

# UMA INTRODUÇÃO AO ARGUMENTO DE DERIVA POLINOMIAL

BRUNO SANTIAGO

## 1. INTRODUÇÃO

Os teoremas de classificação de medidas invariantes para ações em espaços homogêneos, notadamente os teoremas de Marina Ratner, estão no panteão dos resultados mais importantes da Teoria Ergódica, não somente pelas suas aplicações maravilhosas em Teoria dos Números, mas também pela beleza intrínseca na imensa generalização que eles representam do estudo de translações do toro.

Para matemáticos como eu que tem uma formação mais voltada para a dinâmica diferenciável de sistemas com hiperbolicidade, esses resultados e, principalmente, as ideias envolvidas nas suas demonstrações ficam bastante ofuscadas por toda a teoria de Lie envolvida.

Tendo isso em mente o objetivo dessas notas é apresentar de forma completa uma demonstração de um caso particular do Teorema de Ratner sobre classificação de medidas invariantes por fluxos unipotentes, que é devida a Dani. Vamos considerar quocientes do grupo  $SL_2(\mathbb{R})$  por subgrupos discretos e o objetivo vai ser classificar medidas de probabilidade invariantes e ergódicas pela ação do grupo unipotente  $U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; s \in \mathbb{R} \right\}$ . A ênfase principal vai ser no argumento de deriva polinomial de Ratner que aqui vai aparecer de uma maneira leve o bastante para que possa ser apreciado em todo seu esplendor.

Esse texto é acessível a (ou eu gostaria que fosse...) qualquer pessoa que tenha feito um curso básico de teoria ergódica e que tenha noções rudimentares de topologia diferencial e ações de grupos. O argumento segue de perto a apresentação de [1], páginas 96-100.

## 2. O GRUPO $SL_2(\mathbb{R})$ E SEUS QUOCIENTES

Vamos considerar o grupo de Lie  $G = SL_2(\mathbb{R})$ . Ele é o ponto de partida para apresentarmos os espaços nos quais vão atuar os sistemas dinâmicos que vamos considerar. Por isso vamos fazer um estudo detalhado de  $G$ . Como vamos fazer teoria ergódica, é muito importante analisar a *medida de referência* de  $G$ . Observe que  $G$  é uma variedade diferenciável não-compacta de dimensão 3. Como em todo grupo de Lie, podemos dotar  $G$  de uma métrica Riemanianna invariante por multiplicações à direita. Mais precisamente, para cada  $g \in G$  temos a aplicação de *translação à direita*  $R_g : G \rightarrow G$  associada à  $g$  dada por  $R_g(h) = gh$  para todo  $h \in G$ . Como  $G$  é um grupo de Lie,  $R_g$  é um difeomorfismo com inversa  $R_{g^{-1}}$ . Definimos similarmente a aplicação de translação à esquerda  $L_g : G \rightarrow G$ . Dado qualquer produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definido na álgebra de Lie  $T_{id}G$  de  $G$  e dados  $g \in G$ ,

$u, v \in T_g G$  definimos

$$\langle u, v \rangle = \langle DR_{g^{-1}}(g)u, DR_{g^{-1}}(g)v \rangle.$$

Com a forma de volume induzida por essa métrica Riemanniana temos uma medida de volume em  $G$ , que é chamada a *medida de Haar* de  $G$ , que vamos denotar por  $m$ .

Observe que  $G \subset GL_2(\mathbb{R})$  é uma subvariedade de codimensão 1. Identificando  $GL_2(\mathbb{R})$  com um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^4$  vemos que  $m$  nada mais é do que a restrição da medida de Lebesgue à  $SL_2(\mathbb{R})$ . Em particular, temos que a medida de Haar de  $G$  também é invariante pelas translações à esquerda  $L_g$ . Ou seja,  $G$  é *unimodular*.

Tal qual o toro  $\mathbb{T}^d$  é o quociente do grupo  $\mathbb{R}^d$  pelo subgrupo discreto  $\mathbb{Z}^d$  vamos considerar o quociente de  $G$  por um subgrupo discreto  $\Gamma$  e denotar  $X = G/\Gamma$ . Assim,  $x \in X \iff x = g\Gamma$ , para algum  $g \in G$ . O exemplo para se ter em mente aqui é  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ .

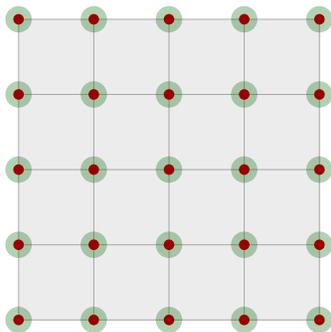


FIGURA 1.  $\Gamma$  contido em  $G$  é a união do pontos vermelhos. Uma vizinhança de  $x = \text{id} \Gamma$  é a união das bolinhas verdes.

Esse é o espaço no qual vamos ter dinâmica acontecendo. Como é natural desde o caso do toro, precisamos tomar o quociente para poder enxergar recorrência, pois a dinâmica das translações  $R_g$  em  $G$  é essencialmente trivial. Localmente  $X$  é idêntico à  $G$ , dotado da mesma estrutura diferenciável. Em particular, podemos definir em abertos pequenos de  $X$  (veja a Figura 1) a medida de Haar  $m$ .

*Observação 2.1.* Não segue da definição que  $m(X) < \infty$ . No caso  $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$  isso é verdade mas não usaremos essa informação nos argumentos que seguirão.

**2.1. O fluxo geodésico e o fluxo horocíclico.** Vamos agora apresentar os sistemas dinâmicos a serem considerados atuando no espaço  $X$ . Consideramos o subgrupo

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u_t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$U$  é o que se chama *um subgrupo a um parâmetro* de  $G$ . Um cálculo matricial direto mostra que  $U$  define um fluxo em  $G$  pois

$$u_{t+s} = u_t u_s.$$

Assim a multiplicação por  $u_t$  define um fluxo em  $G$  e esse fluxo passa ao quociente. Dito com outras palavras, temos definimos o *fluxo horocíclico* em  $X$  por  $\phi_t^u : X \rightarrow X$  pondo  $\phi_t^u(g\Gamma) = u_t g\Gamma$ .

**Exemplo 2.2.** Quando  $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  o fluxo horocíclico tem órbitas periódicas pois  $u_0, u_1 \in \Gamma$  nesse caso. Assim,  $x = \Gamma$  é um ponto periódico de período 1 para o fluxo  $\phi^u$ .

O fluxo horocíclico é nosso objeto dinâmico principal. Queremos entender a demonstração do resultado a seguir.

**Teorema A** (Ratner/Dani). *Se  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  é uma medida de probabilidade invariante e ergódica pelo fluxo  $\phi^u$  que não está suportada em uma órbita periódica então existe  $c > 0$  tal que  $\mu = c m$ . Em particular,  $m(X) < \infty$ .*

Uma das consequências interessantes do teorema é fornecer um critério para decidir quando um subgrupo discreto é o que se chama um *reticulado*, isto é, quando o quociente possui volume finito com respeito à Haar. O Teorema A mostra que a existência de medidas invariantes não-triviais para  $\phi^u$  implica que  $\Gamma$  tem que ser um reticulado.

