

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Análise
Disciplina: **Álgebra Linear - 2025.I**
Primeira Avaliação
Professor: Bruno Santiago

Questão 1 (2.5 pts). *Determine os vetores $u, v \in \mathbb{R}^4$ sabendo-se que as coordenadas de v são todas iguais, a última coordenada de u é igual a 3 e $u + v = (1, 2, 3, 4)$.*

Solução. Suponha que $v = (x, x, x, x)$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Como a última coordenada de u é igual a 3 podemos escrever $u = (a, b, c, 3)$. Logo,

$$u + v = (x + a, x + b, x + c, x + 3) = (1, 2, 3, 4).$$

Deduzimos que $x = 1$ e portanto $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$. □

Questão 2 (2.5 pts). *Seja X um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno, i.e. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Prove, para todos $x, y \in X$, vale a identidade*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Dê um contra-exemplo a identidade com uma norma que não provém de um produto interno.

Solução. Como $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$, segue que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

e portanto o resultado segue. Considerando em $\mathbb{R}^2$ a norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$, tomando $x = (1, 0)$ e $y = (0, 1)$ vemos que $x + y = (1, 1)$ e $x - y = (1, -1)$. Assim, $\|x + y\|_1 = \|x - y\|_1 = 2$. Portanto,

$$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 8,$$

ao passo que $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$. Como $8 > 4$, isso prova que a identidade não se verifica para a norma $\|\cdot\|_1$. □

Questão 3 (2.5 pts). *Seja X um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Decida se a afirmação a seguir é verdadeira ou falsa.*

Para todos $u, v, w \in X$, se u é ortogonal à soma $v + w$ então u é ortogonal à v e a w simultaneamente.

Justifique sua resposta.

Solução. A afirmação é falsa. Tome por contra-exemplo os vetores em $\mathbb{R}^2$

$$u = (-1, 1), v = (1, 0) \text{ e } w = (0, 1).$$

Então $v + w = (1, 1)$ é ortogonal à u , pois

$$\langle v, u + w \rangle = -1.1 + 1.1 = 0.$$

No entanto, $\langle u, v \rangle = -1.1 + 1.0 = -1$ e $\langle u, w \rangle = -1.0 + 1.1 = 1$, provando assim que u não é ortogonal a v e nem a w . □

Questão 4 (2.5 pts). *Seja $x = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \in \mathbb{R}^7$. Seja u um vetor colinear com x tal que $\|u\| = \pi$. Determine a quinta coordenada de u .*

Solução. Sendo u colinear com x deve existir um número real λ tal que

$$u = \lambda x = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda, 5\lambda, 6\lambda, 7\lambda).$$

Portanto,

$$\|u\|^2 = \sum_{\ell=1}^7 \lambda^2 \ell^2 = \lambda^2 140.$$

Se $\|u\| = \pi$ então deduzimos que $\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{140}}$. Segue que a quinta coordenada de u é $5\pi/\sqrt{140}$. $\square$