Universidade Federal Fluminense

O argumento de transversalidade para continuidade absoluta de medidas

Luis Gustavo Valente Vazquez

Niterói

Setembro 2024

O argumento de transversalidade para continuidade absoluta de medidas

Luis Gustavo Valente Vazquez

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Bruno Santiago (UFF)

Niterói
Setembro 2024

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

V393a Vazquez, Luis Gustavo Valente
O argumento de transversalidade para continuidade absoluta de medidas / Luis Gustavo Valente Vazquez. - 2024.
83 f.

Orientador: Bruno Rodrigues Santiago.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, Niterói, 2024.

1. Sistemas Dinâmicos. 2. Teoria Ergódica. 3. Endomorfismos de Anosov. 4. Medidas Físicas. 5. Produção intelectual. I. Santiago, Bruno Rodrigues, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

Dissertação de Mestrado da Universidade Federal Fluminense

por

Luis Gustavo Valente Vazquez

apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requesito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Título da tese:

O argumento de transversalidade para continuidade absoluta de medidas

---

Defendida publicamente em 11 de setembro de 2024.

Diante da banca examinadora composta por:

Bruno Santiago	UFF	Orientador
Davi Obata	BYU	Examinador
Martin Andersson	UFF	Examinador

DECLARAÇÃO DE CIÊNCIA E CONCORDÂNCIA DO(A) ORIENTADOR(A)

Autor(a) da Dissertação: Luis Gustavo Valente Vazquez
Data da defesa: 11/09/2024
Orientadores: Bruno Santiago

Para os devidos fins, declaro **estar ciente** do conteúdo desta **versão corrigida** elaborada em atenção às sugestões dos membros da banca examinadora na sessão de defesa do trabalho, manifestando-me **favoravelmente** ao seu encaminhamento e publicação no **Repositório Institucional da UFF**.

Niterói, 11/09/2024.

Documento assinado digitalmente
gov.br
BRUNO RODRIGUES SANTIAGO
Data: 03/12/2024 09:42:55-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Nome do orientador(a)

AGRADECIMENTOS

Se escrevo estas linhas é porque tive sorte de ter encontrado pessoas que de uma forma ou de outra me ajudaram ao longo desta caminhada. Os agradecimentos que aqui escrevo é uma tentativa de transmitir a imensidão da gratidão que tenho por todos.

Primeiramente preciso agradecer ao Bruno, não é exagero dizer que sem ele não estaria realizando mais uma etapa de um sonho que ainda continua distante. Suas aulas, seu entusiasmo para falar de matemática e sua paciência beirando o infinito foram fundamentais. A sua dedicação e a sua visão de fazer matemática compuseram o aluno que sou hoje.

Também agradeço à todos os professores que contribuíram desde da graduação para minha formação. Em particular, agradeço àqueles que ministraram cursos que foram marcantes para mim: Luiz Viana, Nivaldo Medeiros, Isabel Rios, Alejandro Kocsard, Pablo Guarino, e é claro o próprio Bruno.

Preciso fazer um agradecimento separado ao professor Pablo Guarino. As conversas que tive com ele foram essenciais, sempre que eu precisava de uma segunda opinião eu sabia a quem recorrer. Muito obrigado pelo excelente e inédito curso de Dinâmica Complexa ministrado na UFF, além da sua disponibilidade incrível para falar de matemática. E o mais importante, muito obrigado pela criação dos seminários q.t.h.

Aos meus colegas da UFF e aos que não estão mais lá o meu muito obrigado, em especial aos amigos Odylo Abdalla e Gustavo Kayk pelas discussões matemáticas e pelos papos jogado fora. Um agradecimento especial à todos da sala 408.

Em relação à parte burocrática gostaria de fazer um agradecimento especial às secretárias do PGMAT-UFF, Tayene Sena e Jacqueline Garcez. Sem os seus esforços em resolver todos os trâmites em tempo recorde teria sido impossível realizar o mestrado. Também é necessário fazer um agradecimento especial à Antonia Perez, sem ela o quarto andar seria um caos completo. Muito obrigado por sempre deixar as salas brilhando e com isso deixando um ambiente impecável para todos. Agradeço também ao coordenador da pós Javier Ribón.

É claro que não pode faltar a base. Sem o apoio familiar nem na faculdade teria entrado. Meu profundo agradecimento aos meus pais, Luis Jesus e Ana Maria, e à minha irmã Letícia. Seus incansáveis esforços não foram em vão. Muito obrigado por estarem sempre ao meu lado, me apoiando da melhor forma e acreditando em mim, amo vocês. Agradeço também aos meus amigos que trago da escola e que me acompanham até hoje: Rangel, Diego, Caio, Thiago, Thor e Jaffar.

Por fim, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro via bolsa de mestrado que iniciou-se no período de 01/09/2022 a 28/02/2023 (processo de número: 88887.714127/2022-00) e posteriormente vigente de 01/03/2023 a 31/08/2024 (processo de número: 88887.815255/2023-00). O apoio desta agência de fomento foi essencial para complementar a minha formação, caso contrário nada disso seria possível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

No vasto ramo da Teoria Ergódica as medidas físicas e SRB são objetos centrais no estudo do comportamento caótico de sistemas dinâmicos. A questão da regularidade dessas medidas possui papel fundamental no desenvolvimento da teoria. Desse modo os sistemas que admitem medidas físicas e SRB ganham particular interesse na área de Sistemas Dinâmicos. Com isso ter conhecimento de técnicas que permitem explorar a existência e a regularidade de tais medidas é crucial. Objetivo principal deste trabalho é compreender o argumento de transversalidade de Tsujii [Tsu01] que garante a regularidade da medida física para uma classe de endomorfismos de Anosov do tipo produto torto. O argumento demonstra que havendo suficiente transversalidade entre as variedades instáveis, a medida física tem que ser absolutamente contínua, e é inspirado pela solução de Peres e Solomyak [PS96] para um problema de Erdös em teoria geométrica da medida, as chamadas convoluções de Bernoulli.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos; Teoria Ergódica; Endomorfismos de Anosov; Produto Torto; Medidas Físicas.

ABSTRACT

In the vast field of Ergodic Theory, physical and SRB measures are central objects in the study of the chaotic behavior of dynamical systems. The question of the regularity of these measures plays a fundamental role in the development of the theory. Thus, systems that admit physical and SRB measures gain particular interest in the area of Dynamical Systems. Therefore, having knowledge of techniques that allow exploring the existence and regularity of such measures is crucial. The main objective of this work is to understand Tsujii's transversality argument [Tsu01] which guarantees the regularity of the physical measure for a class of skew-product Anosov endomorphisms. The argument demonstrates that if there is sufficient transversality between the unstable manifolds, the physical measure must be absolutely continuous, and it is inspired by Peres and Solomyak's solution [PS96] to an Erdös problem in geometric measure theory, the so-called Bernoulli convolutions.

Keywords: Dynamical Systems; Ergodic Theory; Anosov Endomorphisms; Skew-Product; Physical Measures.

List of Figures

Contents

CHAPTER 1

Introdução

Nesta dissertação iremos considerar um sistema dinâmico sendo as iterações sucessivas de um mesmo mapa f definido em um espaço métrico. A órbita de um ponto pelo sistema f será o conjunto formado por cada iterada de f nesse ponto. De modo geral, o problema que norteia a área de sistemas dinâmicos é o de descrever o comportamento assintótico das órbitas.

Estamos interessados em saber para onde os pontos estão indo, se essa sequência de pontos possui um ponto de acumulação. Uma outra questão a saber é se existe recorrência no sistema, isto é, existe algum período de tempo no qual a órbita retorna ao ponto inicial ou pelo menos próximo a ele ? Os pontos recorrentes são especiais e eles são o começo de partida para compreender o problema central de sistemas dinâmicos. Para conhecimentos gerais sobre sistemas dinâmicos sugerimos consultar [KKH95] e [BS02].

1.1 Motivação

Para tentar compreender o comportamento das órbitas de um sistema dinâmico ao longo do tempo, existem diferentes pontos de vistas que podem ser adotados e juntamente a eles existem um arcabouço de técnicas a serem usadas na tentativa de resolver este problema. Nas duas subseções vamos apresentar dois modos de ver que a princípio parecem ser distintos.

Hiperbolicidade

Nesta seção veremos em particular os sistemas uniformemente hiperbólicos os quais já são bem conhecidos tanto do ponto de vista topológico quanto do ponto de vista ergódico. Dentre as várias propriedades que estão presentes nesta teoria destaquemos três que são cruciais: decomposição espectral, estabilidade e medida física invariante. Deixemos a última propriedade para depois.

Seja M uma variedade compacta e $f : M \to M$ um difeomorfismo. Um subconjunto $\Lambda \subset M$ compacto invariante é um *conjunto hiperbólico* para f se o fibrado tangente de M sobre Λ admite uma decomposição contínua $T_\Lambda M = E^u \oplus E^s$ invariante pela derivada e tal que

$$||Df^{-1}|_{E^u}|| \leq \lambda \text{ e } ||Df|_{E^s}|| \leq \lambda,$$

para alguma constante $\lambda < 1$ e para alguma métrica riemanniana.

No estudo do comportamento das órbitas os pontos que possuem recorrência merecem destaque. Um ponto $x \in M$ é *não errante* para f se para toda vizinhança U de x existe um $n \geq 1$ tal que

$$f^n(U) \cap U \neq \emptyset.$$

Denotamos o conjunto de todos os pontos não-errantes de f por $\Omega(f)$.

Com isso, o difeomorfismo f é *uniformemente hiperbólico* ou satisfaz *Axioma A* se: $\Omega(f)$ é hiperbólico para f e $\Omega(f)$ é igual ao fecho do conjunto dos pontos periódicos de f. Para obtermos um dos principais teoremas da dinâmica hiperbólica precisamos de mais duas definições.

Um conjunto f-invariante é *transitivo* se ele contém alguma órbita densa. Por fim, dizemos que um conjunto Λ f-invariante é *isolado* se existe uma vizinhança U de Λ tal que

$$\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U).$$

Dito de outra forma, Λ coincide com o conjunto dos pontos cuja órbita permanece em U para todo n.

A seguir, vejamos um dos teoremas cruciais para o estudo das órbitas do sistema do ponto de vista da dinâmica hiperbólica conhecido como Teorema da Decomposição Espectral.

Teorema 1. *Seja f um difeomorfismo uniformemente hiperbólico e $\Omega(f)$ o conjunto não-errante. Então $\Omega(f)$ se decompõe numa união finita disjunta*

$$\Omega(f) = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_N$$

de conjuntos Λ_i f-invariantes transitivos que são compactos e isolados. Mais ainda, os α-limite e ω-limite de toda órbita estão contidas em algum Λ_i.

Os conjuntos Λ_i obtidos no teorema acima são chamados de *peças básicas*.

Para a prova do teorema acima e para mais informações sobre dinâmica hiperbólica consulte [Wen16].

Ergodicidade

O estudo das órbitas sob o ponto de vista da Teoria Ergódica é feito de modo estatístico. Para entendermos melhor essa afirmação precisamos definir o principal objeto de estudo da teoria: sistemas dinâmicos que preservam medida.

Diferentemente da estrutura do sistema da seção anterior, agora vamos considerar $(M, \mathcal{B}, \mu)$ sendo um espaço de medida e seja $f : M \to M$ uma função mensurável. Dizemos que a medida μ é *invariante* por f se

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}E)$$

para todo conjunto $E \subset M$ mensurável.

Cabe observar que ao adicionarmos a estrutura de teoria da medida ao sistema, continuamos tendo uma configuração bem geral por causa do seguinte teorema.

Teorema 2. *Seja $f : M \to M$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Então existe pelo menos uma medida de probabilidade em M que é invariante por f.*

Ou seja, temos que as medidas invariantes existem em abundância. Dentre elas existem algumas que se destacam por descreverem melhor a trajetória das órbitas do sistema. Para falar dessas tais medidas precisamos entender as propriedades que as tornam importantes. Antes vejamos, assim como vimos na seção anterior, um resultado sobre recorrência conhecido como Teorema de Recorrência de Poincaré.

Teorema 3. *Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e seja μ uma medida finita invariante por f. Seja $E \subset M$ qualquer conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$. Então para μ-quase todo ponto $x \in E$ existem infinitos valores de n para os quais $f^n(x) \in E$.*

Dito de outro modo, dada qualquer medida invariante finita, quase todo ponto de um conjunto mensurável qualquer E regressa a E um número infinito de vezes.

Para continuar analisando as órbitas de f considere um conjunto mensurável $E \subset M$ com medida positiva e um ponto $x \in M$ qualquer. Mais concretamente, vamos analisar o conjunto

$$\left\{j \geq 0 : f^j(x) \in E\right\}.$$

Pelo teorema de recorrência de Poincaré sabemos que este conjunto é infinito para quase todo $x \in E$. O próximo teorema irá nos fornecer informações mais precisas sobre o comportamento assintótico das órbitas.

Teorema 4. *Seja $f : M \to M$ uma transformação mensurável e seja μ uma probabilidade invariante por f. Dada qualquer função integrável $\phi : M \to \mathbb{R}$, o limite*

$$\tilde{\phi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \phi\left(f^j(x)\right)$$

existe em μ-quase todo ponto $x \in M$. Além disso, a função $\tilde{\phi}$ definida desta forma é integrável e satisfaz

$$\int \tilde{\phi}(x) d\mu(x) = \int \phi(x) d\mu(x).$$

Note que o teorema que acabamos de enunciar tem um teor quantitativo. O ideal para o cálculo do tempo médio de visita seria o limite convergir para a integral da função $\tilde{\phi}$. De fato isso se torna verdade quando a probabilidade μ invariante for ergódica.

Formalmente dizemos que uma medida μ é *ergódica* se para toda função integrável $\phi : M \to \mathbb{R}$ tem-se

$$\tilde{\phi}(x) = \int \phi(x) d\mu$$

para μ-quase todo ponto.

Com a ergodicidade em mãos somos capazes de efetivamente calcular o tempo médio em que as órbitas do ponto x visitam partes do conjunto M. Uma das consequências dinâmicas vinda da propriedade da medida ser ergódica é a garantia de que quase toda órbita é densa no suporte da medida.

Teorema 5. *Seja $f : M \to M$ uma aplicação mensurável num espaço topológico M com base enumerável de abertos e seja μ uma probabilidade ergódica para f. Então a órbita $\{f^n(x) : n \geq 0\}$ de μ-quase todo ponto $x \in M$ é densa no suporte de μ.*

Para as demonstrações dos resultados acima ver [VO14] ou [Dan12].

1.2 Conjectura de Palis

Depois de apresentado os dois pontos de vistas, vamos ver como eles se concectam resultando em uma das famosas conjecturas de Palis.

Uma peça básica Λ_i é um *atrator hiperbólico* se

$$W^s(\Lambda_i) = \{x \in M : \omega(x) \in \Lambda_i\}$$

contém uma vizinhança de Λ_i. Isso implica que o conjunto estável $W^s(\Lambda_i)$ será a bacia do atrator Λ_i.

Uma pergunta que surge é: o que podemos dizer quando o nosso sistema é Axioma A ? Nesse caso, se o sistema é Axioma A de classe C^2 temos que

$$\Lambda_i \textit{ é atrator} \iff m(W^s(\Lambda_i)) > 0,$$

onde m é a medida de Lebesgue, que é o mesmo que dizer que a bacia do atrator precisa ter medida de Lebesgue positiva. Logo ao tomarmos a união das bacias das peças básicas, $B(\Lambda_i)$ formam um subconjunto de M com medida de Lebesgue total.

O primeiro resultado que une a hiperbolicidade com teoria ergódica garante a existência e unicidade de uma medida de probabilidade invariante e ergódica.

Teorema 6. *Todo atrator Λ de um difeomorfismo uniformemente hiperbólico C^2 suporta uma única medida de probabilidade invariante μ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) = \int \phi d\mu$$

para todo função contínua ϕ e m- quase todo ponto $x \in B(\Lambda)$.

O teorema acima está nos dizendo que não importa o quão complicado seja a dinâmica do sistema, o comportamento da maioria das órbitas que estão na bacia de um atrator hiperbólico é completamente determinado de maneira estatística. As medidas obtidas do teorema acima são chamadas de medidas físicas.

Observe que a propriedade garantida pelo teorema 6 nos diz que a medida μ pode ser explicitamente calculada. Ou seja ao escolhermos aleatoriamente uma órbita dentro da bacia do atrator, podemos calcular quanto tempo a órbita de um ponto passou em um subconjunto $V \subset M$ para m-quase todo ponto $x \in B(\Lambda)$. Logo chamamos μ de medida física, pois podemos "enxergar" as órbitas de x passando por algum conjunto de M.

Da mesma maneira que definimos um *atrator* hiperbólico podemos definir um atrator de modo geral. Seja M uma variedade C^∞ e $f : M \to M$ um difeomorfismo, $\Lambda \subset M$ é um atrator se é um conjunto invariante, transitivo e se sua bacia de atração, $B(\Lambda)$ possui medida de Lebesgue positiva.

Seja μ uma probabilidade invariante por f em M. Dizemos que μ é uma *medida física* se a sua bacia

$$B(\mu) = \left\{ x \in M : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi(f^j(x)) = \int \phi d\mu, \forall \phi : M \to \mathbb{R}\ C^0 \right\}$$

possui medida de Lebesgue positiva.

Como tínhamos comentado anteriormente dentro do conjunto das medidas invariantes temos aquelas que se destacam por descreverem com mais precisão o comportamento das órbitas. É o caso das medidas físicas, note que, pela definição, medidas que são absolutamente contínuas e ergódicas serão sempre medidas físicas.

No início do século XXI o matemático brasileiro Jacob Palis listou algumas conjecturas numa tentativa de termos uma compreensão global do comportamento dos sistemas dinâmicos.

Conjectura 7. *Existe um subconjunto denso $\mathcal{D}$ de classe C^r, $r \geq 1$, de um sistema dinâmico numa variedade compacta tal que existe um número finito de atratores cjuas as bacias cobrem Lebesgue quae toda a variedade.*

Conjectura 8. *Para qualquer elemento de $\mathcal{D}$ todos os atratores suportam medidas físicas.*

Conjectura 9. *Dado um elemento de $\mathcal{D}$ e qualquer atrator, então para quase toda perturbação pequena C^r ao longo de famílias de k-parâmetros genérica existe um conjunto finito de atratores cujas bacias cobrem a maior parte da bacia original, e esses atratores também suportam medidas físicas.*

Pelo o que foi discutido até o momento, a pergunta: quais sistemas admitem medida física ? torna-se de certo modo relevante para o estudo da descrição das órbitas do sistema. Entretanto, podemos fazer um questionamento mais simples: quais sistemas conservativos são ergódicos ? Mais ainda, quais sistemas admitem uma medida invariante que é absolutamente contínua?

1.3 Endomorfismos do tipo produto torto

Os mapas dados pelo Tsujii em [Tsu01] são definidos da seguinte maneira. Seja $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ um cilindro e defina a transformação $T : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ sendo

$$T(x, y) = (\ell x, \lambda y + f(x)),$$

onde $\ell \geq 2$, $0 < \lambda < 1$ e $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2.

Segue-se da própria definição de T que na base temos uma expansão por um fator ℓ e nas retas verticais temos contração por um fator λ juntamente com uma translação por uma função f.

Esta transformação pode ser vista como uma classe de mapas que generalizam as transformações do padeiro generalizada. Uma particularidade destas transformações do padeiro generalizada é a sobreposição e deslizamento que obtemos ao construirmos o seu gráfico e é por meio dele que prova-se que o sistema admite uma medida ergódica absolutamente contínua.

O Tsujii prova o seguinte teorema.

Teorema 10. *Existem parâmetros $\lambda \in (0, 1), \ell \geq 2$ e $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ C^2 tal que a transformação T possui uma única medida física μ que é absolutamente contínua com respeito a Lebesgue em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Mais ainda, existe um conjunto aberto não-vazio $\mathcal{T}$ de parâmetros (λ, f) no qual μ é absolutamente contínua.*

A prova da existência e unicidade da medida física segue-se da construção de uma semi-conjugação com o um produto torto auxiliar (ver capítulo 4). O ponto crucial é a suavidade da medida μ, para isso iremos analisar como a sobreposição e deslizamento dos gráficos de T influenciam na regularidade de μ.

De maneira mais precisa os gráficos de T serão as variedades instáveis. A prova da regularidade μ se baseia na ideia de como a transversalidade das variedades instáveis dá pista para a sua continuidade absoluta, mais ainda essa transversalidade deve ocorrer para a maioria dos gráficos $\mathcal{S}(x, a)$.

A condição geométrica de (ε, δ)-transversalidade, que será definida nos próximos capítulos, foi inspirada no mesmo tipo de transversalidade usada para resolver o problema das convoluções de Bernoulli em [PS96]. Para mostrar que o conjunto $\mathcal{T}$ é aberto não-vazio, será necessário definir um "condição de transversalidade de Tsujii" e juntamente com um argumento padrão de compacidade para mostrar que a condição é semicontínua superiormente.

Os capítulos desta dissertação foram organizados de tal que modo que pudesse ficar claro como os artigos de Peres-Solomyak e Tsujii se conectam. No capítulo 2 foram apresentadas técnicas da teoria da geométrica da medida, além de dois critérios importantes que garantem a continuidade absoluta da medida a depender da situação.

No capítulo 3 é apresentado o problema das convoluções de Bernoulli e como a noção geométrica de δ-transversalidade garante a continuidade absoluta da medida em um certo intervalo para o parâmetro envolvido.

No capítulo 4 obtemos a medida física para o sistema T, além disso é uma feita uma análise acerca dos parâmetros ℓ, λ e f para entender em quais casos temos continuidade absoluta com respeito a Lebesgue.

Já no capítulo 5 definimos a (ε, δ)-transversalidade inspirada na δ -transversalidade para garantir a continuidade absoluta da medida μ usando um critério estabelecido no capítulo 2. Além disso, definimos formalmente a "condição de transversalidade de Tsujii" e provamos por completo o teorema 10.

CHAPTER 2

Diferenciabilidade de medidas: critérios para continuidade absoluta

Este capítulo tem como objetivo apresentar dois critérios para continuidade absoluta de medidas, usados por Yuval Peres e Boris Solomyak em [PS96] e por Masato Tsujii em [Tsu01], respectivamente. Apesar de diferentes, ambos vem da Teoria Geométrica da Medida e são baseados na ideia de "tomar a derivada de uma medida em relação à outra".

2.1 Sobre a teoria geométrica da medida

Antes de apresentarmos os Teoremas de Besicovitch e Vitali que serão usados na prova do critério da continuidade absoluta via finitude da derivada, vamos entender melhor a importância de dois conceitos que serão fundamentais para os próximos capítulos: continuidade absoluta e diferenciabilidade de medidas.

Informalmente dizer que uma medida μ é absolutamente contínua com respeito a uma medida ν signifca que μ possui comportamento bem parecido com ν, isto é, em conjuntos nos quais ν é de medida nula, μ também será de medida nula.

Do mesmo modo que a continuidade absoluta é uma relação entre duas medidas, a noção de diferenciabilidade de medidas também é. Ainda sem muito rigor, podemos pensar que uma medida μ é derivável num ponto x com respeito a uma outra medida ν em um aberto E, nesse caso escrevemos $D_\mu(x) = a$, se

$$\frac{\mu(E)}{\nu(E)} \to a$$

quando o $diam(E) \to 0$ e $x \in E$.

Entretanto, a definição de diferenciabilidade acima permite exemplos nos quais μ não é derivável. Para contornar esse problema necessitamos utilizar limites superior e inferior o que justifica a definição 5 da seção 2.2.

Do ponto de vista da Teoria da Medida essas duas noções se conectam de maneira natural ao estudarmos a relação entre a integração com respeito a medida de Lebesgue e a derivada no espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$. Mais precisamente, seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com derivada f' contínua definida para todo $x \in [a, b]$, daí o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) nos diz

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$$

para todo $x \in [a, b]$.

A questão é: será que é possível estender o Teorema Fundamental do Cálculo para um contexto mais geral ? Ou seja, se $f'(x)$ só existisse Lebesgue quase todo ponto $x \in [a, b]$ e fosse Lebesgue integrável, o TFC ainda valeria ?

Uma resposta imediata é que não é possível generalizar o TFC para uma classe mais ampla de funções. Porém, utilizando a continuidade absoluta e diferenciabilidade de medida é possível explorar o problema mais profundamente.

A principal estratégia para resolver o problema é quebrar em outros dois problemas mais simples de serem resolvidos. Para isso é suficiente usar o Teorema de Derivação de Lebesgue que no ambiente $X = \mathbb{R}^k$ e sendo m a medida de Lebesgue e μ uma medida boreliana, nos garante que μ é derivável em m-q.t.p $x \in X$ e $D_\mu(x)$ (definida em m-q.t.p) é m-integrável. Mais ainda, para todo boreliano E vale a decomposição

$$\mu(E) = \mu_s(E) + \int_E D_\mu dm,$$

com μ_s singular a m e $D_{\mu_s} = 0$ em m-q.t.p $x \in X$.

