Universidade Federal Fluminense
EGM - Instituto de Matemática e Estatística
GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 1 - 2015-2
Integral Dupla

---

1. Troque a ordem de integração em:

(a) $\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)\ dydx$ (b) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{y}} f(x,y)\ dxdy$ (c) $\int_{-1}^2 \int_{y^2-4}^{y-2} f(x,y)\ dxdy$

2. Use integral dupla para calcular a área da região limitada por:

(a) $x = y^3, \quad x + y = 2, \quad y = 0$
(b) $y = x, \quad y = 4x, \quad xy = 36$
(no primeiro quadrante)
(c) $y^2 = -x, \quad x - y = 4, \quad y = -1$ e $y = 2$

3. Calcule as seguintes integrais:

(a) $\iint_D \cos(y^3)\ dxdy$, onde D é limitada por $y = \sqrt{x},\ y = 2,\ x = 0$.

(b) $\int_1^4 \int_{\frac{\ln y}{2}}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1}\ dxdy$

(c) $\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\ dxdy$

(d) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1 + y^3}\ dydx$

(e) $\int_0^1 \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}} e^{x^3}\ dxdy +\ ds \int_1^4 \int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^1 e^{x^3}\ dxdy$

4. Use uma integral dupla para calcular o volume do sólido W limitado por:

(a) $y = 0,\ z = 0,\ x + y = 4$ e $z = 4 - x^2$
(b) $x = 0,\ z = 0,\ x + y = 9$ e $z = 9 - y^2$
(c) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + z^2 = a^2\ (a > 0)$, situado no primeiro octante.
(d) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z = 6 - x,\ x = 4 - y^2$, situado no primeiro octante.

5. Passe para coordenadas polares e calcule:

(a) $\int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} xy\ dxdy$

(b) $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\ dydx$

(c) $\int_1^3 \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ dxdy$

(d) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\ dydx$

6. Exprima (sem calcular) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sec\theta}^{2\ cos\theta} \frac{r^2}{1 + r \operatorname{sen}\theta}\ drd\theta$ como integral iterada em coordenadas retangulares, nas duas possíveis ordens de integração.

7. Seja $I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_{-x}^0 f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x,y)dydx$.

(a) Transforme I em uma só integral iterada na ordem invertida.
(b) Calcule I para $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

8. Seja $I = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dydx$

   (a) Inverta a ordem de integração em I.

   (b) Calcule I para $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

9. Achar o volume do sólido limitado superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$, inferiormente pelo plano $z=0$ e lateralmente pelo cilindro $x^2+y^2=1$.

10. Calcule o volume do sólido que não contém a origem e é limitado pelas superfícies $z=4-x^2-y^2$, $x^2+y^2=1$ e $z=0$.

11. Calcule o volume do sólido interior à esfera $x^2+y^2+z^2=16$ e ao cilindro $x^2+y^2=4x$ e acima do plano $z=0$.

12. Calcule o volume do sólido contido no primeiro octante, limitado pelo cone $z=r$, pelo cilindro $r=3\,\text{sen}\,\theta$ e pelo plano $z=0$.

13. Uma placa D tem a forma da região limitada pelas retas $x=1$, $x=2$, $y=0$ e $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$. A densidade em cada ponto é inversamente proporcional à distância do ponto à origem. Determin e a massa da placa.

14. Uma placa fina é limitada pela circunferência $x^2+y^2=a^2$, $(a>0)$, e tem densidade $\rho(x,y)=\frac{a^2}{a^2+x^2+y^2}$. Calcule o momento de inércia polar em função de sua massa M.

15. Seja uma lâmina delgada representada pela região D, determinada por $y\le x$, $y\ge -x$, $x^2+y^2\ge 2x$ e $x^2+y^2\le 4x$. Se a densidade em cada ponto é dada por $\rho(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, determine:

    (a) A massa de D.

    (b) O momento de inércia em relação à origem.

16. Uma placa fina de densidade constante ρ tem a forma de um setor circular de raio a e ângulo central 2α. Mostre que o momento de inércia em relação à bissetriz do ângulo é dado por $\frac{1}{4}Ma^2\left(1-\frac{\text{sen}\,2\alpha}{2\alpha}\right)$, onde M é a massa da placa.

17. Calcule as coordenadas $(\bar{x},\bar{y})$ do centro de massa de uma chapa homogêna D com o formato de um triângulo isósceles com base $10cm$ e altura $5cm$.

18. Calcule o centro de massa da lâmina $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 4x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$, se a densidade é proporcional à distância de (x,y) ao eixo y.

19. Calcule o centro de massa do conjunto $D=\left\{(x,y); 1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\right\}$, sendo a densidade proporcional à distância do ponto à origem.

20. Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo retângulo com lados iguais de medida a. Ache o momento de inércia em relação a um dos lados iguais, em função de sua massa M.

21. Calcule a massa de uma lâmina delimitada por $(x-1)^2+(y-2)^2=1$, se a densidade em um ponto é proporcional à distância desse ponto a $(1,2)$.

22. Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo retângulo de catetos b e h. Ache o momento de inércia em função de sua massa M.

    (a) em relação ao eixo x (b) em relação ao eixo y

23. Uma lâmina homogênea tem a forma de um triângulo equilátero de lado a. Ache o momento de inércia em relação

    (a) a uma altura (b) a um lado

24. Calcule as seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y+4}{2}} y^3(2x-y)e^{(2x-y)^2}\ dxdy$

   (b) $\displaystyle\iint_D \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 dxdy$, D é a região triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

   (c) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2e^{xy}}{x}\ dA$, D é a região no primeiro quadrante, limitada pelas parábolas $\frac{x^2}{y}=1$, $\frac{y^2}{x}=1$, $x^2=4y$ e $y^2=4x$.

   (d) $\displaystyle\iint_D \text{sen}\,\left(4x^2+y^2\right)\ dxdy$, $D=\left\{(x,y);\ 4x^2+y^2\le 1, y\ge 0\right\}$.

   (e) $\displaystyle\iint_D \left(\sqrt{y/x}+\sqrt{xy}\right)\ dxdy$, D é a região do primeiro quadrante, limitada pelas hipérboles $xy=1$, $xy=9$ e pelas retas $y=x$ e $y=4x$.

   (f) $\displaystyle\iint_D (x+y-1)(x-y)^6\ dxdy$, D é o quadrado $|x|+|y|\le 1$.

   (g) $\displaystyle\iint_D \left(x^2+y^2\right)\ dxdy$, D é a região do primeiro quadrante, limitada por $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=9$, $xy=1$ e $xy=3$.

Respostas

1. (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{e^y}^{e} f(x,y)\ dxdy$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dydx + \int_0^1 \int_0^{(1-x)^2} f(x,y)\ dydx$

   (c) $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)\ dydx + \int_{-3}^0 \int_{x+2}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)\ dydx$

2. (a) $\frac{5}{4}$

   (b) $36\ln 2$

   (c) $\frac{33}{2}$

3. (a) $\frac{1}{3}\,\text{sen}\,8$

   (b) $1-\ln 2$

   (c) $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

   (d) $\frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

   (e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{4x^2} e^{x^3}\ dydx = e-1$

4. (a) $\frac{128}{3}$

   (b) 324

   (c) $\frac{2a^3}{3}$

   (d) $\frac{352}{15}$

5. (a) $\frac{2}{3}$

   (b) $\frac{2\sqrt{2}+2}{45}+\frac{\sqrt{2}\ \pi}{6}$

   (c) $-2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

   (d) $\frac{9\pi^2}{16}$

6. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+y}\ dydx = \int_0^1 \int_1^{1+\sqrt{1-y^2}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1+y}\ dxdy$

7. (a) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_{-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\ dxdy$

   (b) $\frac{10\sqrt{2}}{9}$

8. (a) $\displaystyle\int_1^2 \int_{-\sqrt{1-(1-y)^2}}^{\sqrt{1-(1-y)^2}} f(x,y)\ dxdy$

   (b) $2\sqrt{2}+2\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$

9. $\frac{2\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$
10. $\frac{9\pi}{2}$
11. $\frac{64}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$
12. 6
13. $\frac{k}{2}\ln 3$
14. $Ma^2\left(\frac{1-\ln 2}{\ln 2}\right)$
15. (a) $2\sqrt{2}$
    (b) $\frac{140}{9}\sqrt{2}$
17. O centro de massa situa-se a $\frac{5}{3}\,cm$ da base, sobre sua mediatriz.
18. $\left(\frac{3\pi}{32},0\right)$
19. $\left(0,\frac{45}{14\pi}\right)$
20. $\frac{Ma^2}{6}$
21. $\frac{2k\pi}{3}$
22. (a) $\frac{Mh^2}{6}$
    (b) $\frac{Mb^2}{6}$
23. (a) $\frac{k\sqrt{3}\,a^4}{96}$
    (b) $\frac{k\sqrt{3}\,a^4}{32}$
24. (a) $e^{16}-1$
    (b) $\frac{1}{6}$
    (c) $\frac{1}{3}\left(\frac{e^{16}}{4}-\frac{5e^4}{4}+e\right)$
    (d) $\frac{\pi}{4}(1-\cos 1)$
    (e) $8+\frac{52}{3}\ln 2$
    (f) $-\frac{2}{7}$
    (g) 8