Uma das ideias por trás do teorema é que a estrutura homogênea do espaço  $X$  e as simetrias naturais do sistema dinâmico  $\phi^u$  forçam *invariância adicional* para atuação desse fluxo. Vamos passar agora a descrever quais são essas simetrias naturais do fluxo horocíclico.

O fluxo geodésico  $\phi_t^a$  é o subgrupo a um parâmetro  $\{a_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  definido por

$$a_t = \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que  $a_{t+s} = a_t a_s$  e portanto temos um fluxo  $\phi_t^a : X \rightarrow X$  definido por  $\phi_t^a(g\Gamma) = a_t g\Gamma$ . Essa terminologia não é à toa, ela vem impregnada da influência da teoria hiperbólica.

Nessas notas, eu penso o fluxo  $\phi_t^a$  como um fluxo Anosov na variedade de dimensão 3 que é o espaço  $X$  e o fluxo  $\phi^u$  como sendo a folheação instável desse fluxo Anosov. Isso se justifica pela relação de comutação entre os dois fluxos, dada no lema a seguir.

**Lema 2.3.**  $a_s u_t = u_{e^s t} a_s$ .

*Demonstração.*  $\begin{bmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{s/2} & t e^{s/2} \\ 0 & e^{-s/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t e^s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{bmatrix}.$  □

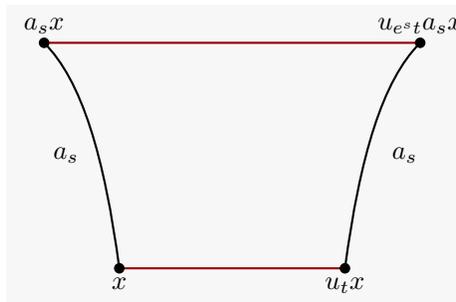


FIGURA 2. A trajetória horocíclica de tamanho  $t$  é enviada pelo difeomorfismo  $a_s$  numa trajetória de tamanho  $e^s t$

Vamos dividir a demonstração do Teorema A da seguinte maneira. Na próxima seção vamos enunciar e provar alguns resultados menores, auxiliares à demonstração. Na seção seguinte, vamos apresentar quatro lemas principais que irão compor o argumento e provaremos todos exceto o primeiro. Este primeiro lema, cuja demonstração contém uma versão do argumento de deriva polinomial e é a parte mais técnica (e bonita) da prova será feito na última seção.

### 3. ALGUNS LEMINHAS

Como o objetivo é que esse texto seja acessível ao maior público possível, vou apresentar de maneira muito elementar alguns resultados que podem ser mais bem vistos dentro de teorias mais gerais.

**3.1. Aproximações da id.** A relação de comutação entre o fluxo horocíclico e o fluxo geodésico força o seguinte.

**Lema 3.1.** *Dado  $t \in \mathbb{R}$  vale  $\lim_{s \rightarrow \infty} a_{-s} u_t a_s = \text{id}$ .*

*Demonstração.* Como  $a_{-s} u_t = u_{e^{-s}t} a_{-s}$ , multiplicando por  $a_s$  em ambos os lados obtemos  $a_{-s} u_t a_s = u_{e^{-s}t}$ , o que implica o resultado.  $\square$

**3.2. Folheações centro estável/instável.** Consideramos o grupo

$$U^- \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

De maneira análoga ao Lema 2.3 temos que dados  $s, t \in \mathbb{R}$  vale

$$a_s u_t^- = u_{e^{-s}t}^- a_s.$$

O fluxo  $\{u_t^-\}$  assim obtido é o *fluxo horocíclico estável*. Vamos considerar o grupo  $B = AU$ . Observe que, pelo Lema 2.3  $B = UA$ . Esse grupo pode ser pensado como a “folheação centro instável” do fluxo geodésico. De forma análogo, o grupo  $B^- = AU^-$  pode ser pensado como a “folheação centro estável” do fluxo geodésico. Nesta seção vamos provar que essencialmente essas folheações possuem estrutura de produto local, como num fluxo Anosov. Apenas vamos escrever isso numa linguagem algébrica, o que irá reduzir a demonstração a um cálculo matricial.

**Lema 3.2.** *Seja  $g \in G$  com  $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  e suponha que  $a \neq 0$ . Então, existem  $u \in U$ ,  $\hat{u} \in U^-$  e  $a \in A$  tais que  $g = \hat{u} a u$ .*

*Demonstração.* É suficiente observar que o sistema

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \hat{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \hat{t} \\ \alpha t & \alpha t \hat{t} + \alpha^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

admite como solução  $\alpha = a$ ,  $\hat{t} = b/a$  e  $t = c/a$ .  $\square$

Seja  $M = \left\{ g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a \neq 0 \right\}$ . Observe que, pelo teorema da função implícita, o complementar  $G \setminus M$  é uma subvariedade de codimensão positiva de  $G$ .

**Corolário 3.3.** *O mapa de multiplicação induz um difeomorfismo entre  $U^{-1} \times B$  e  $M$ , i.e. a aplicação*

$$\begin{aligned}\Phi : U^{-1} \times B &\rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{R}) \\ (u, b) &\mapsto ub\end{aligned}$$

*é um difeomorfismo entre  $U^{-1} \times B$  e  $M$ .*

*Demonstração.* A diferenciabilidade de  $\Phi$  é imediata e a demonstração do Lema 3.2 mostra que  $\Phi$  envia  $U^{-1} \times B$  bijetivamente sobre  $M$  com inversa diferenciável.  $\square$

**Proposição 3.4** (Acessibilidade).  $G = U^{-1}AU$

*Demonstração.* Observe que a equação

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{t} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + t\hat{t} & t \\ \hat{t} & 1 \end{bmatrix}$$

admite única solução  $t = b$  e  $\hat{t} = -1/b$ . Como

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha b \\ -1/\alpha b & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$$

vemos que as matrizes em  $G \setminus M$  com  $d \neq 0$  pertencem à  $AUU^{-1} = U^{-1}AU$ . Além disso,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 0 & b \\ -1/b & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \hat{t} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + t\hat{t} & t + t^2\hat{t} + t \\ \hat{t} & \hat{t}t + 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

admite solução única  $t = b$  e  $\hat{t} = -1/b$ . Junto com o Lema 3.2 isso mostra que qualquer elemento  $g$  pode ser escrito como um produto de elementos em  $U^{-1}$ ,  $A$  e  $U$  em alguma ordem e como  $AU = UA$  e  $AU^{-1} = U^{-1}A$  isso completa a demonstração.  $\square$

**3.3. Um leminha de análise.** O resultado a seguir vai aparecer na demonstração do fenômeno de Mautner.

**Lema 3.5.** *Seja  $H$  um espaço de Hilbert e  $f : H \rightarrow H$  uma isometria. Dado  $v \in H$  vetor não-nulo, se  $\langle f(v), v \rangle = \langle v, v \rangle$  então  $f(v) = v$ .*

*Demonstração.* Como  $v \neq 0$  e como  $\langle f(v), v \rangle = \langle v, v \rangle$  segue que  $f(v) - v$  é ortogonal a  $v$  mas  $f(v)$  não é ortogonal a  $v$ . Pelo Teorema de Pitágoras

$$\|f(v)\|^2 = \|v\|^2 + \|f(v) - v\|^2.$$

Como  $f$  é isometria segue que  $\|f(v) - v\| = 0$ , como queríamos.  $\square$

**3.4. Um leminha de teoria da medida.** O enunciado a seguir é uma simples reformulação do fato que as órbitas de uma ação de grupo formam uma decomposição do espaço para a qual podemos aplicar o teorema de Fubini.

