



Universidade Federal Fluminense

EGM - Instituto de Matemática e Estatística

GMA - Departamento de Matemática Aplicada

**LISTA 5 - 2015-2**

Integral de Superfície de Campo Escalar

Fluxo de Campo Vetorial

1. Parametrize as superfícies abaixo, indicando o domínio dos parâmetros:

- (a)  $S$ : parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , que fica acima do plano  $z = \sqrt{2}$ .
- (b)  $S$ : parte do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ , que fica entre os planos  $z = -2$  e  $y + z = 2$ .
- (c)  $S$ : parte do plano  $x + y + z = 2$  no interior do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .
- (d)  $S$ : cone gerado pela semireta  $z = 2y, y \geq 0$ , girando-a em torno do eixo  $z$ .
- (e)  $S$ : superfície de revolução obtida girando o segmento de reta  $AB, A = (4, 1, 0), B = (2, 4, 0)$ , em torno do eixo  $x$ .
- (f)  $S$ : parte do cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$ , que fica entre  $z = 0$  e  $z = x^2 + y^2$ .
- (g)  $S$ : superfície de revolução obtida girando a curva  $(x - a)^2 + z^2 = r^2$ , com  $0 < r < a$ , em torno do eixo  $z$ .

2. Seja  $S$  uma superfície parametrizada por  $\vec{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 1 - v^2)$   $0 \leq u \leq 2\pi$  e  $v \geq 0$ .

- (a) Identifique essa superfície
- (b) Encontre uma equação da reta normal a  $S$  em  $\vec{r}(0, 1)$
- (c) Encontre uma equação do plano tangente a  $S$  em  $\vec{r}(0, 1)$ .

3. Calcule a área da superfície dada por  $\vec{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ , com  $(u, v) \in D: u^2 + v^2 \leq 4$ .

4. Calcule a área das superfícies:

- (a)  $S$ : porção do plano  $x + 2y + z = 4$ , que está dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 4$ .
- (b)  $S$ : parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , interior ao cone  $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$ .
- (c)  $S$ : porção do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , entre os planos  $z = y$  e  $z = 2y$ .
- (d)  $S$ : parte do cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$ , limitado pelo plano  $z = 0$  e o cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- (e)  $S$ : superfície gerada pela rotação do conjunto  $C = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3; (y - 2)^2 + z^2 = 1\}$  em torno do eixo  $z$ .
- (f)  $S$ : superfície gerada pela rotação do segmento de reta  $AB, A = (0, 1, 3), B = (0, 3, 1)$  em torno do eixo  $z$ .
- (g)  $S$ : parte da superfície  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , compreendida entre os planos  $x + y = 1, x + y = 2, x = 0$  e  $y = 0$ .
- (h)  $S$ : parte do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , que se encontra dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$ , fora do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .

5. Calcule a área da superfície da esfera de raio  $a$ , centrada na origem, limitada por dois paralelos e dois meridianos, sabendo que o ângulo entre os meridianos é  $\alpha$  e a distância entre os planos que contêm os paralelos é  $h$ .

6. Seja  $S$  a superfície de equação  $2z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq k, k > 0$ . Sabendo-se que a área de  $S$  vale  $\frac{14\pi}{3}$ , determine o valor de  $k$ .

7. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície de equação  $z = 1 - x^2$ , compreendida entre os planos  $y = 0$  e  $z = 0$  e o cilindro  $z = 1 - y^2, y \geq 0$ . Se o metro quadrado do zinco custa  $R$  reais, calcule o preço total da peça.

