



Universidade Federal Fluminense

EGM - Instituto de Matemática e Estatística

GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 3 - 2015-2

Integral de Linha de Campo Escalar

1. Apresente uma parametrização diferenciável para as seguintes curvas planas:

(a) $C : x = y^2, \quad 0 \leq x \leq 2$

(f) $C : x^2 + y^2 = 4x, \quad y \geq 0$

(b) $C : x^2 + y^2 = 4, \quad y \geq 0$

(g) $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

(c) $C : x^2 + 4y^2 = 4, \quad x \geq 0$

(h) $C : 2x^2 + 2y^2 - 6x + 4y - 16 = 0$

(d) $C : x^2 + y^2 + x + y = 0$

(i) $C : 16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$

(e) $C : x^2 + y^2 = 16, \quad x \geq 2$

2. Apresente uma parametrização diferenciável para a curva C em $\mathbb{R}^3$, interseção das superfícies dadas por:

(a) $z = 1 - x^2, \quad z \geq 0 \quad \text{e} \quad x = y$

(e) $x^2 + y^2 + z^2 = 8 - 2(x + y), \quad z \geq 0 \quad \text{e} \quad x + y = 2$

(b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}, \quad R > 0,$
situada no primeiro octante.

(f) $z = 3x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad z + 6x = 9$

(c) $x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad y + z = 2$

(g) $(x - 1)^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0$

(d) $x^2 + y^2 = 4 \quad \text{e} \quad x^2 + z^2 = 4,$
situada no primeiro octante.

(h) $x^2 + y^2 + z^2 = 2y, \quad z \geq 0 \quad \text{e} \quad z - y + 1 = 0$

3. Calcule $\int_C f(x, y) ds$, onde

(a) $f(x, y) = xy \quad \text{e} \quad C$ parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

(b) $f(x, y) = xy \quad \text{e} \quad C$ é o segmento de reta de $(2, 1)$ a $(4, 5)$.

(c) $f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad C$ é a semicircunferência $x^2 + y^2 = a^2, \quad a > 0,$ com $y \geq 0$.

(d) $f(x, y) = x - y \quad \text{e} \quad C$ é a circunferência $x^2 + y^2 = ax, \quad a > 0$.

(e) $f(x, y) = 8x \quad \text{e} \quad C$ é formada pelos arco C_1 da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ seguido pelo segmento de reta vertical de $(1, 1)$ a $(1, 2)$.

4. Calcule $\int_C f(x, y, z) ds$, onde

(a) $f(x, y, z) = 3x^2yz \quad \text{e} \quad C$ é a curva dada por $\vec{r}(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3), \quad 0 \leq t \leq 1$.

(b) $f(x, y, z) = x + y + z \quad \text{e} \quad C$ é o segmento de reta de $(1, 2, 3)$ a $(0, -1, 1)$.

(c) $f(x, y, z) = y(x + z) \quad \text{e} \quad C$ é a curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 9,$ com $y \geq 0$ e $x + z = 3$.

(d) $f(x, y, z) = xyz \quad \text{e} \quad C$ é a curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4},$ situada no primeiro octante.

(e) $f(x, y, z) = x \quad \text{e} \quad C$ é a interseção do cilindro parabólico $y = x^2$ com a parte do plano $z = x,$ tal que $0 \leq x \leq 1$.

5. Seja C a curva interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad a > 0, \quad x \geq 0,$ com o plano $y = z$. Determine o valor de $a,$ se $\int_C 3xyz \, ds = 16$.