**Lema 3.6.** *Sejam  $G$  um grupo munido de uma medida  $m$ ,  $(X, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $\phi : G \times X \rightarrow X$  uma ação que preserva  $\mu$ . Dado  $Y \subset X$  se  $\mu(Y) = 1$  então para  $\mu$  quase todo ponto  $x \in X$  vale que*

$$m(\{g \in G; \phi_g(x) \notin Y\}) = 0.$$

*Demonstração.* Seja  $N = \{(g, x); \phi_g(x) \notin Y\}$ . Dado  $g \in G$ , como a transformação  $\phi_g$  preserva  $\mu$  temos  $\mu(\phi_{g^{-1}}(Y^c)) = \mu(Y^c) = 0$ . Portanto o conjunto

$$\{x \in X; (g, x) \in N\}$$

Possui medida nula com respeito a  $\mu$ . Pelo Teorema de Fubini temos que  $m \times \mu(N) = 0$ . Aplicando Fubini mais uma vez deduzimos a conclusão do lema. Isto termina a prova.  $\square$

#### 4. COMEÇANDO A PROVA: DESFRUTANDO DA INVARIÂNCIA EXTRA

Como já disse acima, o passo técnico fundamental da demonstração do Teorema A consiste no argumento de deriva. Aqui o argumento de deriva vai nos fornecer a primeira invariância adicional: usando ele vamos provar (basicamente) se não for trivial, uma medida ergódica invariante pelo fluxo horocíclico tem que ser invariante pelo fluxo geodésico também.

**Proposição 4.1** (Argumento de Deriva). *Seja  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  uma medida de probabilidade invariante e ergódica pelo fluxo  $\phi^u$ . Se  $\mu$  não está suportada em uma órbita periódica  $\phi^u$  então  $\mu$  é invariante pelo fluxo  $\phi^a$ .*

O objetivo desta seção vai ser explicar como conseguimos concluir a demonstração do Teorema A assumindo a Proposição 4.1. O primeiro corolário automático é que se  $\mu$  é  $U$ -invariante e  $U$ -ergódica então  $\mu$  é  $B$  invariante, onde  $B = AU$ . O passo seguinte é obter a ergodicidade da medida com respeito ao grupo  $A$ .

**Lema 4.2** (Fenômeno de Mautner). *Seja  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  uma medida de probabilidade simultaneamente  $U$  e  $A$  (ou seja,  $\mu$  é preservada por ambos os fluxos  $\phi^u$  e  $\phi^a$ ). Se  $\varphi \in L^2_\mu(X)$  representa uma função que é constante ao longo de quase toda trajetória do fluxo  $\phi^a$  então  $\varphi$  também é constante ao longo de quase toda trajetória do fluxo  $\phi^u$ .*

*Demonstração.* Dado  $g \in G$  considere o operador unitário de Koopman

$$\begin{aligned} \hat{L}_g : L^2_\mu(X) &\rightarrow L^2_\mu(X) \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ L_g. \end{aligned}$$

Observe que  $g \mapsto \hat{L}_g$  é uma *representação*:  $\hat{L}_g \circ \hat{L}_h = \hat{L}_{gh}$ . O fato de cada operador ser unitário quando  $g \in B$  é uma reformulação da  $B$ -invariância de  $\mu$ .

Além disso, se  $\varphi \in L^2_\mu(X)$  representa uma função que é constante ao longo de quase toda trajetória do fluxo  $\phi^a$  então  $\hat{L}_{a_s}\varphi = \varphi$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ .

Tendo isso em mente, seja  $\varphi$  um vetor invariante por todos  $\hat{L}_{a_s}$  e seja  $t \in \mathbb{R}$  arbitrário (fixo). Então, como  $\hat{L}_{a_{-s}}$  é uma isometria temos

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_{u_t}\varphi, \varphi \rangle &= \langle \hat{L}_{u_t}\hat{L}_{a_s}\varphi, \hat{L}_{a_s}\varphi \rangle \\ &= \langle \hat{L}_{a_{-s}u_t a_s}\varphi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Como isso é verdade para todo  $s$  aplicando o Lema 3.1 obtemos

$$\langle \hat{L}_{u_t}\varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle.$$

Pelo Lema 3.5 concluímos que  $\hat{L}_{u_t}\varphi = \varphi$ . Portanto,  $\varphi$  é invariante por todos os operadores  $\hat{L}_{u_t}$ , o que é o mesmo que dizer que  $\varphi$  é constante ao longo de quase toda trajetória do fluxo  $\phi^u$ .  $\square$

**Corolário 4.3.** *Seja  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  uma medida de probabilidade  $U$ -invariante e  $U$ -ergódica. Então  $\mu$  é  $A$ -ergódica.*

*Demonstração.* Pela Proposição 4.1 temos que  $\mu$  é  $A$ -invariante. Para provar que a ação do fluxo  $\phi^a$  é ergódica com respeito à  $\mu$ , como sabemos que essa ação preserva  $\mu$ , é suficiente demonstrar que toda função integrável  $\varphi$  que é constante ao longo de trajetórias do fluxo  $\phi^a$  é, na verdade, constante em quase todo ponto. Pelo Lema 4.2 temos que  $\varphi$  é constante ao longo de quase toda trajetória do fluxo  $\phi^u$ . Como, por hipótese,  $\mu$  é ergódica pela ação do fluxo  $\phi^u$  segue que  $\varphi$  é constante em quase todo ponto. Isso estabelece a afirmação desejada e conclui a prova.  $\square$

**4.1. Medidas SRB.** Agora uma pausa para um pouco de discussão. Se pensamos no fluxo  $\phi^a$  como um fluxo Anosov e no fluxo  $\phi^u$  como sendo a folheação instável desse fluxo Anosov, então uma medida  $\phi^u$  invariante é na verdade uma medida absolutamente contínua com respeito à folheação instável de  $\phi^a$ , ou seja, uma medida SRB. O que provamos acima pode então ser reformulado como *medidas SRB são sempre invariantes e ergódicas*. Dentro desse espírito, os argumentos que vamos dar a seguir na verdade são uma demonstração de que *a medida de Haar é a única medida SRB ergódica de  $\phi^a$* . Note que não podemos simplesmente “apelar” para esses argumentos da teoria uniformemente hiperbólica porque (dentre outras razões)  $X$  não é compacto e nem  $m(X)$  é finito à priori.