8. O cilindro  $x^2 + y^2 = x$  divide a esfera  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  em duas regiões  $S_1$  e  $S_2$ , onde  $S_1$  está no interior do cilindro e  $S_2$  fora. Ache a razão das áreas  $\frac{A(S_2)}{A(S_1)}$ .
9. Calcule  $\iint_S f(x, y, z) dS$ , onde
- $f(x, y, z) = z - x^2 + xy^2 - 1$  e  $S : \vec{r}(u, v) = u \vec{i} + v \vec{j} + (u^2 + 1) \vec{k}$ , com  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 2$ .
  - $f(x, y, z) = x^2 z$  e  $S : x^2 + y^2 = a^2$ ,  $a > 0$ , com  $0 \leq z \leq 1$ .
  - $f(x, y, z) = x$  e  $S$  é a região triangular com vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ .
  - $f(x, y, z) = z$  e  $S$  é a superfície do sólido limitado pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e os planos  $z = 1$  e  $x + z = 4$ .
  - $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $S$  é a porção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ , limitada pelos planos  $z = 0$  e  $z = 3$ .
  - $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$  e  $S$  é a parte da superfície cônica  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , limitada por  $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , com  $z \geq 0$ .
  - $f(x, y, z) = x^2 y^2$  e  $S$  é a porção do cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $a > 0$ , no primeiro octante, entre os planos  $z = y$  e  $z = 2y$ .
  - $f(x, y, z) = x^2 + y^2$  e  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ , com  $z \geq 1$ .
10. Suponha que  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2) \cdot g(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ , onde  $g$  é uma função de uma variável, tal que  $g(2) = -5$ . Calcule  $\iint_S f(x, y, z) dS$ , onde  $S$  é a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .
11. Calcule a massa da superfície  $S$  parte do plano  $z = 2 - x$  dentro do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , sendo a densidade dada por  $\rho(x, y, z) = y^2$ .
12. Seja  $S$  a porção do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , com  $z \geq 0$ , limitada pelo plano  $x + y + z = 1$  e o plano  $z = 0$ . Calcule a massa de  $S$ , sabendo que a densidade de massa em um ponto é igual ao quadrado da distância do ponto ao eixo  $z$ .
13. Seja  $S$  a superfície do sólido limitado inferiormente pelo parabolóide  $z = x^2 + y^2$  e superiormente pelo plano  $z = 1$ . Se a densidade de massa é dada por  $\rho(x, y, z) = z$ , calcule a massa de  $S$ .
14. Seja  $S$  a porção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  que se encontra dentro do parabolóide  $z = \frac{x^2 + y^2}{3}$ . Calcule a massa de  $S$  sabendo que a densidade de massa em cada ponto  $(x, y, z) \in S$  é igual ao quadrado da distância do ponto ao eixo  $z$ .
15. Seja  $S$  a superfície de rotação obtida girando  $C = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x = \ln y, \sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{8}\}$  em torno do eixo  $x$ . Calcule a massa de  $S$ , sabendo que a densidade em cada ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo  $x$ .
16. Determine o momento de inércia em relação ao eixo  $z$  da superfície  $S : x^2 + y^2 = 2y$ , limitada por  $z = 0$  e  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , sendo a densidade  $\rho(x, y, z) = z$ .
17. Mostre que o momento de inércia de uma casca cilíndrica de comprimento  $L$  e raio da base  $a$ , com densidade constante, em relação a um diâmetro do círculo cujo centro coincide com o centro da casca cilíndrica, é  $I = \frac{1}{2}Ma^2 + \frac{1}{12}ML^2$ , onde  $M$  é a massa total.
18. Calcule o momento de inércia da superfície homogênea, de massa  $M$ , de equação  $x^2 + y^2 = R^2$ , ( $R > 0$ ), com  $0 \leq z \leq 1$ , em torno do eixo  $z$ .
19. Uma lâmina tem a forma de um hemisfério de raio  $a$ . Calcule o momento de inércia dessa lâmina em relação a um eixo que passa pelo polo e é perpendicular ao plano que delimita o hemisfério. Considere a densidade no ponto  $P$  da lâmina proporcional à distância desse ponto ao plano que delimita o hemisfério.

20. Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo  $z$  da casca do cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  de altura  $h$  que está no primeiro octante com densidade constante é  $I = \frac{Mh^2}{2}$ , onde  $M$  é a massa total.
21. Calcule o momento de inércia da superfície esférica de raio  $R$ , homogênea, de massa  $M$ , em torno de qualquer diâmetro.
22. Calcule o centro de massa da superfície homogênea, parte da superfície cônica  $z^2 = x^2 + y^2$ , compreendida entre os planos  $z = 1$  e  $z = 2$ .
23. Calcule  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ , onde
- $\vec{F}(x, y, z) = -z\vec{k}$  e  $S$  é a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  fora do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $\vec{n}$  apontando para fora.
  - $\vec{F}(x, y, z) = (-x)\vec{i} + (-y)\vec{j} + (3y^2z)\vec{k}$  e  $S$  é a parte do cilindro  $x^2 + y^2 = 16$ , situado no primeiro octante, entre  $z = 0$  e  $z = 5 - y$ ,  $\vec{n}$  apontando para o eixo  $z$ .
  - $\vec{F}(x, y, z) = (z + 3x)\vec{i} + (z + 3)\vec{k}$  e  $S$  é a superfície do sólido limitado por  $z = 1 - y^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$  e o plano  $xy$ , com  $\vec{n}$  exterior.
  - $\vec{F}(x, y, z) = (-3xyz^2)\vec{i} + (x + 2yz - 2xz^4)\vec{j} + (yz^3 - z^2)\vec{k}$  e  $S$  é a união da superfície  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , com  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ , indicando a orientação escolhida para  $S$ .
  - $\vec{F}(x, y, z) = (yz, -xz, x^2 + y^2)$  e  $S$  é a superfície de revolução obtida girando o segmento de reta que liga  $(1, 0, 1)$  a  $(0, 0, 3)$ , em torno do eixo  $z$ , com  $\vec{n}$  tendo a componente  $z$  não negativa.
  - $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -z)$  e  $S$  é a semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$ , com  $\vec{n}$  exterior.
  - $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + x\vec{j} + 2\vec{k}$  e  $S$  é a superfície plana limitada pelo triângulo de vértices  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$  e  $(0, 0, 2)$ , com  $\vec{n}$  tendo a componente  $z$  não negativa.
  - $\vec{F}(x, y, z) = z\vec{i} + yz\vec{j}$  e  $S$  é a parte do plano  $z = 2 - x$ , limitada pelo cilindro  $x^2 + y^2 = 9$ , com  $\vec{n}$  tal que  $\vec{n} \cdot \vec{k} \geq 0$
  - $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}(x, y, z)$  e  $S$  é a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $a > 0$ , com  $\vec{n}$  exterior.
  - $\vec{F}(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$  e  $S: x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z > 0$ ,  $0 \leq z \leq h$ , com  $\vec{n}$  exterior.
  - $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} - y\vec{j}$  e  $S$  é a parte da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $a > 0$ , no primeiro octante e  $\vec{n}$  apontando para a origem.
  - $\vec{F}(x, y, z) = (x, -3y, -2z)$  e  $S$  é a união dos planos  $y + z = 0$ , com  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 0$  e  $z = 0$ , com  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , indicando a orientação escolhida para  $S$ .
24. Calcule o fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + z^2, x, x)$ , através da superfície de revolução obtida girando o segmento de reta que liga o ponto  $(4, 1, 0)$  a  $(2, 4, 0)$  em torno do eixo  $x$ , onde o vetor  $\vec{n}$  tem componente  $\vec{i}$  não negativa.
25. Calcule o fluxo de  $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$ , através da superfície  $S$ , parte do cilindro  $x^2 + y^2 = 2x$ , limitado pelo plano  $z = 0$  e pelo cone  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , com vetor normal apontando para fora de  $S$ .

