id.uff.br