A primeira coisa que precisamos estabelecer é a ergodicidade da medida de Haar para ação do fluxo geodésico.

**Lema 4.4** (Argumento de Hopf). *O sistema  $(\phi^a, m)$  é ergódico.*

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in L^2_\mu(X)$  uma função constante ao longo de trajetórias do fluxo  $\phi^a$ . Como  $m$  é simultaneamente  $\phi^u$  e  $\phi^a$  invariante aplicando o Lema 4.2 deduzimos que  $\varphi$  é constante ao longo de trajetórias do fluxo  $\phi^u$ . Seja  $\phi^s$  o fluxo horocíclico estável, i.e.

$$\phi_t^s(x) = u_t^- g\Gamma.$$

Observe que o Lema 4.2 também se aplica a  $\phi^s$  (basta fazer  $s \rightarrow -\infty$  no argumento). Assim, deduzimos que  $\varphi$  também é constante ao longo de quase toda trajetória do fluxo  $\phi^s$ . Assim, obtemos um conjunto  $X' \subset X$  com  $m(X') = 1$  e tal que se  $x \in X'$  então

$$\varphi \circ \phi_t^\star(x) = \varphi(x), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}, \star = u, s, a.$$

Logo, se  $x \in X'$  e  $x = g\Gamma$ , com  $g \in G$ , aplicando o Lema 3.2 podemos escrever  $g = u_t^- a_r u_s$ , com  $t, r, s \in \mathbb{R}$ . Então, a equação acima fornece

$$\varphi(x) = \varphi(g\Gamma) = \varphi(u_t^- a_r u_s \Gamma) = \varphi(\Gamma).$$

Portanto  $\varphi$  é constante em  $m$ -quase todo ponto.  $\square$

**4.2. Prova do Teorema A.** Seja  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  uma medida de probabilidade  $\phi^u$  invariante e  $\phi^u$  ergódica que não está suportada em uma órbita periódica. Nosso objetivo é demonstrar que  $\mu = c m$ , para algum  $c > 0$ . Para isso, dados  $x \in X$  e  $\varphi \in C_c^0(X)$  função contínua de suporte compacto definimos

$$\tilde{\varphi}(x) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(\phi_t^a x) dt.$$

Seja  $Y = \{x \in X; \tilde{\varphi} = \int \varphi d\mu\}$ . Pelo Corolário 4.3 temos que  $\mu$  é também  $\phi^a$  invariante e  $\phi^a$  ergódica. Por isso,  $\mu(Y) = 1$ . Como as órbitas pelo fluxo horocíclico

estável  $\phi^s$  são variedades estáveis do fluxo geodésico e como  $\varphi$  é uniformemente contínua, temos que

$$\tilde{\varphi}(\phi_t^s x) = \tilde{\varphi}(x)$$

Segue daí que  $Y \subset X$  é um conjunto invariante pela ação do grupo  $U^-$ .

Por outro lado, como  $\mu$  é invariante pela ação do grupo  $B = UA$  aplicando o Lema 3.6 obtemos que para  $\mu$  quase todo ponto  $x \in X$  o conjunto

$$B_x \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in B; bx \in Y\}$$

possui medida de Lebesgue total em  $B$ . Fixemos um tal ponto  $x \in X$ . Então, para Lebesgue quase todo ponto  $b \in B$  e todo  $u^- \in U^-$  temos

$$u^-bx \in Y.$$

Seja  $F = \{u^-bx; u^- \in U^-, b \in B_x\}$ . Afirimo que  $m(F^c) = 0$ . Com efeito, o conjunto  $U^- \times B_x$  possui medida de Lebesgue total em  $U^- \times B$ . Como  $F = \Phi(U^- \times B_x)$ , a afirmação segue diretamente do Corolário 3.3. Em particular, deduzimos que  $m(Y^c) = 0$ .

Suponha agora que  $\varphi \geq 0$  e que  $\int \varphi d\mu = 1$ . Então, para  $m$ -quase todo ponto  $x \in X$  vale que  $\tilde{\varphi}(x) = 1$ . Logo, aplicando o Lema de Fatou temos que

$$\begin{aligned} m(X) &= \int_X \tilde{\varphi}(x) dm(x) \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_X \int_0^T \varphi(\phi_t^a x) dt dm(x) \\ &= \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_X \varphi(\phi_t^a x) dm(x) dt \\ &= \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_X \varphi(x) dm(x) dt \\ &= \int_X \varphi(x) dm(x) < \infty, \end{aligned}$$

pois  $\varphi$  é contínua de suporte compacto. Isso prova que  $m$  é finita e como, pelo Lema 4.4  $(\phi^a, m)$  é ergódico podemos aplicar o teorema ergódico de Birkhoff e deduzir que

$$\tilde{\varphi}(x) = c \int_X \varphi dm$$

para  $m$ -quase todo ponto  $x \in X$ , onde  $c = m(X)^{-1}$ . Como  $m(Y^c) = 0$  temos pelo menos um ponto  $x \in Y$  tal que  $\tilde{\varphi}(x) = \int_X \varphi dm$ . Mas então, isso prova que  $\int \varphi d\mu = c \int \varphi dm$ . Como  $\varphi$  pode ser tomada arbitrariamente, isso prova que  $cm = \mu$ .  $\square$

## 5. O ARGUMENTO DE DERIVA: PROVA DA PROPOSIÇÃO 4.1

Como o objetivo principal dessas notas é discutir em profundidade a demonstração da Proposição 4.1, vamos começar pensando numa possível abordagem para o problema.

Vejamos. Nosso objetivo é demonstrar que  $\mu$  é invariante pelo fluxo  $\phi^a$ . Para isso, é suficiente demonstrar que, dada qualquer função contínua de suporte compacto  $\varphi \in C_c^0(X)$ , vale que

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ \phi_s^a d\mu,$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Fixemos  $s \in \mathbb{R}$  e seja  $a \in A$ ,  $a = a_s$ . Considere então  $f_a : X \rightarrow X$  a aplicação de tempo  $s$  do fluxo  $\phi^a$  agindo em  $X$ , isto é

$$f_a(x) \stackrel{\text{def}}{=} ag\Gamma,$$

se  $x = g\Gamma \in X$ . Seja  $\varphi^a \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \circ f_a$ . Então, com essas notações nosso objetivo é demonstrar que

$$(5.1) \quad \int \varphi d\mu = \int \varphi^a d\mu.$$

Seja  $X' \subset X$  o conjunto dos pontos  $\mu$  genéricos para a ação do fluxo  $\phi^u$ . Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff sabemos que  $\mu(X') = 1$  e se  $x \in X'$  então

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(u_t x) dt = \int \varphi d\mu,$$

para toda função contínua de suporte compacto  $\varphi \in C_c^0(X)$  (basta tomar um subconjunto enumerável denso no espaço  $C_c^0(X)$  e tomar interseções dos conjuntos dados pelo teorema ergódico para cada função desse subconjunto). Para entender de onde vem a ideia da demonstração da Proposição 4.1 suponha que  $f_a(X') \cap X' \neq \emptyset$ . Então, existe  $x \in X'$  tal que  $f_a(x) \in X'$ .