Vejamos como isso se dá na prática. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisfazendo o TFC, então para todo $y \leq x \in [a, b]$ vale

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)dt. \tag{2.1}$$

A expressão (2.1) nos diz que a função f define uma medida μ dado por $\mu([y, x)) = f(x) - f(y)$ e que essa medida é absolutamente contínua com respeito à Lebesgue. Então pelo Teorema de Derivação de Lebesgue,

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \mu([y, x]) \\ &= \mu_s([y, x)) + \int_y^x D_\mu(t)dt \\ &= \mu_s([y, x)) + \int_y^x f'(t)dt \end{aligned}$$

Agora observe que o TFC vale se, e somente se para $y \leq x \in [a, b]$ temos $\mu_s([y, x)) = 0$. Isso é mesmo que a parte singular da medida μ com respeito à medida m ser nula e isso implica que μ é absolutamente contínua com respeito à m.

Portanto para generalizarmos o Teorema Fundamental do Cálculo precisamos resolver dois problemas: classificar as funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ para os quais $f(x) - f(a) := \mu([a, b))$ define uma medida. E o segundo que nos interessa destacar é: dentro da classe de funções do primeiro problema, estabelecer quando f determina uma medida μ absolutamente contínua em relação à Lebesgue. Como vimos isso é o mesmo que dizer que f realiza a tese do Teorema Fundamental do Cálculo. Para uma discussão mais detalhada ver [Cas04]

Agora estamos interessados em enxergar a relação existente entre a continuidade absoluta de medida e diferenciabilidade de medida dentro da Teoria Geométrica da Medida. Uma das preocupações dessa área é o estudo das estruturas geométricas de conjuntos de Borel e medidas de Borel em $\mathbb{R}^k$.

Entretanto esses conjuntos possuem "pequenas irregularidades" tendo medida de Lebesgue nula. Os objetos em questão são diferentes de curvas e superfícies suaves, eles possuem comportamento fractal como por exemplo: conjuntos de Cantor. Em resumo uma parte da Teoria Geométrica da Medida está interessada em estudar as estruturas geométricas de fractais utilizando a Teoria da Medida como ferramenta.

Em Sistemas Dinâmicos os fractais aparecem naturalmente no estudo dos chamados atratores estranhos como conjuntos invariantes, notadamente por sistemas com alguma hiperbolicidade.

Teoremas de recobrimento

Um dos problemas técnicos mais fundamentais na teoria geométrica da medida é sobre controlar o grau de sobreposição de coberturas por conjuntos mensuráveis. Aqui vamos apresentar uma versão elementar e auto-contida do Teorema de Besicovitch (Teorema 12) no caso da reta. Para um tratamento mais detalhado, sugerimos consultar [Mat99].

Definição 11. *Seja $\mathcal{F}$ uma família enumerável de intervalos compactos de $\mathbb{R}$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma* 2-***cadeia*** *se*

(1) Para todo $x \in \mathbb{R}$ vale $\#\{I \in \mathcal{F} : x \in I\} \leq 2$

(2) Para todo $I \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{J \in \mathcal{F}-\{I\}} J$ é desconexo.

Precisamos do seguinte lema que garante que dada uma família finita qualquer de intervalos da reta sempre podemos tomar uma subcobertura que é uma 2-cadeia.

Lema 1. *Dados $J_1, \ldots, J_n$ intervalos tais que $\bigcup_{i=1}^n J_i$ é conexa. Então existem índices $i_1 < \cdots < i_k \in \{1, \ldots, n\}$ tais que*

$$J_{i_1} \cup \cdots \cup J_{i_k} = \bigcup_{i=1}^n J_i$$

e, além disso, a família $\{J_{i_l}\}_{l=1}^k$ é uma 2-cadeia.

Proof. Sejam $J_1, \ldots, J_n \subset \mathbb{R}$ intervalos fechados tais que a união desses intervalos, $\cup_{i=1}^n J_i$, é um conjunto conexo da reta. Considere $J_i = [a_i, b_i]$ de tal modo que $a_{i_1} = \min\{a_i\}$, isto é, o intervalo $J_{i_1} = [a_{i_1}, b_{i_1}]$ é o intervalo mais à esquerda.

Note que se $\cup J_i \subset J_{i_1}$, segue-se da definição de 2-cadeia que obtemos o desejado. Caso contrário, pela conexidade de $\cup J_i$, existe um índice i_2 tal que $b_{i_1} \in \operatorname{int}(J_{i_2})$ e $a_{i_1} < a_{i_2}$. Ou seja, existe um intervalo J_{i_2} intersectando o extremo direito de J_{i_1}.

Pelo mesmo raciocínio que acabamos de ver, se

$$\bigcup J_i \subset J_{i_1} \cup J_{i_2}$$

temos uma 2-cadeia. Caso contrário, existe um i_3 tal que $b_{i_2} \in \operatorname{int}(J_{i_3})$ e $a_{i_2} < a_{i_3}$. Como a coleção $J_1, \ldots, J_n$ é finita, prosseguindo com esse algoritmo obtemos finitos índices i_j com $i_1 < \cdots < i_k \in \{1, \ldots, n\}$ tais que

$$J_{i_1} \cup \cdots \cup J_{i_k}$$

é uma 2-cadeia que cobre todo o intervalo $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n J_i$. □

A ideia da prova do Teorema de Besicovitch que iremos apresentar é utilizar o algoritmo obtido no lema anterior e aplicar indução para concluir que podemos realizar um processo finito infinitas vezes.

Teorema 12. *Dada uma cobertura enumerável de um subconjunto mensurável A de $\mathbb{R}$ por intervalos compactos, existe uma subcobertura que é uma 2-cadeia.*

Proof. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto mensurável. Considere $\{J_\alpha\}$ uma cobertura enumerável de A e seja $\bigcup_{i=1}^{\infty} J_{\alpha_i}$ uma subcobertura de $\{J_\alpha\}$. Tome as n primeiras uniões: $\bigcup_{i=1}^{n} J_{\alpha_i}$. Então pelo Lema anterior sabemos que existem $i_1 < \cdots < i_k \in \{1, \ldots, n\}$ tais que

$$J_{\alpha_{i_1}} \cup \cdots \cup J_{\alpha_{i_k}}$$

é uma 2-cadeia.

Agora considere $\bigcup_{i=1}^{n+1} J_{\alpha_i}$, ainda pelo Lema anterior existem $i_1 < \cdots < i_k < i_{k+1} \in \{1, \ldots, n+1\}$ tais que

$$J_{\alpha_{i_1}} \cup \cdots \cup J_{\alpha_{i_k}} \cup J_{\alpha_{i_{k+1}}}$$

é uma 2-cadeia.

Seguindo indutivamente em n, temos que $\bigcup_{j=1}^{\infty} J_{\alpha_{i_j}}$ é uma 2-cadeia. □

Seja X um espaço métrico e μ uma medida em X. Ao considerar um ponto $x \in X$ e uma bola fechada centrada em x diremos que μ é **localmente finita** se para todo $x \in X$ existe $r > 0$ tal que $\mu(B_r(x))$ é finita. Para as próximas definições lembre que a família de **conjuntos de Borel** em X é a menor σ-álgebra contendo os subconjuntos abertos de X.

Naturalmente μ ser uma **medida de Borel** é dizer que todo conjunto de Borel é μ mensurável. Caso ainda tenhamos que para todo $A \subset X$, A seja um subconjunto de um conjunto de Borel B tal que $\mu(A) = \mu(B)$ então μ será uma **medida regular de Borel**.

Por fim, diremos que uma medida μ é de **Radon** se for uma medida de Borel com as seguintes propriedades: a medida de qualquer compacto $K \subset X$ é finita; se K está contido em qualquer aberto V de X, $\mu(V)$ é o supremo das $\mu(K)$; e caso para qualquer subconjunto A de X tal que $A \subset V$, $\mu(A)$ é o ínfimo de $\mu(V)$.

Do mesmo modo do teorema anterior, o próximo resultado é um caso particular e mais simples só que agora do Teorema de Recobrimento de Vitali para medidas de Radon. A sua versão para medida de Lebesgue e a sua generalização para medidas de Radon pode ser vista em [Mat99].

Teorema 13. *Seja μ uma medida de Radon em $\mathbb{R}$. Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto de Borel mensurável. Seja $\mathcal{F} = \{I_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ uma família de intervalos tal que todo ponto de A é o centro de algum elemento de $\mathcal{F}$ com raio arbitrariamente pequeno, isto é,*

$$\inf\{r > 0 : [a - r, a + r] \in \mathcal{F}\} = 0,$$

para todo $a \in A$. Então, existe uma subfamília enumerável $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{B} = \{I_n\}$ satisfazendo:

(1) $m > n \Rightarrow I_m \cap I_n = \emptyset$

(2) $\mu(A \backslash \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n) = 0$

Proof. Pelo Teorema de Lindeloff podemos assumir que $\mathcal{F}$ é enumerável. Além disso, podemos supor sem perda de generalidade que $\mu(A) > 0$. Inicialmente suponha que A seja limitado.

Como μ é uma medida de Radon existe um aberto U tal que $A \subseteq U$ e

$$\mu(U) \leq (1 + 8^{-1})\mu(A).$$

Pelo Teorema 3 podemos obter duas subfamílias $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ tais que os elementos de cada família $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$, são dois a dois disjuntos e, além disso,

$$A \subseteq \bigcup_{I \in \mathcal{F}_1} I \cup \bigcup_{\hat{I} \in \mathcal{F}_2} \hat{I} \subseteq U.$$

Então

$$\mu(A) \leq \mu(\bigcup_{I \in \mathcal{F}_1} I) + \mu(\bigcup_{\hat{I}_2 \in \mathcal{F}_2} \hat{I}) \leq 2 \max\{\mu(\bigcup I), \mu(\bigcup \hat{I})\}.$$

Seja $\mathcal{F}' \in \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ tal que o máximo acima é assumido em $\mathcal{F}'$. Tomando uma subcobertura finita $\mathcal{F}''$ de $\mathcal{F}'$, se necessário, temos

$$\mu(A) \leq 4\mu(\bigcup_{I'' \in \mathcal{F}''} I'').$$

Agora defina $A_1 = A \backslash \bigcup_{I'' \in \mathcal{F}''} I''$. Então

$$\begin{aligned}
\mu(A_1) &\leq \mu(U \backslash \bigcup_{I'' \in \mathcal{F}''} I'') \\
&= \mu(U) - \mu(\bigcup_{I'' \in \mathcal{F}''} I'') \\
&\leq (1 + 8^{-1})\mu(A) - 4^{-1}\mu(A) \\
&= \lambda\mu(A),
\end{aligned}$$

onde $\lambda = 1 - 8^{-1} < 1$.

Como $A_1 \subseteq \mathbb{R} \backslash \bigcup_{I'' \in \mathcal{F}''} I''$ existe um aberto U_1 tal que

$$A_1 \subseteq U_1 \subseteq \mathbb{R} \backslash \bigcup_{I'' \in \mathcal{F}''} I'' \text{ e } \mu(U_1) \leq (1 + 8^{-1})\mu(A).$$

Repetindo o argumento acima, obtemos uma nova subfamília finita $\mathcal{F}_1'' \subseteq \mathcal{F} \backslash \mathcal{F}''$, formada por intervalos disjuntos e satisfazendo: se $A_2 = A_1 \backslash \bigcup_{I_1'' \in \mathcal{F}_1''} I_1''$, então

$$\mu(A_2) \leq \lambda\mu(A_1) \leq \lambda^2\mu(A).$$

Prosseguindo por indução, obtemos famílias finitas

$$\mathcal{F}_{n+1}'' \subseteq \mathcal{F} \backslash \mathcal{F}_1'' \cup \cdots \cup \mathcal{F}_n''$$

tais que se $A_n = A \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{I_i'' \in \mathcal{F}_i''} I_i''$ então

$$\mu(A_n) \leq \lambda^n \mu(A).$$

Como $0 < \lambda < 1$, isto prova o resultado no caso que A é limitado.

Para o caso geral basta aplicar o caso particular aos conjuntos

$$A \cap [n, n + 1)\,, n \in \mathbb{Z}.$$

Isto completa a demonstração.

$\square$

2.2 Continuidade absoluta via finitude da derivada

Tendo os teoremas de recobrimento em mãos estamos aptos a provar o critério de continuidade absoluta usado por Peres e Solomyak. Vejamos as definições formais de diferenciabilidade de medidas e continuidade absoluta.

Definição 14. *Sejam μ e m medidas de Borel localmente finitas em $\mathbb{R}^n$. As* ***derivadas superior e inferior*** *de μ com respeito a m em $x \in \mathbb{R}^n$ são definidas por:*

$$\overline{D}(\mu, m, x) = \limsup_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{m(B_r(x))}$$

e

$$\underline{D}(\mu, m, x) = \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{m(B_r(x))}.$$

Nos pontos onde os limites existem a derivada de μ é

$$D(\mu, m, x) = \overline{D}(\mu, m, x) = \underline{D}(\mu, m, x).$$

Definição 15. *Sejam μ e m medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que μ é* ***absolutamente contínua*** *com respeito a m se*

$$m(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$$

para todo $A \subset \mathbb{R}^n$. Nesse caso escrevemos $\mu \ll m$.

Vale observar que as definições acima continuam válidas em contextos mais gerais.

Antes de enunciarmos e provarmos o critério serão necessários alguns lemas.

Lema 2. *Sejam μ e m medidas de Radon em $\mathbb{R}$, $0 < t < \infty$ e $A \subset \mathbb{R}$.*

(a) Se $\underline{D}(\mu, m, x) \leq t$ para todo $x \in A$, então $\mu(A) \leq tm(A)$

(b) Se $\overline{D}(\mu, m, x) \geq t$ para todo $x \in A$, então $\mu(A) \geq tm(A)$

Proof. Provaremos apenas a letra (a) já que a letra (b) é análoga. Seja $\varepsilon > 0$, pela definição de medida de Radon podemos encontrar um aberto U tal que $I \subset U$ e

$$m(U) \leq m(I) + \varepsilon. \tag{2.2}$$

Como aplicação do Teorema de Vitali, dados intervalos fechados disjuntos $I_i \subset U$ tais que

$$\mu(I_i) \leq (t + \varepsilon)m(I_i) \text{ e } \mu(I - \bigcup I_i) = 0. \tag{2.3}$$

Então

$$\mu(I - \bigcup I_i) = 0 \Rightarrow \mu(I) - \mu(I \cap \bigcup I_i) = 0$$

Pelos os intervalos $I_i^{'}$ s serem disjuntos e $I \cap \bigcup I_i = \bigcup_i (I \cap I_i)$, temos

$$\begin{aligned} \mu(I) &= \mu(I \cap \bigcup I_i) \\ &= \mu(\bigcup_i I \cap I_i) \\ &= \sum_i \mu(I \cap I_i) \leq \sum_i \mu(I_i). \end{aligned}$$

Por fim usando as equações (2.2) e (2.3) e $\bigcup I_i \subset U$,

$$\begin{aligned} \mu(I) &\leq \sum_i \mu(I_i) \\ &\leq (t+\varepsilon)\sum_i m(I_i) \\ &\leq (t+\varepsilon)m(U) \\ &\leq (t+\varepsilon)(m(I)+\varepsilon) \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon \downarrow 0$, temos

$$\mu(I) \leq tm(I)$$

□

Para os seguintes lemas as medidas μ e m serão medidas de Radon em $\mathbb{R}$.

Lema 3. *A derivada $D(\mu, m, x)$ existe e é finita para m quase todo $x \in \mathbb{R}$*

Proof. Para $0 < r < \infty$ e $0 < s < t < \infty$ sejam

$$A_{s,t,r} = \{x \in B : \underline{D}(\mu, m, x) \leq s < t \leq \overline{D}(\mu, m, x)\}$$

$$A_{t,r} = \{x \in B : \overline{D}(\mu, \lambda, x) \geq t\}$$

Note que

$$\underline{D}(\mu, m, x) \leq s \; e \; \overline{D}(\mu, m, x) \geq t.$$

Então pelo lema 2 anterior,

$$\mu(A_{s,t,r}) \leq sm(A_{s,t,r}) \; e \; \mu(A_{s,t,r}) \geq tm(A_{s,t,r})$$

$$\Rightarrow tm(A_{s,t,r}) \leq \mu(A_{s,t,r}) \leq sm(A_{s,t,r}).$$

Do mesmo modo,

$$tm(A_{t,r}) \leq \mu(A_{t,r}) \leq \mu(B) < \infty.$$

Desde que tenhamos $s < t$ essas desigualdades nos dizem que $m(A_{s,t,r}) = 0$, e

$$m(\bigcap_{t>0} A_{t,r}) = \lim_{t\to\infty} m(A_{t,r}) = 0$$

Porém o complementar do conjunto $\{x : \exists D(\mu, m, x) < \infty\}$ é a união dos conjuntos $A_{s,t,r}$ e $\bigcap_{t>0} A_{t,r}$ onde s e t percorrem os racionais positivos com $s < t$ e r percorre os inteiros positivos. Então é um conjunto de medida m nula, portanto obtemos o desejado. □

Lema 4. *Para todo conjunto de Borel $B \subset \mathbb{R}$,*

$$\int_B D(\mu, m, x)dm(x) \leq \mu(B)$$

com igualdade se $\mu \ll m$

Proof. Escolha $1 < t < \infty$ e seja

$$B_p = \{x \in B : t^p \leq D(\mu, m, x) < t^{p+1}\},$$

com $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Então pelo Lema 3 que acabamos de provar e pela letra (b) do Lema 2,

$$\begin{aligned}
\int_B D(\mu, m, x) d\lambda(x) &= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{B_p} D(\mu, m, x) dm(x) \\
&\leq \sum_{p=-\infty}^{\infty} t^{p+1} m(B_p) \\
&\leq t \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mu(B_p) \leq t\mu(B)
\end{aligned}$$

Tomando $t \downarrow 1$, obtemos

$$\int_B D(\mu, m, x) dm(x) \leq \mu(B).$$

Se $\mu \ll m$ os conjuntos de medida m nula também serão de medida μ nula. Então, notando também que por (a) do lema 2

$$D(\mu, m, x) = D(m, \mu, x)^{-1} > 0$$

para μ quase todo x, temos

$$\mu(B) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mu(B_p).$$

Um argumento similar como acima usando a parte (a) do Lema 2 nos fornece

$$\int_B D(\mu, m, x) dm(x) \geq \mu(B).$$

Portanto,

$$\int_B D(\mu, m, x) dm(x) = \mu(B).$$

□

O próximo resultado é a principal ferramenta que será usada na investigação da continuidade absoluta de medidas nos próximos capítulos.

Proposição 16. *$\mu \ll m$ se, e somente se $\underline{D}(\mu, m, x) < \infty$ para μ quase todo $x \in \mathbb{R}$.*

Proof. Primeiro note que por (a), $\underline{D}(m, \mu, x) < \infty$ para m quase todo ponto. Com isso, se $\mu \ll m$, então o mesmo será verdade para μ quase todo ponto. Reciprocamente, suponha que $\underline{D}(\mu, m, x) < \infty$ para μ quase todo $x \in \mathbb{R}$. Seja $I \subset \mathbb{R}$ com $m(I) = 0$. Para $u = 1, 2, \ldots$ o lema 2 nos fornece

$$\mu(\{x \in I : \underline{D}(\mu, m, x) \leq u\}) \leq um(I) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(I) = 0$$

□

2.3 Continuidade absoluta via norma L^2

Nesta seção vamos apresentar um critério mais flexível de continuidade absoluta dado por [Tsu01]. Aqui e para o restante do texto a medida de referência será sempre a medida de Lebesgue m de $\mathbb{R}$.

Seja $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ o conjunto das medidas borelianas finitas com sinal em $\mathbb{R}$. É sabido que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ forma um espaço vetorial. Mais do que isso, para um número real $r > 0$ a seguinte função

$$\langle \cdot \ , \ \cdot \rangle_r : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$(\rho, \rho') \mapsto \langle \rho \ , \ \rho' \rangle_r = \int_{\mathbb{R}} \rho(I_r(z))\rho'(I_r(z))dm$$

onde $I_r(z) = \{y \in \mathbb{R} : |z - y| < r\}$, é um produto interno em $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Proposição 17. *A função $\langle \cdot \ , \ \cdot \rangle_r$ é um produto interno em $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.*

Proof. Vejamos que a bilinearidade e a simetria seguem diretamente do fato da integral satisfazer tais propriedades. De fato, fixemos um número real $r > 0$ e tomemos quaisquer $\rho, \rho' \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned}
\langle \alpha\rho \ , \ \rho' \rangle_r &= \int_{\mathbb{R}} (\alpha\rho)(I_r(z))\rho'(I_r(z))dm \\
&= \int_{\mathbb{R}} \alpha\rho(I_r(z))\rho'(I_r(z))dm \\
&= \alpha \int_{\mathbb{R}} \rho(I_r(z))\rho'(I_r(z))dm \\
&= \alpha\langle \rho \ , \ \rho' \rangle_r
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $\langle \rho \ , \ \alpha\rho' \rangle_r = \alpha\langle \rho \ , \ \rho' \rangle_r$.

Seguindo a mesma ideia, temos

$$\begin{aligned}
\langle \rho + \rho'' \ , \ \rho' \rangle_r &= \int_{\mathbb{R}} (\rho + \rho'')(I_r(z))\rho'(I_r(z))dm \\
&= \int_{\mathbb{R}} [\rho(I_r(z)) + \rho''(I_r(z))]\rho'(I_r(z))dm \\
&= \int_{\mathbb{R}} [\rho(I_r(z))\rho'(I_r(z)) + \rho''(I_r(z))\rho'(I_r(z))]dm \\
&= \int_{\mathbb{R}} \rho(I_r(z))\rho'(I_r(z))dm + \int_{\mathbb{R}} \rho''(I_r(z))\rho'(I_r(z))dm \\
&= \langle \rho \ , \ \rho' \rangle_r + \langle \rho'' \ , \ \rho' \rangle_r.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $\langle \rho \ , \ \rho' + \rho'' \rangle_r = \langle \rho \ , \ \rho' \rangle_r + \langle \rho \ , \ \rho'' \rangle_r$.

A simetria é fácil de ver já que

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(I_r(z))\rho'(I_r(z))dm = \int_{\mathbb{R}} \rho'(I_r(z))\rho(I_r(z))dm$$

Então segue-se que $\langle \rho \ , \ \rho' \rangle_r = \langle \rho' \ , \ \rho \rangle_r$.

Note que a positividade segue-se diretamente da definição

$$\langle \rho \ , \ \rho \rangle_r = \int \rho(I_r(z))^2 dm(z) \geq 0.$$

Afirmação 18. *Se* $\langle \rho\ ,\ \rho \rangle_r = 0$ *então* $\rho = 0$.

Proof. Com efeito, suponha que não, isto é, existe um $z_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\rho(I_r(z_0)) > 0$. Vamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(I_r(z))^2 dm > 0.$$

Para isso basta analisarmos dois casos, e para facilitar tal análise tome $\psi(z) = \rho(I_r(z))^2$.

Caso 1: ρ não tem átomos.

Seja $I_r(z) = [a, b]$. Vamos mostrar que dada uma sequência $z_n < z$ convergindo a z, temos que $\psi(z_n)$ converge a $\psi(z)$. Ou seja, veremos que a função ψ é contínua.

De fato por $z_n \to z$ temos que $I_r(z_n) \cap I_r(z) \neq \emptyset$. Agora vamos denotar $I_r(z_n) = [a_n, b_n]$ e os extremos da interseção entre $I_r(z)$ e $I_r(z_n)$ por $E_n = [a_n, b)$ e $F_n = (b_n, b]$.

Seja $B_n = I_r(z) \sqcup E_n = I_r(z_n) \sqcup F_n$. Daí,

$$\rho(B_n) \to \rho(I_r(z)),$$

já que $\cap E_n = \emptyset$, e portanto $\rho(E_n) \to 0$. Por outro lado,

$$\rho(I_r(z_n)) + \rho(F_n) = \rho(B_n)$$

Logo,

$$\rho(I_r(z_n)) \to \rho(I_r(z)) - \lim \rho(F_n).$$

Mas como ρ não tem átomos, segue que $\lim \rho(F_n) = 0$. Portanto, $\rho(I_r(z_n)) \to \rho(I_r(z))$.

Como $\psi(z_0) = \rho(I_r(z_0))^2 = \alpha > 0$ e ψ é contínua existe um $\delta > 0$ tal que $\psi(z) \geq \frac{\alpha}{2}$, para todo $z \in (z_0 - \delta, z_0 + \delta)$.Logo

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(z) dm(z) \geq \int_{z_0-\delta}^{z_0+\delta} \psi(z) dm(z) \geq 2\delta \frac{\alpha}{2} = \delta\alpha > 0.$$

Caso 2: ρ tem átomos.