## Respostas

1. (a)  $\vec{r}(\phi, \theta) = (2 \operatorname{sen} \phi \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, 2 \cos \phi)$ ,  $(\phi, \theta) \in D : 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
  - (b)  $\vec{r}(\theta, z) = (2 \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta, z)$ ,  $(\theta, z) \in D : 0 \leq \theta \leq 2\pi, -2 \leq z \leq 2 - 2 \operatorname{sen} \theta$
  - (c)  $\vec{r}(x, y) = (x, y, 2 - x - y)$ ,  $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq 1$  ou  
 $\vec{r}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, 2 - r \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta)$ ,  $(r, \theta) \in D : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
  - (d)  $\vec{r}(t, \theta) = (t \cos \theta, t \operatorname{sen} \theta, 2t)$ ,  $(t, \theta) \in D : t \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
  - (e)  $\vec{r}(t, \theta) = (4 - 2t, (1 + 3t) \cos \theta, (1 + 3t) \operatorname{sen} \theta)$ ,  $(t, \theta) \in D : 0 \leq t \leq 1, \theta \in [0, 2\pi]$
  - (f)  $\vec{r}(\theta, z) = (2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta, 2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta, z) = (\operatorname{sen} 2\theta, 2 \operatorname{sen}^2 \theta, z)$ ,  
 $(\theta, z) \in D : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq 4 \operatorname{sen}^2 \theta$  ou  
 $\vec{r}(t, z) = (\cos t, 1 + \operatorname{sen} t, z)$ ,  $(t, z) \in D : 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2 + 2 \operatorname{sen} t$
  - (g)  $\vec{r}(t, \theta) = ((a + r \cos t) \cos \theta, (a + r \cos t) \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} t)$ ,  $(t, \theta) \in D : 0 \leq t \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
2. (a)  $S : z = 1 - x^2 - y^2$  (paraboloide circular)
  - (b)  $(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(-2, 0, -1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$
  - (c)  $2x + z - 2 = 0$
3.  $\frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1)$
  4. (a)  $4\sqrt{6} \pi$
  - (b)  $4\pi$
  - (c)  $4$
  - (d)  $8$
  - (e)  $8\pi^2$
  - (f)  $8\sqrt{2} \pi$
  - (g)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
  - (h)  $\frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3})$
5.  $a h \alpha$
  6.  $\frac{3}{2}$
  7.  $(5\sqrt{5} - 1) \frac{R}{6}$
  8.  $\frac{2\pi+4}{2\pi-4}$
  9. (a)  $\frac{2}{9} (5\sqrt{5} - 1)$
  - (b)  $\frac{\pi a^3}{2}$
  - (c)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$
  - (d)  $(4\sqrt{2} + \frac{33}{2}) \pi$
  - (e)  $216\pi$
  - (f)  $8\sqrt{2} \pi$
  - (g)  $\frac{2a^6}{15}$
  - (h)  $\frac{20\pi}{3}$
10.  $-\frac{640\pi}{3}$
  11.  $\frac{\sqrt{2} \pi}{4}$
  12.  $\frac{3\pi}{2} + 2$
13.  $\frac{\pi}{60} (25\sqrt{5} + 61)$
  14.  $\frac{20\pi}{3}$
  15.  $\frac{38k\pi}{3}$
  16.  $6\pi$
  18.  $MR^2$
  19.  $\frac{k\pi a^5}{2}$
  21.  $\frac{2MR^2}{3}$
  22.  $(0, 0, \frac{14}{9})$
  23. (a)  $-4\pi\sqrt{3}$
  - (b)  $40\pi - 64$
  - (c)  $\frac{32}{3}$
  - (d)  $\pi$  com  $\vec{n}$  exterior
  - (e)  $\frac{\pi}{2}$
  - (f)  $\frac{16\pi}{3}$
  - (g)  $\frac{20}{3}$
  - (h)  $18\pi$
  - (i)  $4\pi$
  - (j)  $2\pi a^2 h$
  - (k)  $0$
  - (l)  $\frac{1}{2}$  com  $\vec{n}$  apontando para cima
24.  $\frac{255\pi}{2}$
  25.  $\frac{32}{3}$