Daí, como  $x \in X'$  então

$$\int \varphi^a d\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^a(u_t x) dt.$$

Por outro lado, como  $a = \begin{bmatrix} e^{s/2} & 0 \\ 0 & e^{-s/2} \end{bmatrix}$  aplicando o Lema 2.3 vem que

$$f_a(u_t x) = au_t x = u_{e^s t} a x = u_{e^s t} f_a(x).$$

Logo  $\varphi^a(u_t x) = \varphi \circ f_a(u_t x) = \varphi(u_{ct} f_a(x))$ , onde  $c = e^s$ . Como, por hipótese,  $f_a(x) \in X'$  deduzimos que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi^a(u_t x) dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(u_{ct} f_a(x)) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{cT} \int_0^{cT} \varphi(u_r f_a(x)) dr \\ &= \int \varphi d\mu, \end{aligned}$$

o que estabelece (5.1).

Vamos pensar um pouco sobre a hipótese que fizemos. O conjunto  $X'$  é saturado pelas órbitas do fluxo horocíclico. A hipótese que fizemos é que para algum ponto desse conjunto a trajetória dele pelo fluxo geodésico volta a intersectar o conjunto  $X'$ .

Veja a Figura 3 tendo o Lema 3.2 em mente. Qualquer ponto de  $X$  pode ser obtido a partir da id por um caminho “horocíclico-geodésico-horocíclico estável” (a menos de permutação da ordem). Por outro lado, se  $x$  é um ponto de densidade de  $X'$  vai existir um elemento  $g \in G$ , tão perto da identidade quanto quisermos tal que  $gx \in X'$ . E aí a questão é: como é a escrita desse elemento  $g$  com respeito à decomposição  $G = U^-AU$ ?

Em outras palavras, se a gente pensa  $B$  como sendo a folheação centro-instável do fluxo geodésico  $\phi^a$  e  $B^-$  como sendo a folheação centro estável, podemos indagar

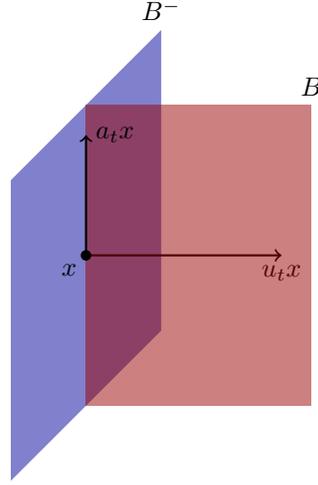


FIGURA 3. Estrutura geométrica local dos fluxos  $\phi^a$  e  $\phi^u$ .  $B^- = AU^-$

o que acontece se  $g$  está sempre dentro das folhas de uma dessas folhações, e o que acontece no caso contrário.

Com efeito, vamos ver que se  $g \in B$  (para  $g$  arbitrariamente próximo da  $\text{id}$ ) então é como se a medida estivesse toda concentrada numa única folha centro-instável. Heuristicamente, a única forma de  $\mu$  não apresentar invariância pelo o fluxo geodésico é estar suportada numa órbita periódica. Excluindo-se essa possibilidade é aí que começa a se desenhar o argumento de deriva. No próximo parágrafo vou fazer um resumo que como ele funciona.

**5.1. Um esboço do argumento.** Vamos assumir que existem  $b \sim \text{id}$ , mas  $g \notin B$ , e um elemento  $x \in X'$  tal que  $gx \in X'$ . Aqui eu uso a notação  $a \sim b$  para indicar que  $d(a, b)$  é muito pequena.

O coração da prova reside num fato que aqui será deduzido de um cálculo matricial enfadonho: quando  $g$  está muito perto de  $\text{id}$  a *primeira* direção de divergência entre as trajetórias horocíclicas de  $x$  e de  $gx$  é muito próxima do elemento  $a \in A$  que fixamos. Com efeito, escrevendo

$$a = \begin{bmatrix} 1 + s_0 & 0 \\ 0 & (1 + s_0)^{-1} \end{bmatrix}$$

vamos ver que para valores arbitrariamente grande de  $\lambda \gg 1$  temos

$$u_{s\lambda}gx = \hat{D}(s)u_{\lambda\Delta(s)}x,$$

onde  $\hat{D}(s) \sim a$  se  $s \sim s_0$ ,  $\Delta$  é uma função de reparametrização (explícita) positiva com derivada positiva.

Como  $gx \in X'$  as médias temporais convergem à média espacial. Um lema de reparametrização geral para fluxos (veja o Lema 5.9) permite escrever

$$\int \varphi d\mu \sim \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi(u_{s\lambda}gx) ds = \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi^{\hat{D}(s)}(u_{\lambda\Delta(s)}x) ds,$$

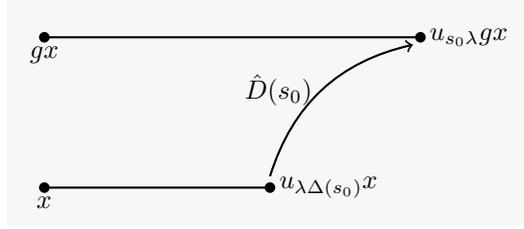


FIGURA 4. A deriva transversa e a deriva da parametrização

onde  $\varphi^{\hat{D}(s)}(y) = \varphi(\hat{D}(s)y)$ . Escolhendo  $s_1 < s_0 < s_2$  com  $s_2 - s_1$  muito pequeno temos que  $\hat{D}(s) \sim a$  e portanto

$$\frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi^{\hat{D}(s)}(u_{\lambda \Delta(s)} x) ds \sim \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi^a(u_{\lambda \Delta(s)} x) ds.$$

Fazendo a mudança de variável  $t = \Delta(s)$  e escrevendo  $t_j = \Delta(s_j)$ ,  $j = 1, 2$ , obtemos

$$\frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi^a(u_{\lambda \Delta(s)} x) ds \sim \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varphi^a(u_{\lambda t} x)}{\Delta'(\Delta^{-1}(t))} dt.$$

Pelo teorema do valor médio existe  $\hat{s} \in [s_1, s_2]$  tal que  $t_2 - t_1 = \Delta'(\hat{s})(s_2 - s_1)$ . Segue que

$$\frac{1}{s_2 - s_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\varphi^a(u_{\lambda t} x)}{\Delta'(\Delta^{-1}(t))} dt \sim \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\Delta'(\hat{s})}{\Delta'(\Delta^{-1}(t))} \varphi^a(u_{\lambda t} x) dt.$$

Fazendo  $s_2 - s_1$  suficientemente pequeno temos

$$\frac{\Delta'(\hat{s})}{\Delta'(\Delta^{-1}(t))} \sim 1.$$

Além disso, o mesmo lema de reparametrização permite estimar

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \varphi^a(u_{\lambda t} x) dt \sim \int \varphi^a d\mu.$$

Portanto  $\int \varphi d\mu \sim \int \varphi^a d\mu$ , o que implica (5.1).