Seja $x \in \mathbb{R}$ um átomo de ρ. Então

$$\rho(I_r(x)) \geq \rho(\{x\}) > 0.$$

Portanto podemos assumir que $z_0 = x$. Além disso, observe que se $d(z, x) < \frac{r}{2}$, então $x \in I_r(z)$ e portanto $\rho(I_r(z)) \geq \rho(\{x\}) > 0$.

Agora seja $\alpha = \rho(\{x\})$.Então,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(z) dm(z) \geq \int_{z_0-\frac{r}{2}}^{z_0+\frac{r}{2}} \psi(z) dm(z) \geq \alpha^2 r > 0.$$

Em ambos os casos concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(I_r(z))^2 dm > 0.$$

Entretanto isso é um absurdo, pois

$$0 = \langle \rho\ ,\ \rho \rangle_r = \int_{\mathbb{R}} \rho(I_r(z))^2 dm > 0.$$

Logo, $\rho = 0$. □

Portanto a função $\langle \cdot \ , \ \cdot \rangle_r$ cumpre todos os pré-requisitos para ser um produto interno. $\square$

Como consequência da Proposição acima podemos definir a seguinte norma em $\mathcal{M}(\mathbb{R})$:

$$\|\rho\|_r = \sqrt{\langle \rho \ , \ \rho \rangle_r}$$

para qualquer $\rho \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Desse modo o espaço das medidas borealianas finitas com sinal em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial normado.

O comportamento assintótico da norma $||\rho||_r$ quando $r \to 0$ fornece pistas para entender a regularidade da medida ρ. Mais precisamente, temos o resultado a seguir.

Teorema 19. *Seja $\rho \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Se $\liminf_{r \to 0^+} r^{-1} \|\rho\|_r < \infty$, então $\rho << m$. Mais ainda, a função densidade $\frac{d\rho}{dm} \in L^2(\mathbb{R})$ e satifaz*

$$\|\frac{d\rho}{dm}\|_{L^2} \leq \liminf_{r \to 0^+} r^{-1} \|\rho\|_r$$

Antes de dar a demonstração iremos apresentar dois lemas auxiliares que usaremos na prova.

Lema 5. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua, então $f(x) = \lim_{r \to 0} f_r(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Proof. De fato, segue-se da continuidade da $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que dados $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$, $f(I_\delta(x)) \subset I_\epsilon(f(x))$. Agora tome $r \in (0, \delta)$, daí pela inclusão acima

$$\begin{aligned} f_r(x) &\leq \frac{1}{2r} \int_{I_r(x)} f(y) dm(y) \\ &\leq \frac{m(I_r(x))}{2r} f(x) + \epsilon \\ &= f(x) + \epsilon \end{aligned}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} f_r(x) &\geq \frac{1}{2r} \int_{I_r(x)} f(y) dm(y) \\ &\geq \frac{m(I_r(x))}{2r} f(x) - \epsilon \\ &= f(x) - \epsilon \end{aligned}$$

Portanto, $f(x) = \lim_{r \to 0} f_r(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Lema 6. $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_r(x)}(y) d\rho(x) = \rho(I_r(y))$

Proof. De fato, perceba que $y \in I_r(x)$ se, e somente se $x \in I_r(y)$. Daí, pela definição de função característica

$$\mathbb{1}_{I_r(x)}(y) = 1 \iff x \in I_r(y).$$

Portanto,

$$\mathbb{1}_{I_r(x)}(y) = \mathbb{1}_{I_r(y)}(x)$$

e o resultado segue. $\square$

Proof. Seja $r > 0$ um número real. Defina a seguinte função:

$$g_r(x) = (2r)^{-1}\rho(I_r(x)).$$

Pelas definições das normas $\|.\|_{L^2}$ e $\|.\|_r$, obtemos

$$\begin{aligned}\|g_r(x)\|_{L^2} &= (\int (g_r(x))^2 dm)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\int (\frac{\rho(I_r(x))}{2r})^2 dm)^{\frac{1}{2}} \\ &= (\frac{1}{(2r)^2})^{\frac{1}{2}} (\int (\rho(I_r(x)))^2 dm)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2r}(\langle \rho\ ,\ \rho\rangle_r)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2r)^{-1}\|\rho\|_r\end{aligned}$$

Pela a relação obtida acima concluímos que

$$\liminf_{r\to 0^+} \|g_r(x)\|_{L^2} = \liminf_{r\to 0^+} (2r)^{-1}\|\rho\|_r$$

Pelo Teorema de Banach-Alaoglu e por L^2 ser um espaço de Hilbert podemos supor que existe uma subsequência $(r_k) \to 0$ quando $k \to 0$ de tal modo que

$$\lim_{k\to\infty} \|g_{r_k}\|_{L^2} = \lim_{r\to 0^+} (2r)^{-1}\|\rho\|_r < \infty$$

e com $g_{r_k} \rightharpoonup g$ em $L^2(\mathbb{R})$. Isto nos permite concluir que

$$\int g f dm = \lim \int g_{r_k} f dm$$

para toda função $f \in C^0(\mathbb{R})$ com suporte compacto. Para o que se segue considere $f \in C^0(\mathbb{R})$ com suporte compacto e defina uma sequência $\{f_{r_k}\}_{r_k}$ da seguinte maneira

$$f_{r_k}(x) = (2r_k)^{-1} \int_{I_{r_k}(x)} f(y)dm(y) \tag{2.4}$$

Além disso,

$$||f_r||_{C^0} \leq \frac{1}{2r} m(I_r(x))||f||_{C^0} = ||f||_{C^0}.$$

Então o Lema 5 e a limitação obtida acima nos permite aplicar o Teorema da Convergência Dominada (ver[Cas04]):

$$\int f d\rho = \int \lim_{r\to 0} f_r(x)d\rho(x) = \lim_{r\to 0} \int f_r(x)d\rho(x). \tag{2.5}$$

Substituindo a eq. (2.4) na eq. (2.5), obtemos

$$\lim_{r\to 0} \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{2r} \int_{I_r(x)} f(y)dm(y))d\rho(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{2r} \int_{\mathbb{R}} \int_{I_r(x)} f(y)dm(y)d\rho(x). \tag{2.6}$$

Note que

$$\int_{I_r(x)} f(y)dm(y) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathbb{1}_{I_r(x)}(y)dm(y)$$

Então a eq. (2.6) fica sendo

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathbb{1}_{I_r(x)}(y)dm(y)d\rho(x)$$

Como a medida $m\times\rho$ é uma medida produto, então segue-se do Teorema de Fubini

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathbb{1}_{I_r(x)}(y)dm(y)d\rho(x)=\lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\mathbb{1}_{I_r(x)}(y)d\rho(x)dm(y)$$

O Lema 6 nos garante que

$$\int_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{I_r(x)}(y)d\rho(x)=\rho(I_r(y))$$

Daí, como consequência temos

$$\int fd\rho=\lim_{r\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{\rho(I_r(y))}{2r}dm(y)=\lim_{r\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(y)g_r(y)dm(y)=\int fgdm$$

Portanto, $\frac{d\rho}{dm}=g$. $\square$

CHAPTER 3

Convoluções de Bernoulli

No capítulo anterior vimos duas ferramentas para garantir a continuidade absoluta de uma medida. Entretanto, como dito anteriormente, o que as torna um instrumento poderoso para o estudo do nosso problema é a condição de δ-transversalidade. O foco deste capítulo é apresentar essa condição geométrica e ver como ela influencia no comportamento da medida. Antes daremos um breve contexto histórico juntamente com uma motivação para em seguida deixarmos explícito o nosso problema.

3.1 Motivação do problema

A questão a ser estudada pode ser vista de duas maneiras. A primeira é da perspectiva probabilística, veremos como o lançamento de uma moeda descreve perfeitamente o nosso problema. Na próxima seção veremos a mesma situação, porém sob a ótica da teoria simbólica.

Digamos que estamos interessados em estudar o lançamento de moedas e para isso considere apenas moedas "honestas", isto é, que não estejam viciadas em cair somente para um dos lados. A matemática nos ajuda a modelar esse simples experimento. Na linguagem da probabilidade, possíveis eventos são representados por conjutos mensuráveis $A, B, C, \ldots$ que pertencem a um espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ com $\mu(X) = 1$. Essa medida μ é chamada de *medida de probabilidade*, e a probabilidade de um evento A ocorrer é dada por $\mu(A)$.

Comecemos nosso experimento com o lançamento de uma única moeda. Nesse caso, podemos considerar o universo de possibilidades $\mathcal{A}$ sendo composto por apenas dois eventos: K é o evento no qual temos cara e C é o evento no qual temos coroa. Ou seja, $\mathcal{A} = \{K, C\}$ e cada um deles tem a probabilidade $\frac{1}{2}$ de ocorrer. Dito de outra forma, sendo η a medida de probabilidade em $\mathcal{A}$, temos $\eta(K) = \frac{1}{2}$ e $\eta(C) = \frac{1}{2}$.

Repetindo o experimento com a mesma moeda anterior, porém sendo lançada duas vezes de maneiras independentes o universo de possibilidades torna-se um produto cartesiano: $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A} = \{K, C\}$. Diferentemente da situação anterior, agora temos duas medidas de probabilidade cada uma associada ao seu respectivo $\mathcal{A}$. Nesse caso representamos a medida por $\eta \times \eta$ e a chamamos de medida produto que nos diz que cada um dos quatros eventos possíveis possui probabilidade $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$. Seguindo de maneira indutiva, para n lançamentos, o espaço amostral é $\mathcal{A}^n$ em que cada um dos 2^n eventos possíveis possuem probabilidade $(\frac{1}{2})^n$.

Agora considere a mesma moeda sendo lançada uma vez por dia por toda a eternidade. O espaço amostral que melhor modela esta situação é o conjunto de sequências infinitas de caras ou coroas

$$\mathcal{A}^\infty = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_n = k \text{ ou } \omega_n = c, n = 1, 2, \dots\}$$

Desse modo a representação matemática das situações descritas acima pode ser dada ao considerar uma série "aleatória". Isto é, para cada sinal positivo ou negativo da série associamos um dos lados da moeda. Mais concretamente, caso saia cara no lançamento da moeda a série terá sinal positivo, mas caso tenhamos coroa o sinal será negativo.

Matematicamente podemos escrever da seguinte maneira

$$Y_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \pm\lambda^n$$

onde $\lambda \in (0, 1)$ e os sinais $+$ e $-$ são escolhidos com probabilidade $\frac{1}{2}$.

A medida para determinar se a série Y_λ pertence a um conjunto mensurável E da reta real será dada por

$$\nu_\lambda(E) = \mathrm{Prob}\{Y_\lambda \in E\}.$$

Historicamente em 1930 o matemático Paul Erdos investigou a seguinte questão:

Problema 20. *Para quais valores de λ a medida ν_λ é regular, i.e. para $\lambda \in (0, 1)$ quando ν_λ é absolutamente contínua com respeito à Lebesgue?*

Desde então diversos matemáticos têm trabalhado em determinar qual é a melhor estimativa de intervalo que o parâmetro λ pertence para que ν_λ seja regular. Em particular os matemáticos Alexander e Yorke, Przytycki e Urbanski, e Ledrappier mostraram a importância dessas distribuições em vários problemas de sistemas dinâmicos e estimativas para a dimensão de Haussdorf.

Em 1962, Garsia (ver [PS96]) conjecturou que: "ν_λ é absolutamente contínua para quase todo $\lambda \in (\dfrac{1}{2}, 1)$".

Já em 1995 o matemático Boris Solomyak (em [Sol95]) confirmou o esperado. Ele provou que ν_λ é absolutamente contínua para quase todo $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ usando técnicas de análise harmônica. Por fim, no ano seguinte, Peres juntamente com Solomyak (ver [PS96]) forneceram uma outra prova do mesmo resultado usando um argumento geométrico de transversalidade.

Heuristicamente a prova dada por Peres e Solomyak é considerar a convolução de Bernoulli ν_λ como uma projeçaõ não-linear da medida uniforme no espaço de sequências. O controle da não-linearidade é feita pondo uma propriedade de transversalidade em certas séries de potências.

3.2 Pequeno desvio pela teoria simbólica

Como vimos anteriormente o ambiente que melhor traduz a intuição do lançamento de moedas por toda a eternidade é o espaço das sequências de tamanho infinito.

Dinâmica simbólica

Dentro dos sistemas dinâmicos a dinâmica simbólica compõe um dos ramos mais profundos e poderosos da área, visto que em muitos casos é mais fácil obter informações no caso simbólico. Com essa ferramenta em mãos somos capazes de codificar a dinâmica de certos sistemas por meio de conjugações ou semi-conjugações.

Ou seja, caso a dinâmica de um determinado sistema seja demasiadamente complicada podemos, a depender do sistema original, obter uma conjugação com o mapa deslocamento; e com isso deduzir propriedades do sistema inicial por meio da conjugação construída.

Nesta breve explanação sobre a teoria simbólica daremos ênfase aos seus aspectos topológicos e resultados relacionados à dinâmica topológica.

Seja $\ell > 1$ um inteiro fixado. Podemos formar um conjunto de ℓ símbolos que será denotado por $\mathcal{A} = \{1, \dots, \ell\}$. Utilizando esses símbolos pode-se formar sequências finitas de tamanho no máximo ℓ:

$$\omega = (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_j),$$

onde $j \leq \ell$ e $\omega_i \in \mathcal{A}$ com $1 \leq i \leq j$.

Ao considerarmos o produto cartesiano do conjunto dos símbolos estaremos construindo o espaço das sequências infinitas cujos os termos são os símbolos de $\mathcal{A}$. Denotaremos o espaço das sequências sendo

$$\mathcal{A}^{\infty} = \prod_{\ell=1}^{\infty} \mathcal{A}$$

Note que estamos considerando apenas sequências unilaterais. Isso se deve ao fato das situações que irão aparecer ao longo do texto estarem neste contexto. Entretanto vale observar que também podemos definir sequências infinitas que sejam bilaterais.

Tendo em mente que $\mathcal{A}^{\infty}$ é um produto cartesiano, então nada mais natural que o espaço simbólico esteja mergulhado com a topologia produto.

Uma maneira de definir a topologia em $\mathcal{A}^{\infty}$ é considerar o seguintes conjuntos:

$$\mathcal{C}_k(\omega) = \{\xi \in \mathcal{A}^{\infty} : \xi_i = \omega_i, \forall 1 \leq i \leq k\},$$

onde $k = 1, 2, \dots$

Esses conjuntos $\mathcal{C}_k(\omega)$ são chamados de *cilindros*. Dado um ponto $\omega \in \mathcal{A}^{\infty}$ os cilindros formam uma base de abertos de ω. Intuitivamente os pontos ω e ξ estarão pertos se são iguais ao longo do intervalo $[1, k]$.

Uma outra característica importante do espaço das sequências é que a topologia definida pelos cilindros é metrizável pela métrica

$$d(\xi, \omega) = 2^{-i(\xi, \omega)},$$

onde $i(\xi, \omega) = \min\{n : \xi_n \neq \omega_n\}$. Então $\mathcal{A}^{\infty}$ não é apenas um espaço topológico como também é um espaço métrico.

Para concluir os aspectos topológicos do espaço das sequências mencionamos que todo $\mathcal{A}^{\infty}$ é homeomorfo a um conjunto de Cantor. Lembre que um *conjunto de Cantor* é um conjunto que é compacto, perfeito, totalmente desconexo e metrizável. Um importante teorema que é usado na prova para garantir o afirmado é o Teorema de Tychonoff.

Teorema 21. *$M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ é compacto se, e somente se cada fator M_i é compacto.*

Para adentrarmos na parte dinâmica defina a **função deslocamento** sendo

$$\sigma : \mathcal{A}^\infty \to \mathcal{A}^\infty$$
$$\omega \mapsto \sigma(\omega) = (\omega_2\omega_3\dots),$$

onde $\omega = (\omega_1\omega_2\dots)$

Ou seja, o mapa σ desloca um símbolo da sequência ω para esquerda, e por estarmos considerando o espaço das sequências unilaterais a função σ não é invertível, já que todos os símbolos à esquerda desaparecem. Chamamos o par $(\mathcal{A}^\infty, \sigma)$ de **sistema dinâmico simbólico**.

Medida de Bernoulli

Nesta seção vamos enxergar a Teoria Simbólica do ponto de vista da Teoria Ergódica que apesar de ser uma visão diferente da apresentada na seção anterior, ambas se complementam e enriquecem a teoria.

Dentro desse ponto de vista, os objetos centrais de estudo são as medidas invariantes por um sistema dinâmico. Em particular, as medidas invariantes que são dita ergódicas possuem papel fundamental no desenvolvimento da teoria. Veremos que o sistema $\sigma : \mathcal{A}^\infty \to \mathcal{A}^\infty$ apresentado na seção anterior, possui uma medida ergódica a ele acoplada chamada de medida de Bernoulli.

Antes de darmos a definição precisa da medida de Bernoulli é necessário introduzir certos conceitos da teoria da medida. Inicialmente vamos transformar o produto cartesiano de espaços de medidas em um espaço de medida chamado de espaço de medida produto.

Sejam $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)_{j=1,\dots,n}$ espaços de medida finito. Para transformar $X_1 \times \cdots \times X_n$ em um espaço de medida basta considerar a família de todos os conjuntos da forma

$$A_1 \times \cdots \times A_n,$$

onde $A_j \in \mathcal{A}_j$, e tomar a σ-álgebra gerada por essa família em $X_1 \times \cdots \times X_n$. Dizemos que essa σ-álgebra gerada é a *σ-álgebra produto*, a denotaremos por

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n.$$

Utilizando o Teorema de Extensão de Medidas e o Teorema da Continuidade no Vazio, obtemos

Teorema 22. *Existe uma única medida μ em $(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n)$ tal que*

$$\mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1)\dots\mu_n(A_n)$$

para todo $A_1 \in \mathcal{A}_1 \dots A_n \in \mathcal{A}_n$.

Note que por cada μ_i ser uma medida finita temos que μ é uma medida finita. A medida que acabamos de obter é chamada de *medida produto* das medidas $\mu_1 \dots \mu_n$. Com isso, definimos o *espaço de medida produto* sendo

$$(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n, \mu_1 \times \cdots \times \mu_n).$$

Até o momento vimos a teoria no caso finito. Agora vamos passar ao caso que fará a ligação com o espaço simbólico, o caso enumerável. Seja $(X_j, \mathcal{B}_j, \mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ espaços de medida com $\mu_j(X_j) = 1$, ou seja, para cada fator do produto cartesiano teremos uma medida de probabilidade associada ao seu respectivo espaço. Defina

$$\Omega = \prod_{j=1}^{\infty} X_j = \{(x_j)_{j\in\mathbb{N})} : x_j \in X_j\}.$$

Definimos os *cilindros* de Ω sendo os conjuntos da forma

$$[m; A_m, \ldots, A_n] = \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} : x_j \in A_j, m \leq j \geq n\},$$

onde $m \in \mathbb{N}$ e $n \geq m$ e $A_j \in \mathcal{B}_j$ para $m \geq j \leq n$.

É claro que a definição que acabamos de ver tem a mesma essência da que foi vista na seção anterior. A diferença é que agora estamos olhando para conjuntos mensuráveis das respectivas σ-álgebras dos espaços de medida. E da mesma maneira que obtivemos σ-álgebra produto no caso finito, a família de todos os cilindros gera a σ-álgebra produto $\mathcal{B}$ em Ω.

O teorema que garante a existência da medida produto no caso finito continua válido para o caso enumerável.

Teorema 23. *Existe uma única medida μ em $(\Omega, \mathcal{B})$ tal que*

$$\mu([m; A_m, \ldots, A_n]) = \mu_m(A_m) \ldots \mu_n(A_n)$$

para todo $[m; A_m, \ldots, A_n] \in \mathcal{B}$.

Note que em particular μ é uma probabilidade. Naturalmente, μ é a medida produto e é da forma

$$\mu = \prod_{j=1}^{\infty} \mu_j.$$

Por fim a tripla $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ é o espaço produto dos

$$(X_j, \mathcal{B}_j, \mu_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

O que vimos até agora faz parte de uma teoria mais geral. O que se seguirá é um caso particular e é muito interessante para o estudo de sistemas dinâmicos e teoria ergódica.

Observe que a construção do espaço produto é o modelo perfeito para o experimento do lançamento de moedas que mencionamos na primeira seção deste capítulo.

Seja $\mathcal{A} = \{1, \ldots, \ell\}$. Considere $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \eta)$ sendo o espaço de medida, onde $\mathcal{C}$ é a σ-álgebra de $\mathcal{A}$ e η é a probabilidade que dá peso $\frac{1}{\ell}$ em cada um dos ℓ símbolos. Seja Ω o produto cartesiano dos conjuntos Ω definimos a **medida de Bernoulli** em Ω sendo a única medida satisfazendo

$$\nu([m; A_m, \ldots, A_n]) = \prod_{j=m}^{n} \eta(A_j)$$

cuja a existência é garantida pelo Teorema 13.

Um lema de integração para a medida de Bernoulli

Nesta seção vamos apresentar um resultado que é sobre medidas de Bernoulli e que será essencial na prova do principal Lema deste capítulo. Vamos nos restringir ao caso $\ell = 2$, pois é ele que modela o problema das convoluções de Bernoulli.

Lema 7. *Seja* $\pi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função dada por* $\pi(\xi, \omega) = \lambda_0^{-i(\xi,\omega)}$*, com* $\lambda_0 \in (0, 1)$*. Então*

$$\iint_{\Omega} \pi d(\nu \times \nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^k 2^{-k+1}$$

Proof. De fato, seja $\pi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $\pi(\xi, \omega) = \lambda_0^{-i(\xi,\omega)}$. Note que a imagem da função π é

$$Im(\pi) = \{\lambda_0^{-k} : k \in \mathbb{N}\}.$$

Daí temos que

$$\pi^{-1}(\lambda_0^{-k}) = \{(\xi, \omega) : i(\xi, \omega) = k\}.$$

Sejam $C_1, \ldots, C_{2^{k-1}}$ todos os cilindros de tamanho $k - 1$. Então

$$\pi^{-1}(\lambda_0^{-k}) = (C_1 \times C_1) \cup \cdots \cup (C_{2^{k-1}} \times C_{2^{k-1}}) \tag{3.1}$$

Aplicando a medida produto $\nu \times \nu$, onde ν é a medida de Bernoulli, obtemos

$$(\nu \times \nu)(\pi^{-1}(\lambda_0^{-k})) = 2^{k-1} \times 2^{-k+1} \times 2^{-k+1} = 2^{-(k-1)}.$$

Desse modo por definição

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \pi d(\nu \times \nu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^k (\nu \times \nu)(\pi^{-1}(\lambda_0^{-k})) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^k 2^{-(k-1)}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Convolução de Bernoulli

Do ponto de vista da teoria simbólica, a medida mais apropriada para este tipo de situação é chamada de *medida de Bernoulli*. Entretanto, a medida ν_λ apresentada na seção anterior é caracterizada por uma construção canônica conhecida como *push-forward*.

Em outras palavras, dada uma função contínua $f : M \to M$ e uma medida η em M podemos definir o *push-forward* (ou *iterado*) de η por f sendo a medida

$$f_* \eta(B) = \eta(f^{-1}(B))$$

para todo $B \subset M$ mensurável.

No sentido de usar a teoria simbólica para determinar o problema que estamos estudando, é natural considerarmos considerarmos $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ sendo o espaço das sequências unilaterais de tamanho infinito. Note que $\Omega = \mathcal{A}^\infty$, com $\mathcal{A} = \{1, 2\}$, de modo que as construções anteriores se aplicam ao espaço Ω, a menos de um pequeno abuso de notação.

Para definir a convolução de Bernoulli vamos considerar a função $f_\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_\lambda(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \lambda^n.$$

Lema 8. f_λ *é uma função contínua.*

Proof. Seja $\varepsilon > 0$ e considere $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda^n < \varepsilon.$$

Tome $0 < \delta < 2^{-n_0-1}$. Daí, se

$$d(\xi, \omega) = 2^{-i(\xi,\omega)} < \delta,$$

então necessariamente devemos ter $i(\xi, \omega) \geq n_0$. Nesse caso, segue-se que

$$\begin{aligned} |f_\lambda(\omega) - f_\lambda(\xi)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\omega_n - \xi_n| \lambda^n \\ &= \sum_{n=n_0}^{\infty} |\omega_n - \xi_n| \lambda^n \\ &\leq 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \lambda^n < \varepsilon \end{aligned}$$

Portanto f_λ é contínua. □

Desse modo definimos a **convolução de Bernoulli** sendo a iterada da medida de Bernoulli ν por f_λ:

$$\nu_\lambda = (f_\lambda)_* \nu.$$

Lembremos que o principal problema que estamos investigando neste capítulo é sobre a regularidade da medida ν_λ. Explicitamente: "Para quais valores de λ a medida ν_λ é regular, i.e. para $\lambda \in (0, 1)$ quando ν_λ é absolutamente contínua com respeito à Lebesgue?"