6. Sabendo que $I = \int_C \frac{ds}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} = 8$, onde C é a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, calcule a área da região limitada pela elipse.
7. Um pedaço de arame tem a forma da curva C interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1 - 2(x + y)$ com o plano $z - y = 1$. Calcule a massa do arame se a densidade é dada por $\rho(x, y, z) = x^2$.
8. Achar a massa da curva dada por $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, $0 \leq t \leq 1$, se a densidade em cada ponto é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto à origem.
9. Calcule a primeira coordenada do centro de massa de um fio homogêneo que está ao longo de uma curva $\vec{r}(t) = t \vec{i} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{5} t^{\frac{5}{2}}\right) \vec{j} + \left(\frac{t^4}{4}\right) \vec{k}$, $0 \leq t \leq 2$.
10. Um arame tem a forma de uma curva obtida como interseção da semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x \geq 0$, com o plano $y + z = 4$. Sabendo que a densidade em cada ponto (x, y, z) é dada por $\rho(x, y, z) = x$, mostre que o momento de inércia em relação ao eixo x é igual a $\frac{32M}{3}$, onde M é a massa do arame.
11. Calcule a massa da elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, situada no primeiro quadrante, se a densidade em cada ponto é igual ao produto das coordenadas do ponto.
12. Calcule a área de um lado da superfície S cuja base é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, no plano xy , e a altura em cada ponto (x, y) é $f(x, y) = 1 - x^2$.
13. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, compreendida entre os planos $z = 0$ e $x + y + z = 2$, $z \geq 0$. Se o metro quadrado do zinco custa M reais, calcule o preço total da peça.
14. Um pintor deseja pintar os dois lados de uma cerca cuja base é uma curva C no plano xy dada por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 20^{\frac{2}{3}}$, para $x \geq 0$ e $y \geq 0$. A altura em cada ponto $(x, y) \in C$ é dada por $f(x, y) = y$. Se o pintor cobra R reais por m^2 , quanto ele receberá?
15. Seja dado um arame semicircular homogêneo de raio 4 cm .
- (a) Mostre que o centro de massa está situado no eixo de simetria a uma distância de $\frac{8}{\pi} \text{ cm}$ do centro.
- (b) Mostre que o momento de inércia em relação ao diâmetro que passa pelos extremos do arame é $8M$, sendo M a massa do arame.
16. Um arame fino é entortado no formato da curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $y = x$, situado no primeiro octante e que liga o ponto $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ ao ponto $B = (1, 1, \sqrt{2})$. Calcule a massa do arame, sendo a densidade em cada ponto proporcional ao quadrado da distância do ponto ao plano yz .
17. Um arame fino tem a forma da curva interseção das superfícies $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2z + x$ e $z = 1 + y$, $z \geq 1$. Determine a massa do arame, se a densidade em qualquer ponto é igual ao quadrado da distância do ponto ao plano xz .
18. Calcule o momento de inércia de um fio retilíneo homogêneo de comprimento L , em torno de um eixo perpendicular ao fio e passando por uma das extremidades do fio, em função de sua massa.
19. Um fio delgado tem a forma do segmento de reta que une os pontos $(1, 1)$ e $(2, 2)$. Determine o momento de inércia em relação à reta $y = -1$, supondo que a densidade no ponto (x, y) é proporcional à distância do ponto ao eixo y .

Respostas

1. (a) $\vec{r}(t) = (t^2, t)$, $0 \leq t \leq \sqrt{2}$ é uma parametrização diferenciável; $\vec{r}(t) = (t, \sqrt{t})$, $0 \leq t \leq 2$ é também uma parametrização de C , mas não é diferenciável, pois não existe $\vec{r}'(0)$.
 (b) $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$
 (c) $\vec{r}(t) = (2 \cos t, \sin t)$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
 (d) $\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t\right)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 (e) $\vec{r}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t)$, $-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$
 (f) $\vec{r}(t) = (2 + 2 \cos t, 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$
 (g) $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 (h) $\vec{r}(t) = \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2} \cos t, -1 + \frac{3\sqrt{5}}{2} \sin t\right)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 (i) $\vec{r}(t) = (-2 + 3 \cos t, 1 + 4 \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
2. (a) $\vec{r}(t) = (t, t, 1 - t^2)$, $-1 \leq t \leq 1$
 (b) $\vec{r}(t) = \left(\frac{R}{2} \cos t, \frac{R}{2} \sin t, \frac{\sqrt{3}R}{2}\right)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
 (c) $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 (d) $\vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, 2 \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
 (e) $\vec{r}(t) = (1 + \cos t, 1 - \cos t, \sqrt{2} \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$
 (f) $\vec{r}(t) = (-1 + 2 \cos t, 3\sqrt{2} \sin t, 15 - 12 \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 (g) $\vec{r}(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$, $0 \leq t \leq 2\pi$
 (h) $\vec{r}(t) = \left(\cos t, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t\right)$, $0 \leq t \leq \pi$
3. (a) $\frac{1}{2}$
 (b) $\frac{58\sqrt{5}}{3}$
 (c) 0
 (d) $\frac{\pi a^2}{2}$
 (e) $\frac{10\sqrt{5}+22}{3}$
4. (a) $\frac{13}{20}$
 (b) $3\sqrt{14}$
 (c) 27
 (d) $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$
 (e) $\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}$
5. $a = 2$
6. 4
7. $5\pi\sqrt{3}$
8. $\frac{\sqrt{3}k}{2} (1 - e^{-1})$
9. $\frac{7}{5}$
11. $\frac{38}{5}$
12. π
13. $(6\pi + 8)M$
14. $480R$
16. $\frac{\pi+2}{2}$
17. $\frac{27\pi}{32}$
18. $\frac{ML^2}{3}$
19. $\frac{119\sqrt{2}k}{12}$