5.1.1. *Comentários.* O esboço acima é quase a demonstração tal qual ela é, a menos de alguns pontos importantes que quero destacar. Em primeiro lugar, é claro que para ter  $\int \varphi d\mu$  cada vez mais perto de  $\int \varphi^a d\mu$  é necessário tomar  $g$  mais perto de  $\text{id}$ . Mas isso muda a velocidade das convergências das médias temporais à média assintótica. Por isso, o primeiro passo é tomar um compacto de medida grande no qual a convergência é uniforme. Segundo, a função de reparametrização  $\Delta$  depende de  $g$  e isso poderia comprometer a escolha de  $s_2 - s_1$  pequeno de maneira independente. O cálculo acima vai usar na verdade que  $\Delta$  converge  $C^1$  a uma função explícita  $d$  e isso vai acrescentar uma estimativa a mais ao argumento.

5.2. **Uniformizando a convergência.** Devido à deriva da parametrização é necessário considerar uma parte compacta de  $X'$  na qual a convergência das médias de Birkhoff se faz de maneira uniforme. A menos de perder um pouquinho de medida sempre podemos fazer isso.

**Lema 5.1.** Dado  $\delta > 0$  existe  $K \subset X'$  com  $\mu(K) > 1 - \delta$  tal que para toda função  $\varphi \in C_c^0(X)$  a família

$$x \in K \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(u_t x) dt$$

converge uniformemente à  $\int \varphi d\mu$ .

*Demonstração.* Tome um subconjunto enumerável denso  $\{\varphi_n\} \subset C_c^0(X)$ . Tome uma sequência  $\delta_n$  tal que  $\sum \delta_n < \delta$ . Para cada  $n$ , pelo Teorema de Egorov existe um compacto  $K_n \subset X'$  tal que

$$x \in K_n \mapsto \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_n(u_t x) dt$$

converge uniformemente à  $\int \varphi_n d\mu$ . Tome  $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ . Então, se  $x \in K$ , dada  $\varphi \in C_c^0(X)$  e dado  $\varepsilon > 0$  tome  $\varphi_n$  satisfazendo

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{C^0} < \varepsilon.$$

Seja  $T_0 > 0$  tal que se  $T > T_0$  então

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_n(u_t x) - \int \varphi_n(x) \right| < \varepsilon,$$

para todo  $x \in K$ . Segue que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(u_t x) - \int \varphi(x) \right| &\leq \left| \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(u_t x) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_n(u_t x) dt \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{T} \int_0^T \varphi_n(u_t x) - \int \varphi_n(x) \right| + \left| \int \varphi_n d\mu - \int \varphi d\mu \right| \\ &\leq 3\varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Fixemos  $K$  o compacto dado pelo Lema 5.1. O valor de  $\delta$  é pouco relevante para o argumento.

**5.3. Preparando a deriva: aproximação por fora da variedade centro-instável.** Para que funcione o argumento de deriva como disse acima, é preciso excluir a possibilidade de  $\mu$  estar concentrada no grupo  $B$ .

**Lema 5.2.** Se  $\mu$  não está suportada numa órbita periódica então existe  $g_n \in G \setminus B$ , com  $g_n \rightarrow \text{id}$  e  $g_n K \cap K \neq \emptyset$ .

*Demonstração.* Suponha que não exista sequência  $g_n$  com a propriedade anunciada pelo lema. Então, deve existir uma vizinhança  $V$  da  $\text{id}$  em  $G$  tal que se  $g \in V$  e  $gK \cap K \neq \emptyset$  então  $g \in B$ . Como  $\mu(K) > 0$  tem que existir  $x \in K$  tal que  $\mu(Vx \cap K) > 0$ , pois do contrário tomando uma subcobertura finita  $V_{x_1}, \dots, V_{x_k}$  teríamos  $\mu(K) \leq \sum_{i=1}^k \mu(V_{x_i} \cap K) = 0$ .

No entanto, pela nossa hipótese,  $\mu(Vx \cap K) > 0$  implica  $\mu(Bx) > 0$ . Como  $B = UA$  temos que  $B_x = UB_x$ , ou seja,  $Bx$  é um conjunto invariante pelo fluxo  $\phi^u$ . Como  $\mu$  é ergódica pela ação desse fluxo resulta que  $\mu(Bx) = 1$ .

Afirmo que isso implica que  $\mu$  está suportada em uma órbita periódica. Com efeito, note que todo  $b \in B = AU$  é da forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}.$$

Portanto, se  $x = g\Gamma \in X$  então

$$u_t b x = \begin{bmatrix} \alpha & \beta + \alpha^{-1}t \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Gamma = \begin{bmatrix} a\alpha & \alpha b + d(\beta + \alpha^{-1}t) \\ c/\alpha & d/\alpha \end{bmatrix} \Gamma$$

Pelo Teorema de Poincaré temos que existe  $t$  arbitrariamente grande tal que  $u_t b x \sim b x$ . Como  $\Gamma$  é discreto isso só é possível se  $u_t b g \Gamma = b g \Gamma$  e portanto a órbita de  $x$  é periódica. Como  $x$  é um ponto típico para a medida  $\mu$  isso prova que  $\mu$  está suportada numa órbita periódica, com queria demonstrar.  $\square$

**5.4. Calculando a deriva.** De agora em diante vamos assumir que  $\mu$  não está suportada em uma órbita periódica. Aplicando o Lema 5.2 obtemos uma sequência  $g_n \rightarrow \text{id}$ , com  $g_n \notin B$  tal que  $g_n K \cap K \neq \emptyset$ . Por simplicidade de notação vamos escrever  $g = g_n$  deixar subentendido que  $g$  poder ser tomado arbitrariamente próximo à identidade. Fixamos também um ponto  $x \in K$  tal que  $g x \in K$ . Escrevendo

$$g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

temos que  $\alpha, \delta \rightarrow 1$  e  $\beta, \gamma \rightarrow 0$ . Como  $g \notin B$  podemos assumir sem perda de generalidade que  $\gamma > 0$ . Com isso podemos definir  $\lambda = \gamma^{-1}$ .