Como dito anteriormente Peres e Solomyak investigaram profundamente essa questão obtendo a prova do seguinte resultado:

Teorema 24. *Para quase todo $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1)$ a medida ν_λ é regular e a sua derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\nu_\lambda}{dm} \in L^2(\mathbb{R})$.*

Vamos apresentar um caso particular do teorema acima cuja prova possui os ingredientes essencias da versão geral. Iremos mostrar a existência de um certo intervalo I no qual temos que a medida ν_λ é absolutamente contínua com respeito à Lebesgue. Isso pode ser resumido no próximo resultado.

Teorema 25. *Existe um intervalo $I \subseteq (0, 1)$ tal que $m(I) > 0$ e $m(\{\lambda \in I : \nu_\lambda \ll m\}) = m(I)$.*

A estratégia inicial para a prova do Teorema 25 é considerar a derivada inferior de ν_λ com respeito a m em $x \in \mathbb{R}$. Como vimos no capítulo anterior lembre que denotamos esta derivada por $\underline{D}(\nu_\lambda, m, x)$.

Afirmamos que o lema a seguir implica o Teorema 25.

Lema 9. *Existe um intervalo não-trivial I tal que*

$$\int_I \int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu_\lambda, m, x)\, d\nu_\lambda(x)\, d\lambda < +\infty$$

De fato, vejamos a prova do Teorema 25 assumindo o Lema 9.

Proof. Note que o Lema 9 implica que $\int \underline{D}(\nu_\lambda, m, x) d\nu_\lambda(x)$ é finita para m-quase todo ponto $\lambda \in I$. Por outro lado,

$$\int \underline{D}(\nu_\lambda, m, x) d\nu_\lambda(x) < +\infty \Rightarrow \underline{D}(\nu_\lambda, m, x) < +\infty$$

para ν_λ-quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$.

Pela Proposição 16 do capítulo anterior isso implica que $\nu_\lambda \ll m$. $\square$

3.3 Lema da Mudança de Variável

Lembremos que nosso principal objetivo é mostrar que existe um intervalo I não-trivial da reta tal que a integral dupla da derivada inferior da convolução de Bernoulli é limitada para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$. Para isso comecemos com o Lema da Mudança de Variável que é o primeiro passo do argumento de Peres e Solomyak que irá fornecer uma limitação inicial.

Lema 10. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalos não-trivial e $B_r(x) = [x-r, x+r]$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e $\underline{D}(\nu, m, x)$ a derivada inferior de ν_λ. Então*

$$\int_I \int_{\mathbb{R}} \underline{D}(\nu, m, x)\, d\nu_\lambda(x)\, d\lambda \leq \liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-1} \iint_{\Omega} m(A)\, d\nu(\xi)\, d\nu(\omega),$$

onde $A = \{\lambda \in I : |f_\lambda(\xi) - f_\lambda(\omega)| \leq r\}$

Proof. Considere o intervalo $B_r(x) = [x-r, x+r]$ e seja m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}$. Por definição a derivada inferior de ν_λ é

$$\underline{D}_{\nu_\lambda}(x) := \underline{D}(\nu, m, x) = \liminf_{r \downarrow 0} \frac{\nu_\lambda(B_r(x))}{m(B_r(x))}. \tag{3.2}$$

Como m é Lebesgue, $m(B_r(x)) = 2r$. Daí a equação (3.2) pode ser escrita do seguinte modo

$$\underline{D}_{\nu_\lambda}(x) = \liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-1} \nu_\lambda(B_r(x)).$$

Agora defina

$$\mathcal{S} := \int_I \int_{\mathbb{R}} \underline{D}_{\nu_\lambda}(x)\, d\nu_\lambda(x)\, d\lambda$$

Note que

$$\mathcal{S} = \int_I \int_{\mathbb{R}} \underline{D}_{\nu_\lambda}(x)\, d\nu_\lambda(x)\, d\lambda = \int_I \int_{\mathbb{R}} \liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-1} \nu_\lambda(B_r(x))\, d\nu_\lambda(x)\, d\lambda$$

Daí, pelo Lema de Fatou

$$\mathcal{S} = \int_I \int_{\mathbb{R}} \liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-1} \nu_\lambda(B_r(x))\, d\nu_\lambda(x)\, d\lambda \leq \liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-1} \int_I \int_{\mathbb{R}} \nu_\lambda(B_r(x))\, d\nu_\lambda(x)\, d\lambda \tag{3.3}$$

Pela construção da medida ν_λ podemos fazer uma mudança de variável em (3.3), já que $\nu_\lambda = \nu \circ f_\lambda^{-1}$. Com isso a equação (3.3) fica

$$\mathcal{S} \leq \liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-1} \int_I \int_{\mathbb{R}} \nu_\lambda(B_r(f_\lambda(\omega))\, d\nu(\omega)\, d\lambda \tag{3.4}$$

onde $x = f_\lambda(\omega)$. Da definição de medida,

$$\nu_\lambda(B_r(f_\lambda(\omega))) = \int \mathbb{1}_{B_r(f_\lambda(\omega))}(t)\, d\nu_\lambda(t)$$

Fazendo a mudança de variável $t = f_\lambda(\xi)$ e $d\nu_\lambda(t) = d\nu(\xi)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int \mathbb{1}_{B_r(f_\lambda(\omega))}(t)\, d\nu_\lambda(t) &= \int \mathbb{1}_{B_r(f_\lambda(\omega))}(f_\lambda(\xi))\, d\nu(\xi) \\ &= \int \mathbb{1}_{\{\xi\in\Omega:|f_\lambda(\xi)-f_\lambda(\omega)|\le r\}}\, d\nu(\xi)\end{aligned}$$

Substituindo a igualdade acima em (3.4) obtemos a seguinte integral tripla:

$$\mathcal{S} \le \liminf_{r\downarrow 0}(2r)^{-1} \int_I \int_\Omega \int_\Omega \mathbb{1}_{\{\xi\in\Omega:|f_\lambda(\xi)-f_\lambda(\omega)|\le r\}}\, d\nu\, d\nu\, d\lambda$$

Segue-se do Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &\le \liminf_{r\downarrow 0}(2r)^{-1} \int_\Omega \int_\Omega \int_I \mathbb{1}_{\{\xi\in\Omega:|f_\lambda(\xi)-f_\lambda(\omega)|\le r\}}\, d\lambda\, d\nu\, d\nu \\ &= \liminf_{r\downarrow 0}(2r)^{-1} \iint_\Omega m(\{\lambda \in I : |f_\lambda(\xi) - f_\lambda(\omega)| \le r\})\, d\nu(\xi)\, d\nu(\omega)\end{aligned}$$

como queríamos. □

Seja

$$\mathcal{S}(I) := \liminf_{r\downarrow 0}(2r)^{-1} \iint_\Omega m(\{\lambda \in I : |f_\lambda(\xi) - f_\lambda(\omega)| \le r\})\, d\nu(\xi)\, d\nu(\omega).$$

Na próxima seção vamos usar justamente um argumento de transversalidade para demonstrar a existência de um intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ não trivial satisfazendo $\mathcal{S}(I)$ finito.

3.4 Lema da δ-transversalidade

Antes de prosseguir com a prova do Lema 9 é necessário estabelecer a condição de δ-transversalidade e definir qual tipo de função satisfaz tal propriedade.

Definição 26. *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Dizemos que g satisfaz a condição de **δ-transversalidade** se*

$$g(x) < \delta \Rightarrow g'(x) < -\delta,$$

para todo $x \in I$.

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$, definimos a função $g : I \to \mathbb{R}$ sendo

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \tag{3.5}$$

com $b_n \in \{-1, 0, 1\}$. A condição de δ-transversalidade é expressa da seguinte maneira

Lema 11. *Existe um intervalo I tal que toda função g da forma* (3.5) *satisfaz a δ-transversalidade.*

Para provar o Lema acima precisamos definir um tipo especial de função que irá auxiliar na construção da δ-transversalidade da função g.

Definição 27. *Uma série de potência $h(x)$ é chamada de $(*)$-**função** se para algum $k \geq 1$ e $a_k \in [-1, 1]$,*

$$h(x) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} x^i + a_k x^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} x^i$$

Tendo em mãos a definição da função h o próximo resultado irá garantir o que foi afirmado no Lema 11.

Lema 12. *Suponha que exista uma $(*)$-função h satisfazendo*

$$h(x_0) > \delta \text{ e } h'(x_0) < -\delta$$

para algum $x_0 \in (0, 1)$ e $\delta \in (0, 1)$. Então para funções do tipo (3.5) *a condição de δ-transversalidade é satisfeita em* $[0, x_0]$.

Proof. Seja h uma $(*)$-função. Observe que por hipótese h satisfaz uma condição parecida com a de δ-transversalidade para algum $x_0 \in (0, 1)$. Para mostrar que a função $g(x)$ satisfaz a condição de transversalidade no intervalo $[0, x_0]$ necessitamos provar que a hipótese feita sobre a função h é satisfeita para todo $x \in [0, x_0]$.

Afirmação 28. *$h(x) > \delta$ e $h'(x) < -\delta$ para todo $x \in [0, x_0]$*

Proof. Por h ser uma $(*)$-função, temos

$$h(x) = 1 - \sum_{i=1}^{k-1} x^i + a_k x^k + \sum_{i=k+1}^{\infty} x^i \tag{3.6}$$

para algum $k \geq 1$ e $a_k \in [-1, 1]$. Derivando (3.6),

$$\begin{aligned} h'(x) &= -1 - \sum_{i=2}^{k-1} i x^{i-1} + k a_k x^{k-1} + \sum_{i=k+1}^{\infty} i x^{i-1} && (3.7) \\ &= -\sum_{i=1}^{k-1} i x^{i-1} + k a_k x^{k-1} + \sum_{i=k+1}^{\infty} i x^{i-1} && (3.8) \end{aligned}$$

Derivando mais uma vez,

$$h''(x) = -\sum_{i=2}^{k-1} i(i-1) x^{i-2} + k(k-1) a_k x^{k-2} + \sum_{i=k+1}^{\infty} i(i-1) x^{i-2} \tag{3.9}$$

Note que pela expressão obtida em (3.9) temos que h'' possui no máximo uma raiz em $(0, 1)$. Fazendo uma pequena análise da equação (3.7) chegaremos a conclusão que

$$h'(0) < \delta.$$

Vamos considerar primeiro o caso $k = 1$. Temos que

$$h(x) = 1 + a_1 x + \sum_{i=2}^{\infty} x^i$$

o que implica que

$$h'(x) = a_1 + \sum_{i=2}^{\infty} ix^{i-1} := a_1 + \alpha(x),$$

onde $\alpha(x) \in (0, \infty)$ se $x \in (0, 1)$ e $\alpha(0) = 0$.

Como, por hipótese, $h'(x_0) < -\delta$, isso implica que

$$a_1 < -\delta - \alpha(x_0) < -\delta.$$

Portanto, $h'(0) = a_1 < -\delta$.

Agora considere $k \geq 2$, primeiramente vejamos quando $k = 2$:

$$h'(x) = -1 + 2a_2 x + \sum_{i=3}^{\infty} ix^{i-1}$$

Então

$$h'(0) = -1 \Rightarrow h'(0) < -\delta$$

Para $k > 2$,

$$h'(x) = -1 - \sum_{i=2}^{k-1} ix^{i-1} + ka_k x^{k-1} + \sum_{i=k+1}^{\infty} ix^{i-1}$$

o que nos diz que

$$h'(0) = -1 \Rightarrow h'(0) < -\delta$$

Logo em todos os casos temos $h'(0) < -\delta$. Mostremos que

$$h'(x) < -\delta$$

para todo $x \in (0, x_0)$. Para isso observe que

$$\lim_{x \to 1^-} h'(x) = \infty$$

Então como $h'(0) < -\delta$ e $h'(x_0) < -\delta$, temos que

$$h'(x) < -\delta \tag{3.10}$$

para qualquer $x \in (0, x_0)$, caso contrário h'' teria ao menos duas raízes. Resta mostrarmos que $h(x) > \delta$, porém isso segue-se da desigualdade (3.10) já que ela nos diz que a função h é decrescente no intervalo $(0, x_0)$. Então

$$h(x) > h(x_0) > \delta$$

para todo $x \in (0, x_0)$. □

Agora estamos aptos a mostrar que toda função $g : [0, x_0] \to \mathbb{R}$ da forma

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

com $b_n \in \{-1, 0, 1\}$ satisfaz a condição de δ-transversalidade. Com efeito, considere $f(x) = g(x) - h(x)$. Segue-se da maneira que ambas as funções foram definidas,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} c_i x^i - \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i x^i$$

onde $c_i \geq 0$ e $l = k - 1$ ou $l = k$.

Afirmação 29. $f(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

Proof. De fato, derivando $f(x)$ temos

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{l} ic_i x^{i-1} - \sum_{i=l+1}^{\infty} ic_i x^{i-1}$$

Dai,

$$\begin{aligned} f(x) < 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^{l} c_i x^i - \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i x^i < 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{l} c_i x^i < \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i x^i \end{aligned}$$

Derivando ambos os lados da desigualdade

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{l} ic_i x^{i-1} < \sum_{i=l+1}^{\infty} ic_i x^{i-1} &\Rightarrow \sum_{i=1}^{l} ic_i x^{i-1} - \sum_{i=l+1}^{\infty} ic_i x^{i-1} < 0 \\ &\Rightarrow f'(x) < 0 \end{aligned}$$

como queríamos. □

Tomando $x \in [0, x_0]$ segue-se da Afirmação 28 e da definição de $f(x)$

$$\begin{aligned} g(x) < \delta &\Rightarrow f(x) + h(x) < \delta \\ &\Rightarrow f(x) < \delta - h(x) < \delta - \delta = 0 \end{aligned}$$

Já pela Afirmação 29,

$$\begin{aligned} f(x) < 0 &\Rightarrow f'(x) < 0 \\ &\Rightarrow g'(x) - h'(x) < 0 \\ &\Rightarrow g'(x) < h'(x) < -\delta \\ &\Rightarrow g'(x) < -\delta \end{aligned}$$

como desejado. □

Uma análise numérica mostra que

$$h(x) = 1 - x - x^2 - x^3 + 0.5x^4 + \sum_{i=5}^{\infty} x^i$$

cumpre a condição do Lema 12 com $x_0 = 2^{-2/3}$ e $\delta = 0.07$. Logo, toda função g da forma (3.5) satisfaz a condição de δ-transversalidade no intervalo $[0, 2^{-2/3}]$.

3.5 Usando δ-transversalidade para estimar $\underline{D}(\nu_\lambda, m, x)$

Nesta seção vamos completar a prova do Lema 9 estabelecendo que se $\lambda_0 \in (1/2, 2^{-2/3})$ e $I = [\lambda_0, 2^{-2/3}]$ então $\mathcal{S}(I) < +\infty$. Pelo Lema 10 isto é suficiente para deduzir o Lema 9.

Veja que podemos reescrever o conjunto

$$\{\lambda \in I : |f_\lambda(\xi) - f_\lambda(\omega)| \leq r\} \tag{3.11}$$

da seguinte maneira: tome $\phi_{\xi,\omega}(\lambda) = f_\lambda(\xi) - f_\lambda(\omega)$. Da definição da função f_λ,

$$\begin{aligned} f_\lambda(\xi) - f_\lambda(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \lambda^n - \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \lambda^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n - \omega_n)\lambda^n, \end{aligned}$$

onde $\xi_n - \omega_n \in \{-2, 0, 2\}$. Desse modo o conjunto (3.11) pode ser visto como

$$\{\lambda \in I : |\phi_{\xi,\omega}(\lambda)| \leq r\}.$$

Então a integral que precisamos limitar e que foi obtida no Lema da Mudança de Variável pode ser escrita como

$$\liminf_{r \downarrow 0} (2r)^{-1} \iint_\Omega m(\{\lambda \in I : |\phi_{\xi,\omega}(\lambda)| \leq r\})\, d\nu(\xi)\, d\nu(\omega).$$

Com isso o nosso foco é estimar o seu integrando $m(\{\lambda \in I : |\phi_{\xi,\omega}(\lambda)| \leq r\})$. Antes vejamos que a série $\phi_{\xi,\omega}(\lambda)$ pode ser escrita em função de uma série de potência com o termo constante ± 1.

Lema 13. *$\phi_{\xi,\omega}(\lambda) = 2\lambda^{i(\xi,\omega)} g(\lambda)$, onde $i(\xi,\omega) = \min\{n : \xi_n \neq \omega_n\}$ e $g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n$ com $b_n \in \{-1, 0, 1\}$.*

Proof. Já tínhamos visto que

$$\phi_{\xi,\omega}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n - \omega_n)\lambda^n.$$

Seja $n_0 = i(\xi,\omega)$. Por definição, se $n < n_0$, temos $\xi_n - \omega_n = 0$. Então

$$\phi_{\xi,\omega}(\lambda) = \sum_{n=n_0}^{\infty} (\xi_n - \omega_n)\lambda^n.$$

Mais ainda, por $\xi_n, \omega_n \in \{-1, 1\}$, segue-se que$\xi_n - \omega_n \in \{-2, 0, 2\}$. Com isso, para cada $m = n_0 + n$ com $n \in \mathbb{N}$ temos $b_n \in \{-1, 0, 1\}$ tal que

$$\xi_m - \omega_m = 2b_n.$$

Portanto,

$$\phi_{\xi,\omega}(\lambda) = \sum_{n=n_0}^{\infty} 2b_{n-n_0}\lambda^n = 2\lambda^{n_0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lambda^n.$$

□

Para conseguirmos estimar o conjunto acima utilizaremos a condição de δ-transversalidade dada na seção anterior.

Afirmação 30. *Para toda g que satisfaz a condição de δ-transversalidade e $\rho > 0$ tem-se que*

$$m(\{\lambda \in I : |g(\lambda)| \leq \rho\}) \leq 2\delta^{-1}\rho$$

Proof. Temos dois casos a serem analisados. O caso em que $\rho \geq \delta$ e o outro em que $\rho \leq \delta$. Digamos que estejamos no primeiro caso: $\rho \geq \delta$. Isso implica que $\frac{\rho}{\delta} \geq 1$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por 2 chegamos em

$$\frac{2\rho}{\delta} > 1 > m(\{\lambda \in I : |g(\lambda)| \leq \rho\}). \tag{3.12}$$

Vejamos agora o segundo caso: $\rho \leq \delta$. Para isso considere um intervalo $J = g^{-1}([-\rho, \rho]) \subset (0, 1)$. Pela condição de δ-transversalidade obtemos o seguinte, se $\lambda \in J$ então:

$$\begin{aligned} |g(\lambda)| \leq \rho < \delta &\Rightarrow g(\lambda) < \delta \text{ e } g'(\lambda) < -\delta \\ &\Rightarrow |g'(\lambda)| > \delta \end{aligned}$$

Com isso, se $x = \inf J$ e $y = \sup J$, aplicando o Teorema do Valor Médio obtemos, para algum $\lambda \in J$

$$|g(x) - g(y)| = |g'(\lambda)||J|$$

Pela desigualdade (3.12), sabemos que

$$|g'(\lambda)||J| > \delta|J| \text{ e } |g(x) - g(y)| \leq 2\rho.$$

Isso implica que

$$2\rho \geq |g'(\lambda)||J| > \delta|J|$$

Portanto, $|J| \leq 2\rho\delta^{-1}$.

□

Vejamos o que temos até agora. Assumindo a condição de $\delta-$transversalidade provamos que a medida do conjunto $\{\lambda \in I : |g(\lambda)| \leq \rho\}$ é limitada por $2\delta^{-1}\rho$. Lembrando que $|\phi_{\xi,\omega}(\lambda)| \leq r$, temos para $\lambda \in I = [\lambda_0, 2^{-2/3}]$,

$$|\phi_{\xi,\omega}(\lambda)| = |2\lambda^{i(\xi,\omega)}g(\lambda)| \leq r \implies |g(\lambda)| \leq \frac{r}{2\lambda_0^{i(\xi,\omega)}}.$$

Daí, aplicando a Afirmação 30 com $\rho = \lambda_0^{-i(\xi,\omega)}r/2$, obtemos

$$m(\{\lambda \in I : |\phi_{\xi,\omega}(\lambda)| \leq r\}) \leq \delta^{-1}\lambda_0^{-i(\xi,\omega)}r.$$

Com isso, temos o seguinte

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}(I) &\leq \liminf_{r\downarrow 0}(2r)^{-1} \iint_{\Omega} m(\{\lambda \in I : |f_\lambda(\xi) - f_\lambda(\omega)| \leq r\})\, d\nu(\xi)\, d\nu(\omega) \\
&= \liminf_{r\downarrow 0}(2r)^{-1} \iint_{\Omega} m(\{\lambda \in I : |\phi_{\xi,\omega}(\lambda)| \leq r\})\, d\nu(\xi)\, d\nu(\omega) \\
&\leq \liminf_{r\downarrow 0}(2r)^{-1} \iint_{\Omega} \delta^{-1}\lambda_0^{-i(\xi,\omega)} r\, d\nu(\xi)\, d\nu(\omega) \\
&= \delta^{-1} \liminf_{r\downarrow 0}(2r)^{-1} \iint_{\Omega} \lambda_0^{-i(\xi,\omega)} r\, d\nu(\xi)\, d\nu(\omega) \\
&= (2\delta^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^k 2^{-k-1} < \infty,
\end{aligned}
$$

pois $\lambda_0 > 1/2$. Observe que a última igualdade segue diretamente do Lema 7.

CHAPTER 4

Endomorfismos de Anosov do tipo produto torto

Neste capítulo vamos apresentar uma classe de sistemas dinâmicos satisfazendo a condição de transversalidade vista no capítulo anterior, mas desta vez em dimensão maior. Mais especificamente, vamos estudar o endomorfismo de Anosov do tipo produto torto T apresentado por Tsujii em [Tsu01]. O principal objetivo deste capítulo é provar que a transformação T admite uma única medida física. No próximo capítulo, usando o critério estabelecido na seção 2.3, veremos que a medida física obtida é absolutamente contínua com respeito à Lebesgue. Na última seção faremos uma pequena análise dos parâmetros que modelam T para saber quando temos a existência ou não da medida física para a classe de sistemas que estamos considerando.

4.1 Introdução

As palavras que compõem o título deste capítulo merecem serem comentadas. Para isso vejamos algumas definições que estão presente na teoria hiperbólica de sistemas dinâmicos diferenciáveis.

Seja M uma variedade Riemanniana C^∞. Dizemos que uma função diferenciável $f : M \to M$ é um *difeomorfismo* se f é um homomorfismo tal que a inversa f^{-1} é diferenciável.

Considere um conjunto invariante $\Lambda \subset M$. Dizemos que Λ é um *conjunto hiperbólico* de f se, para cada $x \in \Lambda$, o espaço tangente M é decomposto numa soma direta entre dois subespaços invariantes $E^s(x)$ e $E^u(x)$, e para constantes $C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ temos

$$||Df^n(x)v|| \leq C\lambda^n|v| \text{ e } ||Df^n(x)v|| \leq C\lambda^n|v|,$$

para todo $x \in \Lambda$ e quaisquer $v \in E^s(x)$ e $v \in E^u(x)$ respectivamente, com $n \geq 0$. Os subespaços $E^s(x)$ e $E^u(x)$ são chamados de subespaços *estável* e *instável*, respectivamente. Da mesma maneira chamaremos *distribuição estável e instável* de $f|_\Lambda$ as famílias dos respectivos subespaços.

Sabemos que localmente sistemas dinâmicos diferenciáveis são bem aproximados por mapas lineares, ou seja, a sua derivada. Desse modo o ponto crucial da definição de hiperbolicidade é o fato da derivada possuir comportamento complementares: expande em uma direção e contrai na outra direção. Mais do que isso, a hiperbolicidade nos diz que as constantes de expansão e contração são uniformes.

Um difeomorfismo f é um *difeomorfismo de Anosov* se a variedade inteira M é um conjunto hiperbólico de f. Ou seja, um sistema ser Anosov é dizer que globalmente temos o comportamento de expansão e contração em direções opostas.

Perceba que as definições acima foram dadas no contexto em que f é globalmente invertível. Entretanto podemos considerar o caso em que o sistema é invertível localmente.Dizemos que $f : M \to M$ é um **endomorfismo** se localmente f é um difeomorfismo. Dito de outro modo, dado um $x \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de x tal que $f|_U$ é um difeomorfismo sobre sua imagem.

Agora sejam M uma variedade C^∞ fechada e $f : M \to M$ um difeomorfismo local de classe C^1. Dizemos que f é um **endomorfismo de Anosov** se existem constantes $C > 0$ e $\lambda > 1$ tais que para toda f-órbita $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ existe uma decomposição

$$T_{x_i}M = E^s_{x_i} \oplus E^u_{x_i},$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$, que é preservada pela derivada Df e para todo $n > 0$ temos

$$||Df^n(x_i)v|| \geq C^{-1}\lambda^n||v||, \forall v \in E^u_{x_i} \text{ e } \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$||Df^n(x_i)v|| \leq C\lambda^{-n}||v||, \forall v \in E^s_{x_i} \text{ e } \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Uma outra definição que é equivalente a essa pode ser vista em [MT14].

