

1. Reescreva as seguintes operações com séries numa única série de potências

(a)

$$\sum_{n \geq 0} 3n^2 c_n x^{n-1} + \sum_{k \geq 0} 4c_k x^{k+2}$$

(b)

$$\sum_{n \geq 0} n(n-1)c_n x^n + 2 \sum_{n \geq 0} n(n-1)c_n x^{n+2} + 5 \sum_{n \geq 0} n c_n x^{n-1}$$

2. Prove que a série de potências $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ é solução da equação

$$(x+1)y'' + y' = 0$$

Determine os três primeiros termos de uma segunda solução linearmente independente.

3. Prove que a série de potências $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^2 n$ é solução da equação

$$xy'' + y' + xy = 0$$

4. Determine uma cota inferior para raio de convergência das séries obtidas como solução de

$$(x^2 - 25)y'' + 2xy' + y = 0$$

ao redor dos pontos $x = 0$ e $x = 1$.

5. Determine todas as soluções da equação dada ao redor do ponto $x = 0$ nos casos

(a)

$$y'' - 2xy' + 2y = 0$$

(b)

$$(x^2 + 1)y'' - 6y = 0$$

(c)

$$(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$$

6. Determine a solução ao problema de valor inicial

$$y'' - 2xy' + 8y = 0$$

com $y(0) = 3$ e $y'(0) = 0$.

7. Classifique todos os pontos das seguintes equações diferenciais:

(a)

$$x(x+3)^2 y'' - y = 0$$

(b)

$$(x^3(x-4)^3)y'' + (4-x)y = 0$$

(c)

$$x(x^2+1)y'' + y = 0$$

(d)

$$(x^3 - 4x^2 + 3x)y'' + x(x-3)^2 y' - (x+1)y = 0$$

8. Use o teorema de Frobenius para determinar soluções das seguintes equações lineares homogêneas ao redor dos seus pontos singulares regulares:

(a)

$$2xy'' - y' + 2y = 0$$

(b)

$$2x^2y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0$$

(c)

$$xy'' + 2y' - xy = 0$$

(d)

$$xy'' + (1 - x)y' - y = 0$$

(e)

$$5x^2y'' + 5x^2y' + 2y = 0$$

(f)

$$xy'' + (x - 6)y' - 3y = 0$$

Solution: 1.(a) $\sum_{k \geq 0} (3(k+1)^2 c_{k+1} + 4c_{k-2})x^k$

(b) $5c_1 + 10c_2 + \sum_{k \geq 2} ((k(k-1)c_k + 2(k-1)(k-2)c_{k-2} + (k+1)c_{k+1})x^k$ 3. 5 e 4 respectivamente.

7. Todos os pontos são ordinários exceto em (a) $x = 0, -3$ pontos singulares regulares (b) $x = 0$ ponto singular irregular e $x = 4$ ponto singular regular (c) $x = 0$ ponto singular regular (d) $x = 0, 1, 3$ pontos singulares regulares.