Lembre que nosso objetivo é demonstrar (5.1), onde  $a \in A$ . Para facilitar as contas vamos escrever

$$a = \begin{bmatrix} 1 + s_0 & 0 \\ 0 & (1 + s_0)^{-1} \end{bmatrix}$$

**5.4.1. Funções auxiliares.** Dado  $s \in \mathbb{R}$  as seguintes funções de  $s$  irão jogar um papel importante no argumento.

$$\hat{D}(s) = \begin{bmatrix} \alpha + s & 0 \\ \gamma & (\alpha + s)^{-1} \end{bmatrix}, \quad D(s) = \begin{bmatrix} \alpha + s & 0 \\ 0 & (\alpha + s)^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\Delta(s) = \frac{\beta\gamma + \delta s}{\alpha + s} \quad \text{e} \quad d(s) = \frac{s}{1 + s}.$$

Em particular,  $a = D(s_0)$ . Além disso, observe que  $s_0 > 0$ . O lema a seguir decorre de um cálculo matricial direto que será deixado a cargo do leitor.

**Lema 5.3.** *Vale que  $u_{s\lambda} g = \hat{D}(s) u_{\lambda\Delta(s)}$ .*

*Observação 5.4.* Tomando  $g$  suficientemente próximo da  $\text{id}$  temos que

$$\hat{D}(s) \rightarrow D(s) \quad \text{e} \quad \Delta(s) \rightarrow d(s).$$

Além disso, a convergência acima é uniforme na topologia  $C^1$  em restrição ao intervalo  $[s_0 - 1, s_0 + 1]$ . No que se segue iremos escolher  $s_1 < s_0 < s_2$  com  $[s_1, s_2] \subset [s_0 - 1, s_0 + 1]$ .

**5.4.2. Escolha das constantes.** Como  $\varphi \in C_c^0(X)$  é contínua de suporte compacto podemos tomar uma constante  $C_1 > 1$  tal que  $C_1 > \sup\{|\varphi^a(x)|; x \in X\}$ . Seja  $\varepsilon > 0$  escolhido arbitrariamente. Vamos obter (5.1) estabelecendo

$$(5.2) \quad \left| \int \varphi d\mu - \int \varphi^a d\mu \right| < \varepsilon.$$

Para isso, vamos determinar o quão perto da  $\text{id}$  o elemento  $g \notin B$  tem que ser escolhido.

Observe inicialmente que como  $s_0 > 0$  existem  $\xi_0$  e  $d_0$  tais que se escolhermos  $s_1 < s_0 < s_2$  com  $s_2 - s_1 < \xi_0$  então

$$(5.3) \quad d'(s) \geq d_0 > 0$$

**Lema 5.5.** *Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\xi_1 > 0$  tal que se  $d(g, \text{id}) < \xi_1$  e  $s_2 - s_1 < \xi_1$  então*

$$\left| \frac{d'(t)}{\Delta'(s)} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{5C_1},$$

para todos  $s, t \in [s_1, s_2]$ .

*Demonstração.* O lema segue diretamente da observação (5.4) e de (5.3): temos que  $\Delta'(s) > 0$  se  $s$  está suficientemente perto de  $s_0$ . Logo, considerando a função contínua  $(t, s) \mapsto \Phi(s, t) \stackrel{\text{def}}{=} d'(s)/d'(t)$  temos que  $\Phi(s_0, s_0) = 1$  e  $(t, s) \mapsto d'(t)/\Delta'(s)$  converge uniformemente à  $\Phi(t, s)$  quando  $g \rightarrow \text{id}$ .  $\square$

**Lema 5.6.** *Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\xi_2 > 0$  tal que se  $d(g, \text{id}) < \xi_2$  e  $s_2 - s_1 < \xi_2$  então*

$$\|\varphi^{\hat{D}(s)} - \varphi^a\|_{C^0} < \frac{\varepsilon}{5},$$

para todo  $s \in [s_1, s_2]$  onde  $\varphi^{\hat{D}(s)}(x) = \varphi(\hat{D}(s)x)$ .

*Demonstração.* Como  $\hat{D}(s) \rightarrow D(s)$  uniformemente, como  $D(s_0) = a$  e como  $\varphi$  é uniformemente contínua o lema segue.  $\square$

De agora em diante fixamos  $0 < \xi_3 < \min\{\xi_0, \xi_1, \xi_2\}$  e escolhermos  $s_1 < s_0 < s_2$  com  $s_2 - s_1 = \xi_3$ . Com esta escolha vamos definir duas constantes que vão jogar um papel importante no controle da deriva da parametrização. Sejam  $\sigma_j = d(s_j)$ .

Com isso, definimos, para cada  $x \in K$  uma nova função auxiliar  $\psi : [\sigma_1, \sigma_2] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\psi(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varphi^a(u_{\lambda\sigma}x)}{|\Delta'(\Delta^{-1}(\sigma))|}.$$

**Lema 5.7.** *Existem constantes  $0 < \xi_4 < \min\{\xi_1, \xi_2\}$  e  $C_2 > C_1$  tais que  $\|\psi\|_{C^0} < C_2$ , para todo  $x \in K$  e para todo  $d(g, \text{id}) < \xi_4$ .*

*Demonstração.* Como  $\Delta \rightarrow d$  na topologia  $C^1$  segue de (5.3) que o denominador na definição de  $\psi$  é sempre positivo e afastado de 0 de maneira uniforme sempre  $s$  está suficientemente perto de  $s_0$ . Pela escolha de  $\xi_3$  isto limita a norma  $C^0$  de  $\psi$  por um múltiplo da norma  $C^0$  de  $\varphi$ .  $\square$

*Observação 5.8.* O mesmo argumento usado na demonstração nos permite estender o domínio onde  $\psi$  é bem definida. Em particular, podemos assumir que  $\psi : [\Delta(s_1), \Delta(s_2)] \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definida.

Finalmente, para completar a escolha de constantes seja  $0 < \xi_5 < \xi_4$  tal que se  $d(g, \text{id}) < \xi_5$  então

$$(5.4) \quad 2C_2\|\Delta - d\|_{C^0} < 0.2\varepsilon\xi_3.$$

**5.5. As quatro estimativas.** Vamos obter (5.2) por um argumento de interpolação que vai no espírito do que foi descrito durante o início desta seção.

5.5.1. *Etapa 1: um lema de reparametrização.* Vamos descrever aqui um lema geral sobre convergência de médias temporais ao longo reparametrizações lineares de trajetórias por um fluxo.

**Lema 5.9.** *Sejam  $(X, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  um fluxo tal que o sistema  $(\phi, \mu)$  é ergódico. Então, dada  $\varphi \in L^1(\mu)$ , para  $\mu$ -quase todo ponto  $x \in X$  dados  $s_1 < s_2$  vale que*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi(\phi_{t\lambda}(x)) dt = \int \varphi d\mu.$$

Além disso, se para conjuntos  $K \subset X$  e  $F \subset L^1(\mu)$  as médias de Birkhoff convergem uniformemente à média espacial para  $x \in K$  e  $\varphi \in F$  então o limite acima também é uniforme restrito a  $K$  e a  $F$ .