Por fim uma aplicação é chamada de **produto torto** se uma coordenada depende da outra. Vejamos a seguir que a aplicação a ser estudada neste capítulo se encaixa nas definições acima.

Antes de apresentar o sistema dinâmico que iremos estudar considere a aplicação $\tau : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\tau(x) = \ell x$ para $\ell \geq 2$. Esta aplicação nada mais é do que a expansão no círculo $\mathbb{S}^1$. Agora vamos definir a nossa principal aplicação:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (\tau(x), \lambda y + f(x)) \end{aligned}$$

onde $f \in C^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$ e $\lambda \in (0, 1)$.

Não é difícil ver que T é um produto torto. O domínio $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ de T pode ser visto como um cilindro, ou seja, uma união de retas que contornam $\mathbb{S}^1$ e projetadas no círculo $\mathbb{S}^1$. Desse modo para cada ponto $x \in \mathbb{S}^1$ temos uma reta vertical passando por x a qual chamamos de *fibra* em x. A aplicação T manda a fibra em x para a fibra em $\tau(x)$. Variando o y a sua imagem estará na fibra imagem correspondente.

Note que na segunda coordenada a dinâmica é dada por uma contração em y seguida por uma translação por uma função $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Dito de outro modo, se tomarmos um outro ponto y' a distância entre y e y' contrai por um fator $\lambda \in (0, 1)$ visto que a translação por $f(x)$ depende apenas do ponto base x. Observe que o mapa T apresentado acima na verdade define uma família de transformações indexadas por três parâmetros: $\ell \in \mathbb{N} \cap [2, +\infty)$, $\lambda \in (0, 1)$ e $f \in C^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$.

Como vimos acima, cada transformação T envia a fibra sobre $x \in \mathbb{S}^1$ na fibra sobre $\tau(x)$ atuando como uma contração de fator λ. Além disso, T expande transversalmente às fibras. Pode-se demonstrar, por causa disso que T é um endomorfismo de Anosov. Devido à fórmula explícita que define T, não precisamos desse fato, porém ele é importante para caracterizar os resultados que vamos apresentar. De fato, seja m^2 a medida de Lebesgue do cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. O teorema principal deste capítulo é o seguinte.

Teorema 31. *Existe uma medida de probabilidade μ em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ que é ergódica T-invariante tal que dado um $p \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ tem-se $(\pi_{\mathbb{S}^1})_*\mu = m_{\mathbb{S}^1}$. Além disso, para Lebesgue quase todo ponto $p \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ vale que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \phi \circ T^j(p) = \int \phi d\mu$$

Em particular a medida μ é a única medida física de T. Iremos apresentar uma demonstração auto-contida do Teorema 31, dada por Tsujii. Na próxima seção vamos descrever a ideia da demonstração.

4.2 Conjugação com Produto Torto Simbólico

Lembre-se que a transformação T está definida no cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e é dada por

$$T(x, y) = (\tau(x), \lambda y + f(x)),$$

onde $\tau(x) = \ell x$ com $\ell \geq 2$, $\lambda \in (0, 1)$ e $f \in C^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$.

Para mostrar a existência da medida física do sistema T vamos explorar uma ideia muito utilizada em Sistemas Dinâmicos que é construção de conjugações entre sistemas.

Observe que o domínio $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ não é um conjunto compacto. Esse pequeno detalhe pode ser um obstáculo ao tentar mostrar que a medida μ é física.

Uma maneira de contornar esse problema é construir uma semi-conjugação entre a transformação T e um outro sistema no qual a dinâmica seja mais simples. Desse modo a medida μ obtida será dada pelo o push-forward da semi-conjugação construída.

Nas próximas subseções será feita a construção do outro sistema com a dinâmica mais simples para depois obtermos a semi-conjugação desejada e com isso obter a existência da medida física.

Produto Torto Auxiliar

Para construção do produto torto auxiliar faremos uso das informações contidas na seção 3.2.

Seja $\tau : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ dada por $\tau(x) = \ell x$ para $\ell \geq 2$. Por τ ser um endomorfismo expansor no círculo $\mathbb{S}^1$ sabemos da existência de uma semi-conjugação com espaço simbólico $\mathcal{A}^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}$.

Agora considere a partição $\mathcal{P}$ de $\mathbb{S}^1$ em intervalos de comprimento $\frac{1}{\ell}$. Para cada intervalo temos os seguintes átomos de $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}(k) = [\frac{k-1}{\ell}, \frac{k}{\ell})$$

Desse modo para cada ponto em $\mathbb{S}^1$ podemos associar um único átomo da partição $\mathcal{P}$ que o contém. Dito de outra forma, dado um $x \in \mathbb{S}^1$ existe um símbolo $\pi(x) \in \mathcal{A}$ tal que $x \in \mathcal{P}(\pi(x))$.

Para a obter o produto torto auxiliar vamos definir a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \beta_x : \mathcal{A}^\infty &\to \mathcal{A}^\infty \\ a &\mapsto \beta_x(a) = (\pi(x)a_1a_2a_3...) \end{aligned}$$

Observe que a aplicação β_x é um deslocamento à direita. Mais do que isso, ela endereça as sequências de $\mathcal{A}^\infty$ ao por o símbolo de $\mathcal{A}$ que está associado ao um ponto de $\mathbb{S}^1$.

Pelo tamanho do conjunto $\mathcal{A}$ segue-se da maneira que definimos que existem apenas ℓ transformações β_x. Vale ressaltar que cada aplicação β_x é um ramo inverso do shift 'original' já que para cada ponto temos ℓ pré-imagens.

Com a aplicação β_x em mãos estamos aptos a definir o produto torto desejado. Seja $\mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty$ um "cilindro simbólico" onde as retas verticais podem ser vistas como conjuntos de Cantor $\{x\} \times \mathcal{A}^\infty$. Desse modo definimos o produto torto auxiliar sendo

$$\begin{aligned} \hat{T} : \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty &\to \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty \\ (x, a) &\mapsto \hat{T}(x, a) = (\tau(x), \beta_x(a)). \end{aligned}$$

Ao sistema $\hat{T}$ temos associado uma medida produto que é dada por $\hat{\mu} = m \times \nu$, onde m é a medida de Lebesgue em $\mathbb{S}^1$ e ν é a medida de Bernoulli com pesos $\frac{1}{\ell}$ em $\mathcal{A}^\infty$. Vejamos que $\hat{\mu}$ é $\hat{T}$-invariante.

Lema 14. *A medida $\hat{\mu}$ é invariante por $\hat{T}$.*

Proof. Seja $(\mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \hat{\mu})$ o espaço de medida produto. Estamos considerando $\mathcal{B}$ sendo a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{S}^1$ e $\mathcal{C}$ a σ-álgebra gerada pelos cilindros

$$\mathcal{C} := [m; a_m, \dots a_n] = \{(x_j) \in \mathcal{A}^\infty : x_m = a_m, \dots, x_n = a_n\}$$

em $\mathcal{A}^\infty$. Desse modo a σ-álgebra produto $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ é gerada pela álgebra

$$\mathcal{D} = \{E \times C : E \in \mathcal{B} \text{ e } C \in \mathcal{C}\}$$

Daí queremos mostrar que

$$\hat{\mu}(\hat{T}^{-1}(E \times C)) = \hat{\mu}(E \times C)$$

para todos $E \in \mathcal{B}$ e $C \in \mathcal{C}$. Com efeito, tomando $E \in \mathcal{B}$ e $C \in \mathcal{C}$ quaisquer e pelo modo que a transformação $\hat{T}$ foi definida temos

$$\hat{T}^{-1}(E \times C) = \{(x, a) \in \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty : \tau(x) \in E, a = (\pi(x) a_1 a_2 ...)\}.$$

Como m é invariante por τ e ν é invariante por β, segue-se que

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\hat{T}^{-1}(E \times C)) &= (m \times \nu)(\hat{T}^{-1}(E \times C)) \\ &= m(\tau^{-1}(E))\nu(\beta^{-1}(C)) \\ &= m(E)\nu(C) \\ &= (m \times \nu)(E \times C) \\ &= \hat{\mu}(E \times C) \end{aligned}$$

□

Conjuntos Estáveis de $\hat{T}$

Vamos demonstrar que a transformação $\hat{T}$ tem um comportamento muito parecido com T: a fibra $\{x\} \times \mathcal{A}^\infty$ é enviada por $\hat{T}$ na fibra $\{\tau(x)\} \times \mathcal{A}^\infty$ e ação de $\hat{T}$ contrai a distância nas fibras. Mais precisamente, vamos demonstrar o seguinte

Lema 15. *Dados $x \in \mathbb{S}^1$, $a, \hat{a} \in \mathcal{A}^\infty$ vale que*

$$d(\hat{T}^n(x,a), \hat{T}^n(x,\hat{a})) \leq (\frac{1}{2})^n d(a,\hat{a})$$

Proof. De fato, por estarmos no espaço simbólico a métrica considerada é a que foi vista no capítulo anterior. Daí, temos que

$$d(\beta_x(a), \beta_x(\hat{a})) \leq \frac{1}{2} d(a,\hat{a}).$$

Nota-se que a transformação $\hat{T}$ está contraindo nas fibras verticais. Então iterando $\hat{T}$ sucessivamente obtemos

$$\hat{T}^n(x,a) = \Big(\tau^n(x), \prod_{l=0}^{n-1} \beta_{\tau^l(x)}(a)\Big).$$

Segue-se que

$$d(\hat{T}^n(x,a), \hat{T}^n(x,\hat{a})) \leq (\frac{1}{2})^n d(a,\hat{a}).$$

$\square$

Ao tomar n suficientemente grande temos que a distância entre os pontos a e $\hat{a}$ tende a 0.

Tendo uma melhor compreensão da dinâmica de $\hat{T}$ somos capazes de mostrar que a médias de Birkhoff para o futuro são constantes ao longo das fibras. Para isso provaremos um resultado bem mais geral.

Proposição 32. *Seja X um espaço métrico e $T : X \to X$ uma função com suporte compacto. Dado y pertecente ao conjunto $W^s(x) = \{y \in X : d(T^n(x), T^n(y)) \to 0\}$ vale que a média de Birkhoff, se existe em x então existe em y e os valores são iguais.*

Proof. Seja $x \in X$ tal que a média de Birkhoff existe em x. Desse modo considere

$$\phi^*(x) = \lim_{n \to +\infty} \phi_n(x),$$

onde $\phi_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \phi \circ T^l(x)$ tal que ϕ é C^0.

Dado $y \in W^s(x)$ segue-se da continuidade de ϕ que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(\phi(x), \phi(y)) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Como $y \in W^s(x)$ temos que existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que se $l \geq N$, então

$$d(T^l x, T^l y) < \delta$$

Para $n > N$ tome $n_1 > N$ tal que

$$n > n_1 \Rightarrow \frac{2N}{n} ||\phi||_{C^0} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
|\phi_n(x)-\phi_n(y)| &\leq \frac{1}{n}\left\{\sum_{l=0}^{N}|\phi\circ T^l(x)-\phi\circ T^l(y)| + \sum_{l=N+1}^{n}|\phi\circ T^l(x)-\phi\circ T^l(y)|\right\}\\
&\leq \frac{2N||f||_{C^0}}{n} + \frac{(n-N)}{n}\frac{\varepsilon}{2}\\
&< \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Até o momento temos que

$$n > n_1 \Rightarrow |\phi_n(x)-\phi_n(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora seja $n_0 > n_1 > N$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |\phi_n(x)-\phi^*(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí caso $n > n_0$, teremos

$$
\begin{aligned}
|\phi_n(y)-\phi^*(x)| &= |\phi_n(y)-\phi_n(x)+\phi_n(x)-\phi^*(x)|\\
&\leq |\phi_n(x)-\phi_n(y)| + |\phi_n(x)-\phi^*(x)|\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Portanto $\phi^*(x) = \lim_{n\to\infty}\phi_n(y)$, como queríamos. □

Corolário 1. *Seja $\hat{\varphi}\in C^0(\mathbb{S}^1\times\mathcal{A}^\infty)$. Se $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\hat{\varphi}\circ\hat{T}^l(x,a)=\alpha$, então para todo $\hat{a}\in\mathcal{A}^\infty$ vale*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\hat{\varphi}\circ\hat{T}^l(x,\hat{a}) = \alpha$$

.

Proof. Fixado $x\in\mathbb{S}^1$ e seja $a\in\mathcal{A}^\infty$. Por hipótese temos que as médias de Birkhoff no ponto $(x,a)\in\mathbb{S}^1\times\mathcal{A}^\infty$ são constantes. Ou seja,

$$\hat{\varphi}^*(x,a) = \lim_{n\to\infty}\hat{\varphi}_n(x,a),$$

onde $\hat{\varphi}_n(x,a)=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\hat{\varphi}\circ\hat{T}^l(x,a)$.

Queremos mostrar que dado $\hat{a}\in\mathcal{A}^\infty$ qualquer, vale

$$\hat{\varphi}^*(x,a) = \lim_{n\to\infty}\hat{\varphi}_n(x,\hat{a}).$$

De fato, vimos que $\hat{T}$ contrai nas fibras verticais $\{x\}\times\mathcal{A}^\infty$, isto é, dado $(x,\hat{a})\in\{x\}\times\mathcal{A}^\infty$,

$$d(\hat{T}^l(x,a),\hat{T}^l(x,\hat{a}))\to 0.$$

Isso é o mesmo que dizer que $(x,\hat{a})\in W^s(x,a)$. Portanto, pela Proposição 32, o $\lim_{n\to\infty}\hat{\varphi}_n^*(x,\hat{a})$ existe e converge para $\hat{\varphi}^*(x,a)$. □

Ergodicidade do Sistema $(\hat{T}, \hat{\mu})$

Para mostrar a ergodicidade de $\hat{\mu}$ faremos uso das ideias contidas no Argumento de Hopf. Entretanto, por $\hat{\mu}$ ser uma medida produto, o nosso caso será mais simples, pois não teremos problema em relação à continuidade absoluta das folheações.

Antes de provarmos que $\hat{\mu}$ é ergódica vamos estabelecer alguns lemas. Recapitulando, seja $\hat{\varphi}$: $\mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty$ uma função contínua e

$$\hat{\varphi}^*(x,a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{\varphi} \circ \hat{T}^l(x,a).$$

Sabemos pelo Teorema Ergódico de Birkhoff que o limite acima existe para $\hat{\mu}$-quase todo ponto $(x,a) \in \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty$.

Lema 16. *Para ν quase todo ponto $a \in \mathcal{A}^\infty$ existe $c = c(a) \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\hat{\varphi}^*(x,a) = c(a)$$

para m quase todo ponto $x \in \mathbb{S}^1$.

Proof. Pelo Teorema de Fubini temos que para ν-quase todo ponto $a \in \mathcal{A}^\infty$, a média de Birkhoff $\hat{\varphi}^*(x,a)$ está bem definida para m-quase todo ponto $x \in \mathbb{S}^1$. Agora considere $\psi \in L^1(\mathbb{S}^1)$ dada por

$$\psi(x) = \hat{\varphi}^*(x,a).$$

Afirmação 33. *$\psi \circ \tau = \psi$ para m quase todo ponto $x \in \mathbb{S}^1$.*

Proof. De fato, por definição

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{\varphi} \circ \hat{T}^l(x,a) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{\varphi}(\tau(x)^l, \prod_{j=0}^{l-1} \beta_{\tau^j(x)}(a)),$$

onde

$$\prod_{j=0}^{l-1} \beta_{\tau^j(x)}(a) = \beta_{\tau^{l-1}(x)} \circ \beta_{\tau^{l-1}(x)} \circ \dots \beta_{\tau(x)} \circ \beta_x(a).$$

Então podemos escrever ψ sendo

$$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \{ \frac{\hat{\varphi}(x,a)}{n} + \frac{\hat{\varphi}(x, \beta_x(a))}{n} + \sum_{l=2}^{n-1} \hat{\varphi}(\tau^l(x), \prod_{j=1}^{l-1} \beta_{\tau^j(x)}(\beta_{\tau(x)}(a))) \}.$$

Por outro lado,

$$\psi \circ \tau(x) = \lim_{n\to\infty} \{ \frac{\hat{\varphi}(\tau(x),a)}{n} + \frac{\hat{\varphi}(\tau^n(x), \prod_{l=1}^{n-1} \beta_{\tau^l(x)}(a))}{n} + \sum_{l=2}^{n-1} \hat{\varphi}(\tau^l(x), \prod_{j=1}^{l-1} \beta_{\tau^j(x)}(a)) \}.$$

Como

$$d\left(\prod_{j=1}^{l-1} \beta_{\tau^j(x)}(a), \prod_{j=1}^{l-1} \beta_{\tau^j(x)}(\beta_x(a)) \right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^l d(a, \beta_x(a))$$

e $\hat{\varphi}$ é uniformemente contínua, por um argumento similiar ao argumento usado na proposição 32, deduzimos que $\psi \circ \tau(x) = \psi(x)$. □

Segue-se da ergodicidade da aplicação τ com respeito a medida de Lebesgue que ψ é constante para quase todo ponto em $\mathbb{S}^1$, como queríamos. $\square$

Lema 17. *Sejam I e J intervalos não triviais e disjuntos da reta. Então*

$$\hat{\mu}((\hat{\varphi}^*)^{-1}(I))\hat{\mu}((\hat{\varphi}^*)^{-1}(J)) = 0$$

Proof. Sejam $A = (\hat{\varphi}^*)^{-1}(I)$ e $B = (\hat{\varphi}^*)^{-1}(J)$. Por hipótese temos que $A \cap B = \emptyset$. Suponha por contradição que

$$\hat{\mu}(A) > 0 \text{ e } \hat{\mu}(B) > 0.$$

Pelo Teorema de Fubini, temos que

$$\nu(\{a \in \mathcal{A}^\infty : m(\{x \in \mathbb{S}^1 : (x,a) \in A\}) > 0\}) > 0.$$

Então, pelo Lema 16, existem $a \in \mathcal{A}^\infty$ e $x \in \mathbb{S}^1$ tais que $(x,a) \in A$ e $\hat{\varphi}^*(x,a) = \hat{\varphi}^*(y,a)$ para m-q.t.p $y \in \mathbb{S}^1$.

Analogamente, existem $\hat{a} \in \mathcal{A}^\infty$ e $y \in \mathbb{S}^1$ tais que $(y,\hat{a}) \in B$ e $\hat{\varphi}^*(y,\hat{a}) = \hat{\varphi}^*(z,\hat{a})$ para m-q.t.p $z \in \mathbb{S}^1$.

Como consequência, obtemos que existe $z \in \mathbb{S}^1$ tal que

$$\hat{\varphi}^*(x,a) = \hat{\varphi}^*(z,a) \text{ e } \hat{\varphi}^*(y,\hat{a}) = \hat{\varphi}^*(z,\hat{a}).$$

Entretanto, pelo Corolário 1, sabemos que

$$\hat{\varphi}^*(z,a) = \hat{\varphi}^*(z,\hat{a}),$$

o que implica que $\hat{\varphi}^*(x,a) = \hat{\varphi}^*(y,\hat{a})$ e portanto $I \cap J \neq \emptyset$, absurdo.

$\square$

Proposição 34. *O sistema $(\hat{T}, \hat{\mu})$ é ergódico.*

Proof. Para obter a ergodicidade da $\hat{\mu}$, basta provarmos que dada $\hat{\varphi} \in C^0(\mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty)$ a média de Birkhoff $\hat{\varphi}^*$ é constante $\hat{\mu}$ quase todo ponto.

Como $\hat{\varphi}$ é uma função contínua temos que $\hat{\varphi}^*$ é limitada. Então $Im(\hat{\varphi}^*) \subseteq [a,b]$ com $a < b$.

Agora sejam $c = \frac{b-a}{2}$ e $I = [a,c)$ e $J = [c,b)$. Pelo lema 16, sabemos que existe $I_1 \in \{I, J\}$ tal que

$$\hat{\mu}((\hat{\varphi}^*)^{-1}(I_1)) = 1.$$

Sejam $a_1 = \inf I_1$ e $b_1 = \sup I_1$. Do mesmo modo tome $c_1 = \frac{b_1 - a_1}{2}$ e considere os intervalos

$$I_1^1 = [a_1, c_1) \text{ e } I_1^2[c_1, b_1].$$

Novamente, pelo lema 16, devemos ter $I_2 \in \{I_1^1, I_1^2\}$ tal que

$$\hat{\mu}((\hat{\varphi}^*)^{-1}(I_2)) = 1.$$

Prosseguindo por indução, obtemos uma sequência decrescente de intervalos $I_{n+1} \subset I_n$ com $m(I_n) \leq \frac{b-a}{2^n} \to 0$ tais que

$$\hat{\mu}((\hat{\varphi}^*)^{-1}(I_n)) = 1.$$

Seja $\{c\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$. Então

$$\hat{\mu}((\hat{\varphi}^*)^{-1}(\{c\})) = 1,$$

ou seja, $\hat{\varphi}^*$ é constante $\hat{\mu}$-q.t.p. Daí, pelo Teorema Ergódico, sabemos que

$$\int \hat{\varphi}^* d\hat{\mu} = \int \hat{\varphi} d\hat{\mu}.$$

Portanto,

$$\hat{\varphi}^*(x, a) = \int \hat{\varphi} d\hat{\mu},$$

para $\hat{\mu}$ quase todo ponto, o que estabelece a ergodicidade de $(\hat{T}, \hat{\mu})$.

□

Construção da Semi-Conjugação

Para mostrarmos a existência da função que irá realizar a semi-conjugação precisamos fazer alguns comentários sobre as partições do círculo $\mathbb{S}^1$. Vamos denotar o truncamento de tamanho $1 \leq q \leq p$ de uma sequência $a \in \mathcal{A}^p$ por $[a]_q = (a_1 \dots a_q)$.

Lembre que estamos considerando a partição $\mathcal{P}$ de $\mathbb{S}^1$ em intervalos de comprimento $\frac{1}{\ell}$. Desse modo os átomos de $\mathcal{P}$ são

$$\mathcal{P}(k) = \left[\tfrac{k-1}{\ell}, \tfrac{k}{\ell}\right)$$

para todo $k \in \mathcal{A}$.

Vamos considerar uma outra partição de $\mathbb{S}^1$ que será denominada de *partição simbólica*. Explicitamente essa partição é o refinamento das pré-imagens da partição $\mathcal{P}$ pela a aplicação τ:

$$\mathcal{P}^p := \bigvee_{i=0}^{p-1} \tau^{-i}(\mathcal{P}).$$

Os elementos da partição simbólica são as interseções não vazias da forma

$$\mathcal{P}(a) = \bigcap_{i=0}^{p-1} \tau^{-i}(\mathcal{P}(a_{p-i})),$$

onde $a = (a_i) \in \mathcal{A}^p$ e $\tau^{-i}(\mathcal{P}(a_{p-i})) \in \tau^{-i}(\mathcal{P})$ para todo i.

Já vimos que para cada ponto $x \in \mathbb{S}^1$ podemos associar um único átomo de $\mathcal{P}$ que o contém. Utilizaremos a partição simbólica para codificar cada intervalo de $\mathbb{S}^1$ no espaço $\mathcal{A}^p$.

Da mesma maneira que acontece na partição $\mathcal{P}$ temos o mesmo na partição $\mathcal{P}^p$, isto é, para cada $a \in \mathcal{A}^p$ existe um único átomo de $\mathcal{P}^p$ que o contém.

Dado $x \in \mathcal{S}^1$, existe um único $y \in \mathcal{P}(a)$ tal que

$$\tau^p(y) = x.$$

Vamos denotar por $a(x)$ os pontos que satisfazem a relação descrita acima, ou seja, $a(x)$ representará um ponto de $\mathcal{P}(a)$ que está associado a $x \in \mathbb{S}^1$. Com isso temos o seguinte

$$x = \tau^p(a(x)) = \tau^{p-1}(\tau(a(x))).$$

Pelo o que acabamos de estabelecer, $\tau(a(x))$ é o ponto que pertence à partição que contém a sequência de tamanho $p-1$,i.e.

$$\tau(a(x)) \in \mathcal{P}([a]_{p-1}).$$

Utilizando a notação acima isso é o mesmo que escrever

$$\tau(a(x)) = [a]_{p-1}(x)$$

para $a \in \mathcal{A}^p$.

Observe que o número de iterações da transformação τ indica o tamanho da sequência que a partição irá conter. Consequentemente os tamanhos das partições que compõem a partição simbólica estão determinados pela quantidade de iterações feitas por τ.

Uma parte importante para a construção da semi-conjugação e para a definição da transversalidade dada pelo Tsujii é a construção da função $\mathcal{S}_p : \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^p \to \mathbb{R}$. O próximo lema nos fornece como a função $\mathcal{S}_p$ está definida, mais do que isso veremos que ela converge uniformemente para $\mathcal{S}_\infty$ na topologia C^0.

Lema 18. *A função $\mathcal{S}_\infty : \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty \to \mathbb{R}$ está bem definida, isto é, a função $\mathcal{S}_p$ converge uniformemente para $\mathcal{S}_\infty$ na topologia C^0.*

Proof. Para uma sequência $a \in \mathcal{A}^p$ tome o segmento $\mathcal{P}(a) \times \{0\} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Daí no ponto $(x, 0) \in \mathcal{P}(a) \times \{0\}$ vale

$$T^p(x,0) = (\tau^p(x), \sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} f(\tau^{p-i}(x))). \tag{4.1}$$

Pela relação descrita no início da seção, o ponto $x \in \mathcal{P}(a)$ pode ser escrito como $x = \tau^p(a(x))$. Fixando $a \in \mathcal{A}^p$ podemos definir a função

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_p : \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^p &\to \mathbb{R} \\ (\cdot, a) &\mapsto \mathcal{S}_p(x,a) \end{aligned}$$

Como $T^p(\mathcal{P}(a) \times \{0\})$ é o gráfico de $\mathcal{S}_p$, podemos definir

$$\mathcal{S}_p(x,a) = \textstyle\sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} f(\tau^{p-i}(x))$$

Pela relação descrita no início da seção, obtemos

$$\mathcal{S}_p(x,a) = \textstyle\sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} f([a]_i(x)).$$

Para concluir que a função $\mathcal{S}_\infty$ está bem definida precisamos garantir a convergência da série

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} f([a]_i(x)).$$

Com efeito, note que

$$|\mathcal{S}_p(x,a)| = |\sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} f([a]_i(x))| \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} ||f||_{C^0}.$$

Por $||f||_{C^0}$ estar dominado por uma série geométrica segue-se que ao tomarmos $p \to \infty$, $\sum \lambda^{i-1}$ converge pelo Teste de Wierstrass (ver [Rud76]). Desse modo concluimos que a função $\mathcal{S}_\infty$ está bem definida.

□

Agora sim estamos aptos a construir a semi-conjugação.

Lema 19. *Seja*

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty &\to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}\\ (x,a) &\mapsto (x, \mathcal{S}_\infty(x,a))\end{aligned}$$

Então $T \circ \Psi = \Psi \circ \hat{T}$.

Proof. Para mostramos que a conjugação é válida, precisamos da seguinte relação: para $x \in \mathbb{S}^1$ tome $\pi(x) \in \mathcal{A}$, então pelos comentários feitos anteriormente o átomo $\mathcal{P}(\pi(x))$ contém x, daí segue-se

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\infty(\tau(x), \beta_x(a)) &= \sum_{i=1}^{p} \lambda^{i-1} f([\beta_x(a)]_i(\tau(x)))\\ &= \sum_{i=1}^{p+1} \lambda^{i-1} f([a]_{i-1}(x))\\ &= f(x) + \lambda \sum_{i=2}^{p+1} \lambda^{i-2} f([a]_{i-1}(x))\\ &= f(x) + \lambda \mathcal{S}_\infty(x,a).\end{aligned}$$

onde $\beta_x(a) = (\pi(x)a_1a_2...) \in \mathcal{A}^\infty$.

Com a relação acima em mãos, basta tomar um ponto $(x,a) \in \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty$ qualquer ver que

$$\begin{aligned}T(\Psi(x,a)) &= T(x, \mathcal{S}_\infty(x,a))\\ &= (\tau(x), \lambda\mathcal{S}_\infty(x,a) + f(x))\\ &= (\tau(x), \mathcal{S}_\infty(\tau(x), \beta_x(a)))\\ &= \Psi(\hat{T}(x,a))\end{aligned}$$

□

Com isso, concluímos que o produto torto $\hat{T}$ é conjugado a T via a transformação Ψ.

Obtendo a Medida Física

Agora estamos aptos a provar o Teorema 31.

Prova do Teorema 31. Observe que a existência de uma medida μ ergódica invariante por T em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ é uma consequência imediata do Lema 19. De fato, basta tomar $\mu = \Psi_*\hat{\mu}$. Por Ψ ser uma conjugação e $\hat{\mu}$ ergódica, concluimos que μ é ergódica em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Sejam $\pi_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ e $\hat{\pi}_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty \to \mathbb{S}^1$ as projeções nas respectivas primeiras coordenadas, isto é,

$$\pi_{\mathbb{S}^1}(x,y) = x \text{ e } \hat{\pi}_{\mathbb{S}^1}(x,a) = x$$

Ainda pelo Lema 19 conseguimos obter a seguinte relação

$$\pi_{\mathbb{S}^1} \circ \Psi = \hat{\pi}_{\mathbb{S}^1} \tag{4.2}$$

o que implica que $(\pi_{\mathbb{S}^1} \circ \Psi)_* = m_{\mathbb{S}^1}$. Desse modo, se μ_y é a desintegração de μ ao longo do círculo $\mathbb{S}^1 \times \{y\}$, segue-se da relação acima que $\mu_y = m_{\mathbb{S}^1}$.

Como consequência da Afirmação acima e pelo fato da $\hat{\mu}$ ser ergódica para $\hat{T}$, temos que se $(x, y_0) \in \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty$ e $(x, y_0) \in \mathcal{B}(\hat{\mu})$, então $(x, y) \in \mathcal{B}(\hat{\mu})$ para todo $y \in \mathcal{A}^\infty$.

Segue-se do Teorema de Fubini que existe um subconjunto $X \subset \mathbb{S}^1$ com $m(X) = 1$ tal que para $x \in X$, existe um $Y_x \subset \mathcal{A}^\infty$ com $\nu(Y_x) = 1$ tal que

$$\{x\} \times \mathcal{A}^\infty \subset \mathcal{B}(\hat{\mu}) \tag{4.3}$$

Em particular, por Y_x ter medida total, $Y_x \neq \varnothing$. Então existe um $y_0 \in Y_x$ tal que $(x, y_0) \in \mathcal{B}(\hat{\mu})$, além disso como as médias de Birkhoff são constantes para todo elemento de $\mathcal{A}^\infty$ segue-se que $(x, y) \in \mathcal{B}(\hat{\mu})$ para todo $y \in \mathcal{A}^\infty$. Concluimos que

$$\{x\} \times \mathcal{A}^\infty \subset \mathcal{B}(\hat{\mu}).$$

Portanto, $\bigcup\limits_{x \in X} \{x\} \times \mathcal{A}^\infty \subset \mathcal{B}(\hat{\mu})$. Pela conjugação, sabemos que

$$\Psi\big(\bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathcal{A}^\infty\big) \subset \mathcal{B}(\mu) \tag{4.4}$$

Daí, pela relação $\pi_{\mathbb{S}^1} \circ \Psi = \hat{\pi}_{\mathbb{S}^1}$, obtemos

$$\Psi\big(\bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathcal{A}^\infty\big) = \bigcup_{x \in X} \{x\} \times \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

Portanto, $\bigcup\limits_{x \in X} \{x\} \times \mathbb{R} \subset \mathcal{B}(\mu)$.

Como $m\big(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \backslash \bigcup\limits_{x \in X} \{x\} \times \mathbb{R}\big) = 0$, então a medida μ é física. □

Desintegração vertical da medida física

Nesta seção vamos começar o estudo da geometria da medida física μ obtida na seção anterior, descrevendo as medidas condicionais de μ com respeito à partição por retas verticais.

Primeiro, vejamos que esta é uma partição mensurável.

Proposição 35. *Seja $\mathcal{P}$ a partição em retas verticais do cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Então $\mathcal{P}$ é uma partição mensurável.*

Proof. Seja $\mathcal{P} = \{\{x\} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{S}^1\}$. Para mostrar que $\mathcal{P}$ é mensurável veremos que $\mathcal{P}$ é o refinamento da partição diádica de $\mathbb{S}^1$.

De fato, seja $\mathcal{P}_n = \{[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}) \times \mathbb{R} : j = 1, \ldots, 2^n\}$. Segue-se da forma que $\mathbb{S}^1$ foi particionado que para todo $x \in \mathbb{S}^1$, existe um i_x tal que

$$x \in I(i, n),$$

onde $I(i, n)$ é o segmento de $\mathbb{S}^1$ correspondente ao intervalo

$$J^n_{i_x} = [\frac{i_x - 1}{2^n}, \frac{i_x}{2^n}).$$

Pela maneira que os intervalos correspondentes foram definidos, temos que $J^{n+1}_{i_x} \subset J^n_{i_x}$ e $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n_{i_x} = \{x\}$.

Portanto, $\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{+\infty} \mathcal{P}_n$ é mensurável. □

A conjugação Ψ nos permite descrever de maneira simples as medidas condicionais com respeito a esta partição

Sejam $x \in \mathbb{S}^1$ e δ_x uma delta de Dirac no ponto x. Considere uma família de medidas dada por

$$\mu_x = \Psi_*(\delta_x \times \nu)$$

Lema 20. *Para $x \in \mathbb{S}^1$, μ_x é a medida condicional da medida μ com respeito à partição $\mathcal{P}$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ na fibra $\{x\} \times \mathbb{R}$.*

Proof. Afirmamos que a família $\{\mu_x\}$ ser uma desintegração de μ é apenas uma consequência direta da conjugção obtida na seção anterior. De fato, sejam $J \subset \mathbb{S}^1$ um intervalo arbitrário e $B_x = \{x\} \times \mathbb{R}$. Considerando a projeção $\pi_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ temos que $\pi_{\mathbb{S}^1 *}\mu = m$, daí $m(J) = \mu(F)$, onde $F = \cup_{x \in J} B_x$. Agora sejam $\hat{B} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^\infty$ e $\hat{B}_x = \{x\} \times \mathcal{A}^\infty$. Então

$$\hat{\mu}(\hat{B}) = (m \times \nu)(\hat{B}) = \int_{\mathbb{S}^1} \nu(\hat{B} \cap \hat{B}_x) dm(x)$$

Como $\mu_x = \Psi_*(\delta_x \times \nu)$, segue-se

$$\int_{\mathbb{S}^1} \nu(\hat{B} \cap \hat{B}_x) dm(x) = \int_{\mathbb{S}^1} \mu_x(B \cap B_x) d(\pi_{\mathbb{S}^1 *}\mu)(x) = \int_{\mathbb{S}^1} \mu_x(B \cap B_x) dm(x)$$

Por fim, como consequência da imagem da bacia de atração da medida $\hat{\mu}$ por Ψ ser igual a bacia de atração da medida μ, temos que em particular $\hat{\mu}(\hat{B}) = \mu(B)$. Portanto,

$$\mu(B) = \hat{\mu}(\hat{B}) = \int_{\mathbb{S}^1} \mu_x(B \cap B_x) dm(x),$$

como queríamos. □

Critério para continuidade absoluta

Com isso defina

$$\mathcal{I}(r) = r^{-2} \int_{\mathbb{S}^1} \|\mu_x\|_r^2 dm$$

Corolário 2. *Seja μ a medida física de T. Se $\liminf_{r \to 0} \mathcal{I}(r) < \infty$, então $\mu \ll m$ em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ e $\frac{d\mu}{dm} \in L^2(\mathbb{R})$*

Proof. Seja $x \in \mathbb{S}^1$. Pelo Lema 20 temos que a família $\{\mu_x\}$ é uma desintegração de μ com respeito à partição $\mathcal{P}$ de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ em retas verticais, e como acabamos de ver $\mathcal{P}$ é mensurável. Daí, dado $A \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ temos

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{S}^1} \mu_x(A) dm. \tag{4.6}$$

Afirmação 36. *A medida condicional μ_x é absolutamente contínua com respeito a m.*

Proof. De fato, lembre que

$$\mathcal{I}(r) = r^{-2} \int_{\mathbb{S}^1} \|\mu_x\|_r^2 dm.$$

Então pelo Lema de Fatou e por hipótese,

$$\int_{\mathbb{S}^1} \liminf_{r \to 0} r^{-2} ||\mu_x||_r^2 \leq \liminf_{r \to 0} \int_{\mathbb{S}^1} r^{-2} ||\mu_x||_r^2 = \liminf_{r \to 0} \mathcal{I}(r) < \infty$$

Note que $r^{-2}||\mu_x||_r^2 = a(r)$ é um número real. Daí

$$\liminf_{r\to 0}(a(r))^2 < \infty \Rightarrow \liminf_{r\to 0} r^{-1}||\mu_x|| < \infty$$

para m quase todo ponto.

Com isso segue-se do Teorema 19 que $\mu_x \ll m$ para m quase todo ponto, $d\mu_x = \rho_x dm$ e

$$||\rho_x||_{L^2} \leq \liminf_{r\to 0} r^{-1}||\mu_x||_r \tag{4.7}$$

□

Por outro lado,

$$\mu_x(A) = \int_A \rho_x(y)dm(y). \tag{4.8}$$

Substituindo (4.8) em (4.7) e pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A \rho_x(y)dm(y)dm(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^1} \mathbb{1}_A \rho_x(y)dm^2(x,y)\end{aligned}$$

Perceba que basta provarmos que a integral dupla acima é limitada para termos que $\mu \ll m.$ Como a função característica é limitada precisamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^1} \rho_x(y)dm^2(x,y) < \infty.$$

Como consequência da Afirmação 36 obtemos que ρ_x é L^2-integrável, em particular é L^1-integrável. Daí elevando a desigualdade (4.8) ao quadrado

$$||\rho_x||_{L^2}^2 = \int \rho_x(y)^2 dm(y) \leq \liminf_{r\to 0} r^{-2}||\mu_x||_r^2 \tag{4.9}$$

Integrando a eq. (4.9)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^1} \rho_x(y)^2 dm^2(x,y) &\leq \int_{\mathbb{S}^1} \liminf_{r\to 0} r^{-2}||\mu_x||_r^2 dm(x)\\ &\leq \liminf \mathcal{I}(r)\\ &< \infty,\end{aligned}$$

como queríamos.

□

4.3 Análise da medida física de acordo com os parâmetros λ, ℓ

Nesta seção vamos estudar como se comporta a geometria da medida física μ de acordo com os valores atribuídos aos parâmetros λ e ℓ.

Recorde que estamos trabalhando com o sistema dinâmico

$$\begin{aligned}T : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto (\tau(x), \lambda y + f(x))\end{aligned}$$

onde $\tau(x) = \ell x$, $\ell \geq 2$. Demonstramos acima que existe uma medida de probabilidade em $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, que é T-invariante e ergódica e que

$$(\pi_{\mathbb{S}^1})_*\mu = m.$$

Observe que $\det DT(x,y) = \lambda\ell$, ou seja, T é uma aplicação de Jacobiano constante.

Lema A

Nesta pequena seção vamos provar um lema o qual chamaremos de Lema A e que será usado na prova da proposição 37.

Lema 21 (Lema A)**.** *Dado $x \in \mathbb{S}^1$ sejam $\{x_1, \dots, x_\ell\} = \tau^{-\ell}(x)$. Então*

$$\mu_x = \frac{1}{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} (g_x)_* \mu_{x_i}.$$

Proof. Para cada $i = 1, \dots, \ell$ seja $\eta_i : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{P}(i)$ o ramo inverso da aplicação τ. Então, pondo

$$\tau^{-1}(x) = \{x_1, \dots, x_\ell\}$$

temos que $x_i = \eta_i(x)$, $i = 1, \dots \ell$.

Dado $x \in \mathbb{S}^1$, considere

$$\eta_x := \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} (g_{\eta_i(x)})_* \mu_{\eta_i(x)}.$$

Vamos demonstrar que a família $\{\nu_x\}_{x \in \mathbb{S}^1}$ é uma desintegração da medida μ com respeito a partição em fibras $\{x\} \times \mathbb{R}$. Pela unicidade e quase todo ponto da desintegração isso implica que

$$\nu_x = \mu_x$$

em quase todo ponto e dá o resultado desejado. Portanto seja $E \subseteq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ um conjunto mensurável e seja

$$\alpha(E) = \int \nu_x(E) dm(x).$$

Nosso objetivo é provar que $\alpha(E) = \mu(E)$. Para isso, observe que, pela linearidade da integral:

$$\alpha(E) = \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\mathbb{S}^1} (g_{\eta_i(x)})_* \mu_{\eta_i(x)}(E) \frac{dm(x)}{\ell}.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \eta_i(x)$ em cada uma das integrais acima vemos que $dm(y) = dm(x)/\ell$ e portanto

$$\begin{aligned}
\alpha(E) &= \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\mathcal{P}(i)} (g_y)_* \mu_y(E) dm(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^1} (g_y)_* \mu_y(E) dm(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^1} \mu_y(g_y^{-1}(E)) dm(y) \\
&= \int_{\mathbb{S}^1} \mu_y(T^{-1}(E)) dm(y) \\
&= \mu(T^{-1}(E)) = \mu(E)
\end{aligned}$$

□

Aplicando o lema A à τ^{-n} obtemos o seguinte resultado que pode ser visto como um corolário do lema. Para isso seja $\mathcal{A}^q = \{1, \ldots, \ell\}^q$ e vamos considerar, como antes,

$$a : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{P}(a)$$

o ramo inverso de τ^q.

Corolário 3. *Como τ^{-q} possui ℓ^q ramos inversos, a cada $a \in \mathcal{A}^q$, então*

$$\mu_x = \frac{1}{\ell^q} \sum_{a \in \mathcal{A}^p} T_*^q \mu_{a(x)}.$$

Caso $\lambda\ell < 1$

Vamos considerar inicialmente o caso em que T contrai área. Iremos mostrar que as medidas condicionais da medida física μ são medidas de Dirac.

Proposição 37. *Se $\lambda\ell < 1$, então μ é singular com respeito a m^2.*

Antes de fazermos a prova da Proposição 37 vejamos três lemas. Para os dois primeiros a tripla $(X, \mathcal{B}, \mu)$ será um espaço de probabilidade qualquer e $\psi : X \to [0, 1]$ uma função mensurável.

Lema 22 (Desigualdade de Markov)**.** *Dado $\eta \in (0, 1)$ suponha que $\int \psi d\mu > 1 - \eta$. Então, o conjunto $B := \{x \in X : \psi(x) > 1 - \sqrt{\eta}\}$ cumpre $\mu(B) > 1 - \sqrt{\eta}$.*

Proof. De fato, note que $X = B \cup B^c$, daí

$$1 - \eta < \int_X \psi d\mu = \int_B \psi d\mu + \int_{B^c} \psi d\mu.$$

Por hipótese e por $\mu(B^c) = 1 - \mu(B)$, temos

$$\begin{aligned} 1 - \eta &< \mu(B) + (1 - \mu(B))(1 - \sqrt{\eta}) \\ &= \mu(B) + 1 - \sqrt{\eta} - \mu(B) + \mu(B)\sqrt{\eta} \\ &= 1 - \sqrt{\eta} + \mu(B)\sqrt{\eta}. \end{aligned}$$

Daí segue-se que

$$-\eta < -\sqrt{\eta} + \mu(B)\sqrt{\eta} = (\mu(B) - 1)\sqrt{\eta}.$$

Portanto, $1 - \sqrt{\eta} < \mu(B)$ como queríamos. □

Lema 23. *Dado $C > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ satisfaz $\int \psi d\mu > C\varepsilon$ então o conjunto $B := \{x \in X : \psi(x) > \varepsilon^2\}$ cumpre $\mu(B) > \varepsilon^2$.*

Proof. Segue o mesmo raciocínio da prova da Desigualdade de Markov. Escreva

$$C\varepsilon < \int_B \psi d\mu + \int_{B^c} \psi d\mu.$$

Novamente por hipótese, segue-se que

$$\begin{aligned} C\varepsilon &< \mu(B) + \varepsilon^2(1 - \mu(B)) \\ &= \mu(B) + \varepsilon^2 - \varepsilon^2\mu(B). \end{aligned}$$

Daí,

$$C\varepsilon - \varepsilon^2 < \mu(B)(1-\varepsilon^2) \implies \mu(B) > \frac{C\varepsilon}{1+\varepsilon} > \varepsilon^2$$

para todo ε suficientemente pequeno. $\square$

O terceiro lema é um corolário da linearidade dos ramos inversos e do teorema de Fubini.

Lema 24. *Dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe $\delta > 0$ tais que se $\Gamma \subset \mathbb{S}^1$ satisfaz*

$$m(\Gamma) > 1 - \delta$$

então, para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$\Gamma(n) := \{x \in \mathbb{S}^1 : \frac{\#\{y \in (\tau^{-n}(x) \cap \Gamma)\}}{\ell^n} > 0.75\}$$

satisfaz

$$m(\Gamma(n)) > 1 - \varepsilon.$$

Além disso $\delta \to 0$ se $\varepsilon \to 0$.

Proof. Para esta demonstração vamos utilizar a seguinte notação

$$\tau^{-n}(x) = \{x_1, \dots, x_{\ell^n}\}.$$

Seja $\Gamma(n) := \{x \in \mathbb{S}^1 : \frac{\mathrm{card}(\tau^{-n}(x)\cap\Gamma)}{\ell^n} > 0.75\}$. Por $m(\Gamma(n)) > 1-\varepsilon$ podemos supor que $m(\Gamma(n)^c) \geq \varepsilon$. Mais ainda, note que se $x \in \Gamma(n)^c$ temos

$$\frac{\mathrm{card}(\tau^{-n}(x) \cap \Gamma^c)}{\ell^n} \geq 0.25.$$

Considere $\mathcal{A}^n := \{1, \dots, \ell\}^n$ munido da medida de contagem ν, normalizada para que $\nu(\mathcal{A}^n) = 1$ e no espaço produto $\mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^n$ considere a medida produto $m \times \nu$. Agora seja

$$\Lambda := \{(x, i) : x_i \in \Gamma^c\} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathcal{A}^n$$

Aplicando o teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned} m \times \nu(\Lambda) &= \int \nu(\{i \in \mathcal{A}^n : x_i \in \Gamma^c\}) dm(x) \\ &\geq \int_{\Gamma(n)^c} \nu(\{i \in \mathcal{A}^n : x_i \in \Gamma^c\}) dm(x) \\ &\geq 0.25\varepsilon. \end{aligned}$$

Invertendo a ordem de integração podemos escrever

$$m \times \nu(\Lambda) = \frac{1}{\ell^n} \sum_{i=1}^{\ell^n} m(\{x \in \mathbb{S}^1 : x_i \in \Gamma^c\}).$$

Então

$$m \times \nu(\Lambda) = \frac{1}{\ell^n} \sum_{i=1}^{\ell^n} m(\{x \in \mathbb{S}^1 : x_i \in \Gamma^c\}) \geq 0.25\varepsilon$$

Pelo lema 23 obtemos

$$\nu(\{i \in \mathcal{A}^n : m(\{x \in \mathbb{S}^1 : x_i \in \Gamma^c\}) > \varepsilon^2\}) > \varepsilon^2.$$

Como cada ramo inverso é uma função $\Phi_i : \mathbb{S}^1 \to J(i)$, onde $J(i)$ é o i-ésimo intervalo da partição homogênea de $\mathbb{S}^1$ em ℓ^n intervalos, que é linear com derivada $1/\ell^n$, temos que a imagem do conjunto $\{x \in \mathbb{S}^1 : x_i \in \Gamma^c\}$ pelo ramo inverso Φ_i possui medida igual a

$$\frac{m(\{x \in \mathbb{S}^1 : x_i \in \Gamma^c\})}{\ell^n}.$$

Como os intervalos $J(i)$ podem ser tomados dois-a-dois disjuntos deduzimos de $\nu(\{i \in \mathcal{A}^n : m(\{x \in \mathbb{S}^1 : x_i \in \Gamma^c\}) > \varepsilon^2\}) > \varepsilon^2$ que

$$m(\Gamma^c) \geq \varepsilon^2 \ell^n \times \frac{\varepsilon^2}{\ell^n} = \varepsilon^4,$$

o que é absurdo se escolhermos $\delta < \varepsilon^4$.

$\square$

Com os três lemas em mãos estamos aptos a provar a Proposição 37, ou seja, que a medida μ é singular com respeito à Lesbegue quando o Jacobiano de T é menor do que 1.

Proof da prop. 37. Vamos usar nesta demonstração um argumento inspirado no trabalho de David Ruelle e Amie Wilkinson [RW01].