*Demonstração.* Fazendo a mudança de variável  $r = \lambda t$  vem que

$$\int_{s_1}^{s_2} \varphi(\phi_{t\lambda}(x)) dt = \frac{1}{\lambda} \int_{s_1\lambda}^{s_2\lambda} \varphi(\phi_r(x)) dr.$$

Por simplicidade denote  $\mu(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \int \varphi d\mu$ . Como

$$\frac{1}{\lambda} \int_{s_1\lambda}^{s_2\lambda} \varphi(\phi_r(x)) dr = \frac{s_2}{s_2\lambda} \int_0^{s_2\lambda} \varphi(\phi_r(x)) dr - \frac{s_1}{s_1\lambda} \int_0^{s_1\lambda} \varphi(\phi_r(x)) dr$$

obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{s_1}^{s_2} \varphi(\phi_{t\lambda}(x)) dt = s_2\mu(\varphi) - s_1\mu(\varphi),$$

que é a fórmula desejada. A afirmação sobre a uniformemente da convergência segue também do mesmo argumento.  $\square$

Aplicando o resultado anterior no contexto em que estamos obtemos

**Corolário 5.10.** *Existe  $0 < \xi_6 < \xi_5$  tal que se  $d(g, \text{id}) < \xi_6$  então*

$$\left| \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi(u_{s\lambda} g x) ds - \int \varphi d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\left| \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi^a(u_{\sigma\lambda} g x) d\sigma - \int \varphi^a d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{5}$$

5.5.2. *Etapa 2: comparando médias temporais sem a deriva na parametrização.* O lema a seguir segue diretamente dos Lemas 5.3 e Lema 5.6.

**Lema 5.11.**  $\left| \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi(u_{s\lambda} g x) ds - \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi^a(u_{\lambda\Delta(s)} x) ds \right| < \frac{\varepsilon}{5}$

5.5.3. *Etapa 3: aproximando a deriva na parametrização.* Agora vamos considerar a média temporal com a deriva na parametrização igual  $\Delta(s)$ .

**Lema 5.12.**  $\left| \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{s_1}^{s_2} \varphi^a(u_{\lambda\Delta(s)} x) ds - \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\varphi^a(u_{\lambda\sigma} x)}{|\Delta'(\Delta^{-1}(\sigma))|} d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{5}$

*Demonstração.* Fazendo a mudança de variável  $\sigma = \Delta(s)$  obtemos

$$\int_{s_1}^{s_2} \varphi^a(u_{\lambda\Delta(s)} x) ds = \int_{\Delta(s_1)}^{\Delta(s_2)} \frac{\varphi^a(u_{\lambda\sigma} x)}{|\Delta'(\Delta^{-1}(\sigma))|} d\sigma.$$

Observe que o integrando do lado direito é a função  $\psi(\sigma)$  apresentada acima (veja a Observação 5.8). Portanto nosso objetivo é estimar

$$\left| \int_{\Delta(s_1)}^{\Delta(s_2)} \psi(\sigma) d\sigma - \int_{d(s_1)}^{d(s_2)} \psi(\sigma) d\sigma \right|.$$

Como  $\Delta \rightarrow d$ , usando (5.4) a quantidade acima pode ser estimada por

$$\begin{aligned} &\leq |\Delta(s_1) - d(s_1)| \|\psi\|_{C^0} + |\Delta(s_2) - d(s_2)| \|\psi\|_{C^0} \\ &< 2\|\Delta - d\|_{C^0} \|\psi\|_{C^0} < 0.2\varepsilon\xi_3. \end{aligned}$$

Como  $\xi_3 = s_2 - s_1$  o resultado segue.  $\square$

5.5.4. *Etapa 4: comparando a média temporal com as duas derivas.* Agora vamos estimar a média do observável  $\varphi^a$ , o qual leva em conta a deriva transversal, considerando também a deriva da parametrização.

**Lema 5.13.**  $\left| \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\varphi^a(u_{\lambda\sigma}x)}{|\Delta'(\Delta^{-1}(\sigma))|} d\sigma - \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi^a(u_{\lambda\sigma}x) d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{5}.$

*Demonstração.* Usando o teorema do valor médio temos  $t \in [s_1, s_2]$  tal que

$$\sigma_2 - \sigma_1 = d'(t)(s_2 - s_1).$$

Logo, se escrevermos  $\sigma = \Delta(s)$  então

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma_1 - \Delta'(\Delta^{-1}(\sigma))(s_2 - s_1)|}{|\Delta'(\Delta^{-1}(\sigma))|} = \left| \frac{d'(t)}{\Delta'(s)} - 1 \right| (s_2 - s_1).$$

Portanto, aplicando o Lema 5.5

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{s_2 - s_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\varphi^a(u_{\lambda\sigma}x)}{|\Delta'(\Delta^{-1}(\sigma))|} d\sigma - \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varphi^a(u_{\lambda\sigma}x) d\sigma \right| \\ &\leq \frac{1}{(s_2 - s_1)(\sigma_2 - \sigma_1)} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left| \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{|\Delta'(\Delta^{-1}(\sigma))|} \varphi^a(u_{\lambda\sigma}x) - (s_2 - s_1) \varphi^a(u_{\lambda\sigma}x) \right| d\sigma \\ &= \frac{1}{(s_2 - s_1)(\sigma_2 - \sigma_1)} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |\varphi^a(u_{\lambda\sigma}x)| \frac{|\sigma_2 - \sigma_1 - \Delta'(\Delta^{-1}(\sigma))(s_2 - s_1)|}{|\Delta'(\Delta^{-1}(\sigma))|} d\sigma \\ &\leq \frac{1}{(s_2 - s_1)(\sigma_2 - \sigma_1)} \|\varphi\|_{C^0} \frac{\varepsilon}{5C_1} (s_2 - s_1)(\sigma_2 - \sigma_1) \\ &< \frac{\varepsilon}{5}. \end{aligned} \quad \square$$

5.5.5. *Prova da Proposição 4.1.* Combinando o Corolário 5.10 com os Lemas 5.11, 5.12 e 5.13 obtemos imediatamente (5.2). Como  $\varepsilon$  é arbitrário isso implica (5.1) e demonstra que a medida  $\mu$  é invariante pelo fluxo  $\phi^a$ .  $\square$

#### AGRADECIMENTOS

Além das notas [1], segui as notas e aula do curso de Dinâmica Homogênea de Rafal Potrie na UDELAR em 2020. Agradeço ao Rafael pelas discussões naquela ocasião sobre o Teorema de Ratner. Este texto também se beneficiou de discussões com Plinio Murillo, Xuan Zhang, Davi Obata, Sébastien Alvarez e Martin Leguil.

## REFERÊNCIAS

- [1] Yves Benoist. Réseaux des groupes de lie. *Notes de cours de*, 2, 2008.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA, UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

*Current address:* Rua Professor Marcos Waldemar de Freitas Reis, s/n, Bloco H - Campus do  
Gragoatá São Domingos- Niterói - RJ - Brazil CEP 24.210-201

*Email address:* [brunosantiago@id.uff.br](mailto:brunosantiago@id.uff.br)