Tome $R > 0$ de tal modo que

$$\mu(\mathbb{S}^1 \times [-R, R]) > 0.5.$$

Agora tome $N \in \mathbb{N}$ e uma cobertura de $\mathbb{S}^1 \times [-R, R]$ por N bolas de raio $1/10$. Dado $x \in \mathbb{S}^1$, sejam

$$U_1(x), \ldots, U_{k(x)}(x)$$

as bolas desta cobertura que intersectam $\{x\} \times \mathbb{R}$. Note que em particular $k(x) \leq N$. Defina

$$\xi(x) = \inf\{\sum_{j=1}^{k} \operatorname{diam} I_j : I_j = B_{r_j}(p_j) \subseteq [-4R, 4R] \text{ e } \mu_x(\cup_{j=1}^{k} I_j) > 0.5\}.$$

Dito de outra forma, $\xi(x)$ é o ínfimo das somas dos diâmetros de bolas na coleção de todas as bolas cuja união possui medida μ_x maior do que 0.5. Como $U_1(x), \ldots, U_{k(x)}(x)$ são todas as bolas da cobertura de $\mathbb{S}^1 \times [-R, R]$ que intersectam a fibra $\{x\} \times \mathbb{R}$, devemos ter

$$\mu_x(\cup_{j=1}^{k(x)} U_j(x)) > 0.5.$$

Agora seja $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_x(y) = \lambda y + f(x).$$

Daí, como $T(x, y) = (\tau(x), g_x(y))$ e g é invertível, temos o lema A em mãos.Temos como consequência por indução que, se

$$\tau^{-n}(x) = \{x_1, \ldots, x_{\ell^n}\},$$

então

$$\mu_x = \frac{1}{\ell^n} \sum_{i=1}^{l^n} (g^n_{x_i})_* \mu_{x_i},$$

onde $g^n_{x_i} = g_{\tau^{n-1}(x_i)} \circ \cdots \circ g_{x_i}$.

Afirmação 38. *Seja* $\xi = ess\sup \xi(x)$. *Então* $\xi = 0$.

Proof da Afirmação 38. Suponha por contradição que $\xi > 0$. Então existe um $\varepsilon > 0$ e um conjunto $A \subset \mathbb{S}^1$ com $m(A) > 2\varepsilon$ satisfazendo

$$a \in A \implies \xi(a) > \xi/2.$$

Aplicando o lema 24, escolha $\delta > 0$ com $\delta < \varepsilon$ suficientemente pequeno para que

$$0.75(1-\delta) > 0.5.$$

Seja $R = R(\delta)$ tal que $\mu(\mathbb{S}^1 \times [-R, R]) > 1 - \delta^2$. Seja $N \in \mathbb{N}$ (dependendo de δ) o número de bolas de raio $1/10$ que cobrem $\mathbb{S}^1 \times [-4R, 4R]$, ou seja, o mesmo N estabelecido no início da prova. Dado $x \in \mathbb{S}^1$ considere as bolas $U_1(x), \ldots, U_{k(x)}(x)$ e defina

$$B_x := \cup_{j=1}^{k(x)} U_j(x).$$

Então,

$$1 - \delta^2 < \mu(\cup(Bolas(1/10))) = \int \mu_x\left(B_x\right) dm(x).$$

Pela desigualdade de Markov segue que o conjunto

$$\Gamma := \{x \in \mathbb{S}^1; \mu_x(B_x) > 1 - \delta\}$$

satisfaz

$$m(\Gamma) > 1 - \delta.$$

Agora tome $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente para que

$$4(\lambda\ell)^n NR < \xi/2.$$

Daí, temos que

$$m(\Gamma(n)) > 1 - \varepsilon \text{ e } m(\Gamma) > 1 - \delta > 1 - \varepsilon$$

o que implica

$$m(\Gamma \cap \Gamma(n)) > 1 - 2\varepsilon.$$

Portanto, $m(A \cap \Gamma \cap \Gamma(n)) > 0$. Seja $x \in A \cap \Gamma \cap \Gamma(n)$ e considere como antes $\tau^{-n}(x) = \{x_1, \ldots, x_{\ell^n}\}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, \ell^n\}$ defina

$$B := \cup_{i=1}^{\ell^n} g_{x_i}^n(B_{x_i})$$

Como B é um união de intervalos, devemos ter

$$\begin{aligned}
\xi(x) &\leq \sum_{I \in B} \operatorname{diam} I \\
&\leq \sum_{i=1}^{\ell^N} \sum_{j=1}^{k(x_i)} \operatorname{diam} g_{x_i}^n(U_j(x_i)) \\
&\leq \ell^n N 2R\lambda^n \\
&= (\ell\lambda)^n 2NR \\
&< \xi/2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela definição de $x \mapsto \{U_j(x)\}_{j=1}^{k(x)}$ temos que

$$\mu_{x_i}(B_{x_i}) > 0.5.$$

Seja

$$B \subseteq \{x\} \times [-2R, 2R],$$

a menos de tomar R grande para que $Im(f) \subseteq [-R, R]$. Observe que $B_{x_i} \subseteq g_{x_i}^{-n}(B)$ para todo $i = \{1, \ldots, \ell^n\}$ e portanto

$$\begin{aligned}
\mu_x(B) &= \frac{1}{\ell^n} \sum_{i=1}^{\ell^n} \mu_{x_i}(g_{x_i}^{-n}(B)) \\
&\geq \frac{1}{\ell^n} \sum_{i=1}^{\ell^n} \mu_{x_i}(B_{x_i}) \\
&\geq \frac{1}{\ell^n} \sum_{y \in \Gamma \cap \tau^{-n}(x)} \mu_y(B_y) \\
&> 0.75(1-\delta) > 0.5
\end{aligned}$$

o que é um absurdo já que contradiz o fato de $x \in A$. □

Isso prova que para m-para quase todo ponto $x \in \mathbb{S}^1$, para todo ε, é possível encontrar finitos intervalos $I_1, \ldots, I_k \subseteq \{x\} \times [-4R, 4R]$ tais que

$$m(\cup_{k=1}^{k} I_j) < \varepsilon \text{ e } \mu_x(\cup_{j=1}^{k} I_j) > 0.5.$$

Fazendo $\varepsilon = 1/n$ e fazendo um argumento diagonal obtemos um conjunto $\hat{I} \subseteq \{x\} \times [-4R, 4R]$, no máximo enumerável, tal que

$$m(\hat{I}) = 0 \text{ e } \mu_x(\hat{I}) > 0.5.$$

Pelo teorema de Fubini, isso implica que

$$m^2(\cup_{x \in \mathbb{S}^1} \{x\} \times \hat{I}(x)) = 0 \text{ e } \mu(\cup_{x \in \mathbb{S}^1} \{x\} \times \hat{I}(x)) > 0.5,$$

e portanto μ é singular.

□

Caso $\lambda\ell > 1$

Vamos considerar agora o caso em que $\lambda\ell > 1$. Vamos demonstrar que, nesse caso, é possível exibir exemplos de funções $f \in C^2(\mathbb{S}^1)$ para as quais o sistema dinâmico associado T possui uma medida física singular. Mais precisamente:

Proposição 39. *Dados $\lambda \in (0, 1), \ell > 2$ satisfazendo $\lambda\ell > 1$, existe $f \in \mathbb{C}^2(\mathbb{S}^1; \mathbb{R})$ tal que a medida física μ do sistema*

$$\begin{aligned}
T : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \\
(x, y) &\mapsto (\tau(x), \lambda y + f(x))
\end{aligned}$$

é singular com respeito à Lebesgue.

Proof. Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})$ e defina $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ pondo

$$f(x) = \varphi(\tau(x)) - \lambda\varphi(x),$$

onde $\tau(x) = \ell x$ mod1. Observe que $K = \mathrm{graf}(\varphi)$ é um conjunto compacto e invariante. Com efeito, se $x \in \mathbb{S}^1$ então

$$T(x, \varphi(x)) = (\tau(x), \lambda\varphi(x) + f(x)) = (\tau(x), \varphi(\tau(x))) \in K.$$

Além disso, dado $a \in \mathcal{A}^p$ temos que

$$\begin{aligned} f(\tau^{p-1}(a(x))) + \lambda f(\tau^{p-2}(a(x))) + \cdots + \lambda^{p-1} f(\tau(a(x))) & \\ &= \varphi \circ \tau^p(a(x)) - \lambda\varphi \circ \tau^{p-1}(a(x)) + \lambda\varphi \circ \tau^{p-1}(a(x)) \\ &- \lambda^2\varphi(\tau^{p-2}(a(x))) + \cdots - \lambda^p\varphi(\tau(a(x))) \\ &= \varphi \circ \tau^p(a(x)) - \lambda^p\varphi(\tau(a(x))) \end{aligned}$$

Como $\tau^p(a(x)) = x$, por definição, obtemos

$$\sum_{i=1}^{p-1} \lambda^{i-1} f(\tau^{p-i}(a(x))) = \varphi(x) - \lambda^p\varphi(\tau(a(x))).$$

Portanto se $a \in \mathcal{A}^\infty$, como $\lambda < 1$ temos

$$\sum_{i=1}^{-\infty} \lambda^{i-1} f([a]_i(x)) = \varphi(x).$$

Isso prova que, nesse caso, a conjugação Ψ é dada por

$$\Psi(x, a) = (x, \varphi(x)).$$

Como $\mu = \Psi_*(m \times \nu)$ vemos que

$$\mathrm{supp}(\mu) \subseteq K,$$

e portanto, como $m^2(K) = 0$, deduzimos que μ é singular com respeito à Lebesgue.

□

Observe que em ambos casos analisados obtivemos medidas físicas singulares com respeito à Lebesgue. Isso significa que para determinada escolha dos parâmetros λ, ℓ e f a medida física μ possui comportamento totalmente oposto ao comportamento da medida de Lebesgue.

Essa pequena conclusão nos leva fazer o seguinte questionamento: será que uma escolha de parâmetros λ, ℓ e f de tal modo que a medida μ é absolutamente contínua com respeito à Lebesgue ? Ou seja, é possível fazer tais escolhas de parâmetros para que μ tenha comportamento parecido com a medida de Lebesgue ?

Mais concretamente:

Problema 40. *Existem λ, ℓ e f tais que a medida física μ de T é regular ?*

Naturalmente estes questionamentos nos remetem ao problema posto no capítulo 3 que essencialmente envolve saber se existe uma escolha de parâmetro λ para o qual as convoluções de Bernoulli ν_λ sejam absolutamente contínua com respeito à Lebesgue.

Em sua essência os problemas são os mesmos. Não é atoa que no próximo capítulo utilizaremos a condição de transversalidade usada para garantir a regularidade de ν_λ, para provar que de fato existem os casos em que μ é absolutamente contínua.

CHAPTER 5

Transversalidade das variedades instáveis e continuidade absoluta

Neste capítulo iremos concluir este trabalho apresentando uma versão devida a Tsujii do argumento de transversalidade usada por Peres e Solomyak que explicamos no capítulo 3.

A ideia de base é que se as variedades instáveis de T forem suficientemente separadas pelos diferentes valores de $a \in \mathcal{A}^\infty$ então a continuidade absoluta "horizontal" da medida física pode ser espalhada pelo espaço todo.

5.1 Variedades Instáveis e a condição de transversalidade

Com a conjugação Ψ ao produto torto simbólico, ainda que o mapa T não seja invertível, podemos parametrizar cada forma de ir ao passado por um ponto $a \in \mathcal{A}^\infty$.

Além disso, os gráficos de $x \mapsto \mathcal{S}_\infty(x, a)$ constitui um pedaço da variedade instável associada a esta escolha de passado. Mais precisamente.

Lema 25. *Seja T_a^{-n} o ramo inverso de T parametrizado por $a \in \mathcal{A}^\infty$. Dados $x, \hat{x} \in \mathbb{S}^1$, se $y = \mathcal{S}_\infty(x, a)$ e $\hat{y} = \mathcal{S}_\infty(\hat{x}, a)$ então*

$$d\left(T_a^{-n}(x, y), T_a^{-n}(\hat{x}, \hat{y})\right) \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Proof. Seja $[a]_n = (a_1, \ldots, a_n)$ e seja $[a]_n(x)$ o único ponto no átomo $\mathcal{P}([a]_n)$ tal que $\tau^n([a]_n(x)) = x$.

Observe que, por definição

$$([a]_n(x), \mathcal{S}_\infty([a]_n(x), \beta_x^n(a)) = \Psi([a]_n(x), \beta_x^n(a)),$$

e como

$$\begin{aligned} T^n \circ \Psi([a]_n(x), \beta_x^n(a)) &= \Psi \circ \hat{T}([a]_n(x), \beta_x^n(a)) \\ &= \Psi(x, a) \\ &= (x, \mathcal{S}_\infty(x, a)), \end{aligned}$$

deduzimos que

$$T_a^{-n}(\mathrm{graf}(\mathcal{S}_\infty(x, a)) = \mathrm{graf}(\mathcal{S}_\infty([a]_n(x), \beta_x^n(a)).$$

Como

$$d([a]_n(x), [a]_n(\hat{x})) \leq \ell^{-n},$$

então segue-se que T_a^{-n} contrai exponencialmente $\text{graf}(\mathcal{S}_\infty(x,a))$. $\square$

É importante mencionar que a função $\mathcal{S}_\infty(.,a)$ é descontínua no zero, pois os ramos inversos de τ^i são todos descontínuos em zero, quando o zero é visto como um ponto do círculo. E essa é justamente a visão com a qual estamos trabalhando, τ é uma aplicação definida em $\mathbb{S}^1$ e nesse caso, diferentemente do intervalo, temos $1 = 0$.

Desse modo, dado $a \in \mathcal{A}^q$ e $c \in \mathcal{A}^p$ a função $\mathcal{S}_q(.,a)$ pode ser descontínua no fecho de $\mathcal{P}(c)$ ($\overline{\mathcal{P}(c)}$) caso $\mathcal{P}(c)$ tenha zero como ponto final à direita. Entretanto, podemos estender a função $\mathcal{S}_q(.,a)$ ao $\overline{\mathcal{P}(c)}$. Denotaremos essa extensão por $\mathcal{S}_{q,c}(.,a)$.

Definição 41. *Sejam $a, b \in \mathcal{A}^q$ e $c \in \mathcal{A}^p$, e considere $\varepsilon(q) > 2\delta(q)$. Dizemos que as funções $\mathcal{S}_q(.,a)$ e $\mathcal{S}_q(.,b)$ são **(ε,δ)-transversais em** $\mathcal{P}(c)$ se algumas das condições ocorrem*

$$|\mathcal{S}_{q,c}(x,a) - \mathcal{S}_{q,c}(x,b)| > \varepsilon(q) \;\; ou \;\; \left|\frac{d}{dx}\mathcal{S}_{q,c}(x,a) - \frac{d}{dx}\mathcal{S}_{q,c}(x,b)\right| > \delta(q)$$

*para todo $x \in \overline{\mathcal{P}(c)}$. Caso contrário, dizemos que as funções são **(ε,δ)-tangentes em** $\mathcal{P}(c)$.*

Para facilitar as futuras contas os $\varepsilon(q)$ e $\delta(q)$ da definição acima serão denotados apenas por ε e δ. Mais ainda, a notação $a \pitchfork b$ significa que as funções $\mathcal{S}_q(.,a)$ e $\mathcal{S}_q(.,b)$ são (ε,δ)-transversais e (ε,δ)-tangentes serão denotados por $a \not\pitchfork b$.

A definição de (ε,δ)-transversalidade dada acima é proposta por Tsujii em [Tsu01]. Por outro lado em um artigo posterior, Artur Ávila, Sébastien Gouëzel e o próprio Tsujii deram uma outra versão de transversalidade em [AGT06].Essa outra versão é mais forte que apresentada neste texto, mais ainda eles apresentam uma estimativa para o δ. A seguir veremos como obter esta estimativa

Primeiro lembremos que para uma palavra $a \in \mathcal{A}^q$ de tamanho finito a imagem do segmento $\mathcal{P}(a) \times \{0\} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ por T^q é o gráfico da função $\mathcal{S}_q$ dada por

$$\mathcal{S}_q(x,a) = \sum_{i=1}^{q} \lambda^{i-1} f([a]_i(x))$$

Ao considerarmos uma palavra de tamanho infinita, $a \in \mathcal{A}^\infty$, podemos definir

$$\mathcal{S}_\infty(x,a) = \lim_{i\to\infty} \mathcal{S}_\infty([a]_i(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} f([a]_i(x))$$

Note que pelo Lema 18 o limite acima existe, além disso a função $\mathcal{S}_\infty$ é de classe C^2 exceto na origem. Isso ocorre, pois para $r = 0,1,2$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda^{i-1}\frac{d^r}{dx^r} f([a]_i(x))| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1}\ell^{-ir}\|f\|_{C^2} < \infty \tag{5.1}$$

onde

$$\|f\|_{c^2} = \sup_{x\in\mathbb{S}^1} \max\{|f(x)|, |\frac{d}{dx}f(x)|, |\frac{d^2}{dx^2}f(x)|\}$$

Agora pondo $\alpha := (1-\lambda)^{-1}\|f\|_{C^2}$, segue-se da estimativa (5.1) que

$$\sup_{x\in\mathbb{S}^1\setminus\{0\}} \max\{|\mathcal{S}(x,a)|, |\frac{d}{dx}\mathcal{S}(x,a)|, |\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{S}(x,a)|\} \leq \infty \tag{5.2}$$

para todo $a \in \mathcal{A}^q$ de tamanho finito ou infinito $1 \leq q \leq \infty$. Além disso,

$$|\frac{d^r}{dx^r}\mathcal{S}(x,au) - \frac{d^r}{dx^r}\mathcal{S}(x,a)| \leq \sum_{i=q+1}^{\infty} \lambda^{i-1}\ell^{-ir}\|f\|_{C^2} \leq \lambda^q\ell^{-qr}\alpha \tag{5.3}$$

para $a \in \mathcal{A}^q$, com $q < \infty$, $u \in \mathcal{A}^\infty$ e $r = 0, 1, 2$.

Portanto, o δ da (ε,δ)-transversalidade pode ser tomado sendo $\delta = \lambda^q\ell^{-q}\alpha$.

A seguir iremos definir o conjunto dos pontos que não satisfazem a condição de (ε,δ)-transversalidade na partição $\mathcal{P}(c)$.

Definição 42. *Para $1 \leq p, q < \infty$, $c \in \mathcal{A}^p$ e $\varepsilon, \delta > 0$, defina o seguinte conjunto*

$$E(q,c;\varepsilon,\delta) = \{(a,b) \in \mathcal{A}^q \times \mathcal{A}^q\text{: existem } u,v \in \mathcal{A}^\infty \text{ tais que } a \not\pitchfork b\}$$

Agora definimos

$$e(q,p;\varepsilon,\delta) = \max_{c\in\mathcal{A}^p}\max_{a\in\mathcal{A}^q} \#\{b \in \mathcal{A}^q : (a,b) \in E(q,c;\varepsilon,\delta)\}$$

onde # é a cardinalidade do respectivo conjunto.

Observação 43. *Note que $e(q,p;\varepsilon,\delta)$ decresce com respeito a p e cresce com respeito a ε e δ. Desse modo, tome*

$$e(q) = \min\{e(q,p;\varepsilon,\delta) : \varepsilon,\delta > 0, p \geq 1\} = \lim_{p\to\infty} e(q,p;\varepsilon,\delta).$$

Note que a quantidade $e(q)$ mede a quantidade de aproximações (em escala ℓ^{-q}) das variedades instáveis de T que não são (ε,δ)-transversais.

A ideia, implementada com sucesso por Tsujii, é que se $e(q)$ apresenta um crescimento mais lento que o Jacobiano de T, então há suficiente transversalidade para rodar o argumento do capítulo 3.

Definição 44. *Dizemos que T satisfaz a* ***condição de transversalidade de Tsujii*** *se existe $q \in \mathbb{N}$ tal que*

$$e(q) < (\lambda\ell)^q.$$

Um fato muito importante é que esta condição é aberta no espaço dos parâmetros que determinam o mapa T. Isto é uma consequência do seguinte:

Lema 26. *Fixado $q \in \mathbb{N}$, a função $f \in C^2(\mathbb{S}^1;\mathbb{R}) \mapsto e(q) \in \mathbb{N}$ é semi-contínua superiormente.*

Proof. Observe que o valor $\mathcal{S}_\infty(x,a)$ depende continuamente de $a \in \mathcal{A}^\infty$ na topologia C^2. Isto segue diretamente da estimativa (5.3).

Da mesma forma. $\mathcal{S}_\infty(x,a)$ depende continuamente de f na topologia C^2. Isto implica que a condição de transversalidade da definição 44 é aberta em f e portanto a quantidade $e(q,p;\varepsilon,\delta)$ é localmente constante em f. Desse modo, seja $\gamma > 0$. Daí, por definição, existem $p \geq 1$ e $\varepsilon,\delta > 0$ tais que

$$e_f(q,p;\varepsilon,\delta) < e_f(q) + \gamma.$$

Pela discussão acima, se g está suficientemente próximo de f então $e_f(q,p;\varepsilon,\delta) = e_g(q,p;\varepsilon,\delta)$. Portanto,

$$e_g(q) \leq e_q(q,p;\varepsilon,\delta) < e_f(q) + \gamma.$$

Isto estabelece a semi-continuidade e completa a prova. $\square$

Corolário 4. *O conjunto $\mathcal{T} \subseteq (\frac{1}{2}, 1) \times C^2(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})$ dos pares (λ, f) para os quais T a cumpre a condição de transversalidade de Tsujii é aberto.*

A seguir vamos ver que o conjunto $\mathcal{T}$ é não-vazio.

Lema 27. *Seja $\ell = 2$, $0.5 < \lambda \leq 0.51$ e $f(x) = sen 2\pi x$. Então $(\lambda, f) \in \mathcal{T}$.*

Proof. Como $\ell = 2$ estamos considerando o espaço $\mathcal{A} = \{0,1\}$. Para mostrar que a medida μ é absolutamente contínua, basta provarmos que $e(1) = 1$, e com isso utilizar a proposição 50.

Afirmação 45. $e(1) = 1$.

Proof. Sejam $a, b \in \mathcal{A}^\infty$ tais que $[a]_1 = 0$ e $[b]_1 = 1$. Usando qualquer programa que faça cálculo podemos concluir que para $|x| \leq \frac{2}{5}$ tem-se

$$\begin{aligned}
|\frac{d}{dx}\mathcal{S}_\infty(x,a) - \frac{d}{dx}\mathcal{S}_\infty(x,b)| &= |\frac{1}{2}cos([a]_1(x) - \frac{1}{2}cos([b]_1(x))| \\
&\quad + |\frac{\lambda}{4}cos([a]_2(x)) - \frac{\lambda}{4}cos([b]_2(x))| + \ldots \\
&> 2\frac{1}{2}cos\frac{2\pi}{5} - \frac{\lambda}{4}(cos\frac{\pi}{5} + cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5})) - \frac{\lambda^2}{4}\frac{1}{1-\lambda/2} \\
&> 0
\end{aligned}$$

No caso em que $\frac{2}{5} \leq x \leq 1 - \frac{2}{5}$, cada um dos pontos $[a]_2(x)$ e $[b]_2(x)$ estão contidos em uma vizinhança de tamanho $\frac{1}{40}$ dos números $\frac{k}{8}$, onde $k = 1, 3, 5, 7$. Então

$$|\mathcal{S}_\infty(x,a) - \mathcal{S}_\infty(x,b)| > 2\{sen(2\pi/5) - \lambda sen(3\pi/10) - \lambda^2(1-\lambda)^{-1}\} > 0.$$

Portanto, $e(1) = 1$ $\square$

Pela proposição 50, $(\lambda, f) \in \mathcal{T}$ $\square$

Em seu artigo, Tsujii demonstra um resultado muito mais forte cuja demonstração não daremos aqui.

Teorema 46. *Para todo $\ell \geq 2$, $\mathcal{T}$ contém um subconjunto denso de $(\frac{1}{\ell}, 1) \times C^2(\mathbb{S}^1;\mathbb{R})$.*

O grande interesse de estudar o tamanho do conjunto $\mathcal{T}$ vem do fato de seus elementos corresponderem aos sistemas com medida física absolutamente contínua. O próximo resultado será chamado de Teorema A.

Teorema 47. *Se $(\lambda, f) \in \mathcal{T}$, então a medida física do sistema T é absolutamente contínua com respeito à Lebesgue.*

O objetivo das próximas seções será demonstrar o resultado acima. Então daqui por diante fixamos $(\lambda, f) \in \mathcal{T}$. Pelo corolário 2 temos que provar que

$$\liminf_{r\to 0} \mathcal{I}(r) < +\infty.$$

5.2 Primeiras estimativas

Observe que o corolário 3 obtido pelo lema A nos permite dar as seguintes definições:

$$\mathcal{I}(r,c) := r^2 \int_{\mathcal{P}(c)} \|\mu_x\|_r^2 dm(x)$$

$$\mathcal{I}(r,c;a,b) := r^{-2} \int_{\mathcal{P}(c)} \langle T_*^q \mu_{a(x)} \ , \ T_*^q \mu_{b(x)} \rangle_r dm(x)$$

Com isso, começamos a prova do Teorema A dando o resultado a seguir.

Proposição 48. *Sejam $a, b \in \mathcal{A}^q$ e $c \in \mathcal{A}^p$. Se as funções $\mathcal{S}_\infty(., au)$ e $\mathcal{S}_\infty(., bv)$ são (ε, δ)-transversais em $\mathcal{P}(c)$ para todos $u, v \in \mathcal{A}^\infty$, então*

$$\mathcal{I}(r,c;a,b) \leq 8\delta^{-1}\ell^{-p} max\{4\alpha/\varepsilon, \ell^p\} \tag{5.4}$$

para $0 < r < \varepsilon/4$.

Proof. Seja $I_r = (-r, r)$ um intervalo de $\mathbb{R}$ e considere $\mathbb{1}_{I_r}$ sendo a função característica de I_r. Por definição,

$$\mathcal{I}(r,c;a,b) = r^{-2} \int_{\mathcal{P}(c)} \langle T_*^q \mu_{a(x)} \ , \ T_*^q \mu_{b(x)} \rangle_r dm(x)$$

Ou seja para obtermos a desigualdade (5.4) precisamos estimar o integrando acima. Desse modo, segue-se do produto interno estabelecido na seção 2.3

$$\langle T_*^q \mu_{a(x)} \ , \ T_*^q \mu_{b(x)} \rangle_r = \int_{\mathbb{R}} T_*^q \mu_{a(x)}(I_r) T_*^q \mu_{b(x)}(I_r) dz$$

Observe que $T_*^q \mu_{a(x)}(I_r) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_r}(s-z) d\mu_{a(x)}(s)$, pois $\mathbb{1}_{B_r(z)}(s) = \mathbb{1}_r(s-z)$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} T_*^q \mu_{a(x)}(I_r) T_*^q \mu_{b(x)}(I_r) dz &= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_{I_r}}(s-z) d\mu_{a(x)}(s) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_r}(t-z) d\mu_{b(x)}(t)) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} (\int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{I_r}(s-z) \mathbb{1}_{I_r}(t-z) d(\mu_{a(x)} \times \mu_{b(x)})(s,t)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_r}(s-z) \mathbb{1}_{I_r}(t-z) d(\mu_{a(x)} \times \mu_{b(x)})(s,t))
\end{aligned}$$

onde na última igualdade foi usado o Teorema de Fubini.

Afirmação 49. *Para todo $z \in I_r$, $\mathbb{1}_{I_r}(s-z)\mathbb{1}_{I_r}(t-z) \leq \mathbb{1}_{I_{2r}}(s-t)$*

Desse modo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_r}(s-z) \mathbb{1}_{I_r}(t-z) d(\mu_{a(x)} \times \mu_{b(x)})(s,t)) \leq 2r \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{I_{2r}}(s-t) d(\mu_{a(x)} \times \mu_{b(x)})(s,t)) \tag{5.5}$$

Lema 28. $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_r}(s) dT_*^q \mu_{a(x)}(s) = \int_{\mathcal{A}^\infty} \mathbb{1}_{I_r}(\mathcal{S}_\infty(x, au)) d\nu(u)$

Proof. De fato, seja $\mu_{a(x)} = \Psi_*(\delta_{a(x)} \times \nu)$ e considere a conjugação $T \circ \Psi = \Psi \circ \hat{T}$. Então,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_r}(s) dT^q_* \mu_{a(x)}(s) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_r} \circ T^q d\mu_{a(x)}(s) \\
&= \int_{\mathcal{A}^\infty} \mathbb{1}_{I_r} \circ T^q \circ \Psi(a(x), u) d(\delta_{a(x)} \times \nu)(u) \\
&= \int \mathbb{1}_{I_r} \circ \Psi \circ \hat{T}^q(a(x), u) d(\delta_{a(x)} \times \nu)(u).
\end{aligned}$$

Agora observe que $\hat{T}^q(a(x), u) = (x, au)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int \mathbb{1}_{I_r} \circ \Psi \circ \hat{T}^q(a(x), u) d(\delta_{a(x)} \times \nu)(u) &= \int \mathbb{1}_{I_r} \circ \Psi(x, au) d(\delta_{a(x)} \times \nu)(u) \\
&= \int \mathbb{1}_{I_r}(x, \mathcal{S}_\infty(x, au)) d(\delta_{a(x)} \times \nu)(u) \\
&= \int_{\mathcal{A}^\infty} \mathbb{1}_{I_r}(\mathcal{S}_\infty(x, au)) d\nu(u)
\end{aligned}$$

□

Daí, o lema acima nos permite escrever a desigualdade (5.5) da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{I_r}(s-z) \mathbb{1}_{I_r}(t-z) d(\mu_{a(x)} \times \mu_{b(x)})(s,t)\Big) &\leq 2r \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{I_{2r}}(s-t) d(\mu_{a(x)} \times \mu_{b(x)})(s,t)) \\
&= 2r \int_{\mathcal{A}^\infty \times \mathcal{A}^\infty} \mathbb{1}_{I_r}(\mathcal{S}_\infty(x, au) - \mathcal{S}_\infty(x, bv)) d(\nu \times \nu)(u, v)
\end{aligned}$$

Então a estimativa do integrando de $\mathcal{I}(r, c; a, b)$ é

$$\langle T^q_* \mu_{a(x)} \ , \ T^q_* \mu_{b(x)} \rangle_r \leq 2r \int_{\mathcal{A}^\infty \times \mathcal{A}^\infty} \mathbb{1}_{I_r}(\mathcal{S}_\infty(x, au) - \mathcal{S}_\infty(x, bv)) d(\nu \times \nu)(u, v)$$

Desse modo ao multiplicarmos por r^{-2} e integramos ambos os lados sobre $\mathcal{P}(c)$, obtemos

$$\begin{aligned}
r^{-2} \int_{\mathcal{P}(c)} \langle T^q_* \mu_{a(x)} \ , \ T^q_* \mu_{b(x)} \rangle_r dm(x) &\leq r^{-2} \int_{\mathcal{P}(c)} \Big(2r \int_{\mathcal{A}^\infty \times \mathcal{A}^\infty} \mathbb{1}_{I_r}(\mathcal{S}_\infty(x, au) - \mathcal{S}_\infty(x, bv)) d(\nu \times \nu)(u, v)\Big) dm(x) \\
&= 2r^{-1} \int_{\mathcal{P}(c)} \Big(\int_{\mathcal{A}^\infty \times \mathcal{A}^\infty} \mathbb{1}_{I_r}(\mathcal{S}_\infty(x, au) - \mathcal{S}_\infty(x, bv)) d(\nu \times \nu)(u, v)\Big) dm(x) \\
&= 2r^{-1} \int_{\mathcal{A}^\infty \times \mathcal{A}^\infty} \Big(\int_{\mathcal{P}(c)} \mathbb{1}_{I_r}(\mathcal{S}_\infty(x, au) - \mathcal{S}_\infty(x, bv)) dm(x)\Big) d(\nu \times \nu)(u, v)
\end{aligned}$$

onde na última igualdade foi usado o Teorema de Fubini.

Agora defina o conjunto $L := \{x \in \mathcal{P}(c) : |\mathcal{S}_\infty(x, au) - \mathcal{S}_\infty(x, bv)| < 2r\}$. Com isso, podemos escrever

$$\int_{\mathcal{P}(c)} \mathbb{1}_{I_r}(\mathcal{S}_\infty(x, au) - \mathcal{S}_\infty(x, bv)) dm(x) = m(L)$$

Consequentemente,

$$\mathcal{I}(r,c;a,b) \leq 2r^{-1}\int_{\mathcal{P}(c)} m(L)d(\nu\times\nu)(u,v)$$

Ou seja, para obtermos a estimativa desejada basta provarmos que

$$m(L) \leq 4r\delta^{-1}\ell^{-p}\max\{4\alpha/\varepsilon, \ell^p\}$$

para todos $u, v \in \mathcal{A}^\infty$.

Para isso seja J uma componente conexa do conjunto $\{x \in \mathcal{P}(c) : |\mathcal{S}_\infty(x, au) - \mathcal{S}_\infty(x, bv)| < \varepsilon\}$ e defina $g(x) = \mathcal{S}_\infty(x, au) - \mathcal{S}_\infty(x, bv)$.

Seja $B = \{x \in J : |g(x)| < 2r\}$. Note que o conjunto B está bem definido, pois $0 < r < \frac{\varepsilon}{4}$. Caso $B = \emptyset$ a desigualdade é trivialmente satisfeita.

Desse modo, suponha $B \neq \emptyset$. Pela condição da (ε, δ)-transversalidade, temos que por $|g(x)| < \varepsilon$ devemos ter $|g'(x)| > \delta$ para todo $x \in J$. Então, aplicando o teorema do valor médio temos que dados $y \in B$ e $x \in J$ vale que

$$g(y) - g(x) = g'(z)(y - x),$$

para algum z entre y e x. Como $|g'(z)| > \delta$, segue-se

$$|y - x| = \frac{|g(y) - g(x)|}{|g'(z)|} \leq \frac{4r}{\delta}.$$

Como $B \subseteq J$ é um intervalo já que g é contínua, o seu comprimento não ultrapassa $\frac{4r}{\delta}$.

Agora seja A uma das componentes conexas de $J\backslash B$. Se $x \in A$, então

$$2r \leq |g(x)| < \varepsilon.$$

Vamos novamente aplicar a ideia de usar o teorema do valor médio para criar estimativas, mas dessa vez vamos estimar o comprimento de A. Antes observe que se $J = \mathcal{P}(c)$ então, por definição, $|g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathcal{P}(c)$ e nesse caso podemos estimar

$$m(J) = \ell^{-p}.$$

Se $J \subset \mathcal{P}(c)$ estritamente isto quer dizer que $|g|$ assume o valor ε em algum dos extremos de J. Ou seja, para $x \in A$, a função $|g|$ tem que crescer de $2r$ a ε. No entanto, como

$$|g'(x)| < 2r,$$

isto implica que o comprimento de A tem que ser, no mínimo,

$$|A| \geq \frac{\varepsilon - 2r}{2\alpha} > \frac{\varepsilon}{4\alpha}.$$

Portanto,

$$\frac{m(B)}{m(J)} \leq \frac{4r/\delta}{\min\{\varepsilon/4\alpha, \ell^{-p}\}} = 4r\delta^{-1}\max\{4\alpha/\varepsilon, \ell^p\}.$$

Somando sobre todas as componentes conexas, obtemos

$$m(L) \leq 4r\delta^{-1}\ell^{-p}\max\{4\alpha/\varepsilon, \ell^p\}.$$

□

Proposição 50. *Para* $p, q \in [1, \infty)$, $\varepsilon, \delta > 0$ *e* $r \in (0, \varepsilon/4)$, *temos*

$$\mathcal{I}(r) \leq \lambda^{-q}\ell^{-q}e(q,p;\varepsilon,\delta)\mathcal{I}(\lambda^{-q}r) + 8\delta^{-1}\max\{4\alpha/\varepsilon, \ell^p\} \tag{5.6}$$

Proof. Primeiramente observe que

$$\mathcal{I}(r) = \sum_{c\in\mathcal{A}^q}\mathcal{I}(r,c) = \sum_{c\in\mathcal{A}^q}\sum_{(a,b)\in\mathcal{A}^q\times\mathcal{A}^q}\ell^{-2q}\mathcal{I}(r,c;a,b)$$

Agora considere o par de pontos (a, b) em $\mathcal{A}^q \times \mathcal{A}^q$, mas que não pertencem ao conjunto $E(q, c; \varepsilon, \delta)$, isto é, estamos considerando apenas os pontos nos quais temos a condição da (ε, δ)-transversalidade sendo satisfeita. Desse modo, segue-se da Proposição 3 que

$$\mathcal{I}(r,c;a,b) \leq 8\delta^{-1}\max\{4\alpha/\varepsilon, \ell^p\}\ell^{-p}$$

Consequentemente,

$$\sum_{c\in\mathcal{A}^p}\sum_{(a,b)\notin E(q,c;\varepsilon,\delta)}\mathcal{I}(r,c;a,b) \leq \ell^p 8\delta^{-1}\max\{4\alpha/\varepsilon, \ell^p\}\ell^{-p} = 8\delta^{-1}\max\{4\alpha/\varepsilon, \ell^p\}$$

Assim até o momento obtemos a seguinte limitação

$$\sum_{c\in\mathcal{A}^p}\sum_{(a,b)\notin E(q,c;\varepsilon,\delta)}\ell^{-2q}\mathcal{I}(r,c;a,b) \leq 8\delta^{-1}\max\{4\alpha/\varepsilon, \ell^p\} \tag{5.7}$$

Para o que se segue precisamos de dois lemas

Lema 29. *Dados* $x \in \mathbb{S}^1$ *e* $a \in \mathcal{A}^q$. *Se* T_a^{-q} *é o ramo inverso associado, então existe um* $\alpha \in \mathbb{R}$, *que depende de* x *e* a, *tal que*

$$\begin{aligned} T_a^{-q} : \{x\} \times \mathbb{R} &\to \{a(x)\} \times \mathbb{R} \\ y &\mapsto T_a^{-q}(y) = \lambda^{-q}y + \alpha \end{aligned}$$

Lema 30. $\langle T_*^q\mu_{a(x)}\ ,\ T_*^q\mu_{a(x)}\rangle_r = \lambda^q\langle\mu_{a(x)}\ ,\ \mu_{a(x)}\rangle_{\lambda^{-q}r}$

Proof. De fato, considere $x \in \mathbb{S}^1$ e $a \in \mathcal{A}^q$. Daí, por definição,

$$\langle T_*^q\mu_{a(x)}\ ,\ T_*^q\mu_{a(x)}\rangle_r = \int_{\mathbb{R}}[T_*^q\mu_{a(x)}(I_r(z))]^2dz = \int_{\mathbb{R}}[\mu_{a(x)}(T^{-q}I_r(z))]^2dz \tag{5.8}$$

Segue-se do Lema 26 que a eq. (5.8) pode ser escrita como

$$\int_{\mathbb{R}}[\mu_{a(x)}((I_{\lambda^{-q}r}(T_a^{-q}(z)))]^2dz = \int_{\mathbb{R}}[\mu_{a(x)}((I_{\lambda^{-q}r}(z\lambda^{-q}+\alpha)))]^2dz \tag{5.9}$$

Agora façamos a seguinte mudança de variável

$$u = \lambda^{-q}z + \alpha \tag{5.10}$$

o que implica

$$du = \lambda^{-q}dz \iff \lambda^q du = dz \tag{5.11}$$

Desse modo, substituindo (5.10) e (5.11) em (5.9) obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} [\mu_{a(x)}(I_{\lambda^{-q}r}(u))]^2 \lambda^q du &= \lambda^q \int_{\mathbb{R}} [\mu_{a(x)}(I_{\lambda^{-q}r}(u))]^2 du \\ &= \lambda^q \langle \mu_{a(x)} \ , \ \mu_{a(x)} \rangle_{\lambda^{-q}r}\end{aligned}$$

como queríamos.

$\square$

Utilizando o Lema 27 vamos encontrar uma limitação para a eq. (5.7), mas dessa vez estaremos considerando o par de pontos (a,b) pertencentes ao conjunto $E(q,c;a,b)$. Pela desigualdade de Schwarz

$$\sum_{(a,b)\in E(q,c;\varepsilon,\delta)} \langle T_*^q \mu_{a(x)} \ , \ T_*^q \mu_{b(x)} \rangle_r \leq \sum_{(a,b)\in E(q,c;\varepsilon,\delta)} \|T_*^q \mu_{a(x)}\|_r \|T_*^q \mu_{b(x)}\|_r$$

Observe que o Lema 27 é válido para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}^q$. Então,

$$\begin{aligned}\sum_{(a,b)\in E(q,c;\varepsilon,\delta)} \|T_*^q \mu_{a(x)}\|_r \|T_*^q \mu_{b(x)}\|_r &= \lambda^q \sum_{(a,b)\in E(q,c;\varepsilon,\delta)} \|\mu_{a(x)}\|_{\lambda^{-q}r} \|\mu_{b(x)}\|_{\lambda^{-q}r} \\ &\leq \lambda^q \sum_{(a,b)\in E(q,c;\varepsilon,\delta)} \frac{\|\mu_{a(x)}\|^2_{\lambda^{-q}r} + \|\mu_{b(x)}\|^2_{\lambda^{-q}r}}{2} \\ &\leq \lambda^q e(q,p;\varepsilon,\delta) \sum_{a\in\mathcal{A}^q} \|\mu_{a(x)}\|^2_{\lambda^{-q}r}\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $r^{-2}\ell^{-2q}$:

$$\sum_{(a,b)\in E(q,c;\varepsilon,\delta)} \ell^{-2q} r^{-2} \langle T_*^q \mu_{a(x)} \ , \ T_*^q \mu_{b(x)} \rangle_r \leq r^{-2}\ell^{-2q}\lambda^q e(q,p;\varepsilon,\delta) \sum_{a\in\mathcal{A}^q} \|\mu_{a(x)}\|^2_{\lambda^{-q}r}$$

Analisemos separadamente o que ocorre em cada lado da desigualdade ao integramos ambos sobre $\mathbb{S}^1$, primeiro vejamos o lado esquerdo:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^1} \sum_{(a,b)\in E(q,c;\varepsilon,\delta)} \ell^{-2q} r^{-2} \langle T_*^q \mu_{a(x)} \ , \ T_*^q \mu_{b(x)} \rangle_r dx &= \sum_{c\in\mathcal{A}^p} \sum_{(a,b)\in E(q,c;\varepsilon,\delta)} \ell^{-2q} r^{-2} \int_{\mathcal{P}(c)} \langle T_*^q \mu_{a(x)} \ , \ T_*^q \mu_{b(x)} \rangle_r dm(x) \\ &= \sum_{c\in\mathcal{A}^p} \sum_{(a,b)\in E(q,c;\varepsilon,\delta)} \ell^{-2q} \mathcal{I}(r,c;a,b)\end{aligned}$$

Já no lado direito obtemos,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^1} r^{-2}\ell^{-2q}\lambda^q e(q,p;\varepsilon,\delta) \sum_{a\in\mathcal{A}^q} \|\mu_{a(x)}\|^2_{\lambda^{-q}r} dx &= r^{-2}\ell^{-2q}\lambda^q e(q,p;\varepsilon,\delta) \sum_{a\in\mathcal{A}^q} (\int_{\mathbb{S}^1} \|\mu_{a(x)}\|^2_{\lambda^{-q}r} dx) \\ &= r^{-2}\ell^{-2q}\lambda^q e(q,p;\varepsilon,\delta) \sum_{a\in\mathcal{A}^q} (\ell^q \int_{\mathcal{P}(a)} \|\mu_y\|^2_{\lambda^{-q}r} dy) \\ &= \ell^{-2q}\ell^q\lambda^q e(q,p;\varepsilon,\delta) \sum_{a\in\mathcal{A}^q} (r^{-2} \int_{\mathcal{P}(a)} \|\mu_y\|^2_{\lambda^{-q}r} dy) \\ &= \lambda^{-q}\ell^{-q} e(q,p;\varepsilon,\delta) \mathcal{I}(\lambda^{-q}r)\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{c\in\mathcal{A}^p}\sum_{(a,b)\in E(q,c;\varepsilon,\delta)}\ell^{-2q}\mathcal{I}(r,c;a,b)\leq\lambda^{-q}\ell^{-q}e(q,p;\varepsilon,\delta)\mathcal{I}(\lambda^{-q}r) \tag{5.12}$$

Para obter a desigualdade (5.6) basta juntar as estimativas construídas nas duas situações: $(a,b)\notin E(q,c;\varepsilon,\delta)$ e $(a,b)\in E(q,c;\varepsilon,\delta)$. Isto é, por (5.7) e (5.12), concluímos

$$\mathcal{I}(r)\leq\lambda^{-q}\ell^{-q}e(q,p;\varepsilon,\delta)\mathcal{I}(\lambda^{-q}r)+8\delta^{-1}max\{4\alpha/\varepsilon,\ell^p\}.$$

□

5.3 Garantindo a Continuidade Absoluta de μ

O resultado a seguir mostra que com as limitações obtidas na seção anterior, a medida física μ obtida no capítulo 4 é absolutamente contínua com respeito à Lebesgue.

Proposição 51. *Se $e(q)\leq\lambda^q\ell^q$ para algum inteiro q, então o par $(\lambda,f)\in\mathcal{T}^\circ$*

Proof. Como objetivo inicial vamos mostrar que a medida física μ de T é absolutamente contínua, e para isso utilizaremos o Corolário 2 da seção 4.2. Sejam $1\leq p,q<\infty$ e $\varepsilon>0$, $\delta>0$ com $0<r<\frac{\varepsilon}{4}$. Pela Proposição49, temos a estimativa

$$\mathcal{I}(r)\leq\lambda^{-q}\ell^{-q}e(q,p;\varepsilon,\delta)\mathcal{I}(\lambda^{-q}r)+8\delta^{-1}max\{4\alpha/\varepsilon,\ell^p\} \tag{5.13}$$

Pelo modo que definimos $e(q)$ podemos tomar p suficientemente grande e ε,δ pequenos de tal modo que $e(q)=e(q,p;\varepsilon,\delta)$. Além disso, tomemos $\beta=\lambda^{-q}\ell^{-q}e(q)$ e $R=8\delta^{-1}max\{\frac{4\delta}{\varepsilon},\ell^p\}$. Assim a eq. (5.13) pode ser escrita como

$$\mathcal{I}\leq\beta\mathcal{I}(\lambda^{-q}r)+R$$

Afirmação 52. $\mathcal{I}(\lambda^{nq}\frac{\varepsilon}{4})\leq\beta^n\mathcal{I}(\frac{\varepsilon}{4})+\sum_{i=0}^{n-1}\beta^iR$ *para* $n\in\mathbb{N}$.

Proof. De fato, fixe um $r_0<\lambda^{-q}\frac{\varepsilon}{4}$. Daí,

$$\mathcal{I}(\lambda^q r_0)\leq\beta\mathcal{I}(r_0)+R$$

Fazendo para $\mathcal{I}(\lambda^{2q}r_0)$, segue-se

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\lambda^{2q}r_0)&\leq\beta\mathcal{I}(\lambda^q r_0)+R\\&\leq\beta(\beta\mathcal{I}(r_0)+R)+R\\&=\beta^2\mathcal{I}(r_0)+\beta R+R\end{aligned}$$

Seguindo indutivamente para $n\in\mathbb{N}$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\lambda^{nq} r_0) &\le \beta^n \mathcal{I}(r_0) + (\beta^{n-1} + \cdots + \beta + 1)R \\ &= \beta^n \mathcal{I}(r_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \beta^i R\end{aligned}$$

como queríamos.

□

Observe que ao tomarmos o limite inferior na desigualdade da Afirmação acima, temos

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{I}(\lambda^{nq}\frac{\varepsilon}{4}) \le \frac{R}{1-\beta}$$

já que $\beta^n \mathcal{I}(\frac{\varepsilon}{4})$ tende a zero e por $\beta < 1$ a série geométrica converge. Então,

$$\liminf_{r\to 0} \mathcal{I}(r) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{I}(\lambda^{nq}\frac{\varepsilon}{4}) \le \frac{R}{1-\beta}$$

Portanto, pelo Corolário 2, a medida física μ da transformação T é absolutamente contínua.

□

Bibliography

[AGT06] A. Avila, S. Gouezel, and M. Tsujii. “Smoothness of solenoidal attractors”. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A* 15 (2006), pp. 21–35.

[BS02] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.

[Cas04] A. A. de Castro Jr. *Curso de teoria da medida*. IMPA, 2004.

[Dan12] S. Dani. “Ergodic Theory: with a view towards Number Theory. By Manfred Einsiedler Thomas Ward. Springer Verlag, London, 2011”. In: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 32.3 (2012), pp. 1157–1160.

[KKH95] A. Katok, A. Katok, and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. 54. Cambridge university press, 1995.

[Mat99] P. Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability*. 44. Cambridge university press, 1999.

[MT14] F. Micena and A. Tahzibi. “On the unstable directions and Lyapunov exponents of Anosov endomorphisms”. In: *arXiv preprint arXiv:1412.0629* (2014).

[PS96] Y. Peres and B. Solomyak. “Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof”. In: *Mathematical Research Letters* 3.2 (1996), pp. 231–239.

[Rud76] W. Rudin. “Principles of Mathematical Analysis”. In: *3rd ed.* (1976).

[RW01] D. Ruelle and A. Wilkinson. “Absolutely singular dynamical foliations”. In: *Communications in Mathematical Physics* 219.3 (2001), pp. 481–487.

[Sol95] B. Solomyak. “On the random series$\pm\lambda$ n (an Erdös problem)”. In: *Annals of Mathematics* 142.3 (1995), pp. 611–625.

[Tsu01] M. Tsujii. “Fat solenoidal attractors”. In: *Nonlinearity* 14.5 (2001), p. 1011.

[VO14] M. Viana and K. Oliveira. “Fundamentos da teoria ergódica”. In: *Rio de Janeiro: SBM* 90 (2014).

[Wen16] L. Wen. *Differentiable dynamical systems*. Vol. 173. American Mathematical Soc., 2016.