uff Universidade Federal Fluminense

EGM - Instituto de Matemática e Estatística

GMA - Departamento de Matemática Aplicada

LISTA 6 - 2015-2
Teorema de Gauss
Teorema de Stokes

---

1. Verifique o Teorema de Gauss, calculando as duas integrais do enunciado para

   (a) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ e o sólido W limitado pelas superfíc ies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4$.

   (b) $\vec{F}(x,y,z) = (z+1)\,\vec{k}$ e o sólido W limitado pelas superfícies $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z = 0$.

2. Seja $\vec{F}(x,y,z) = 6x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j} + 5z\,\vec{k}$. Seja S a superfície da esfera com centro $(1,0,1)$ e raio 5. Ache o fluxo de $\vec{F}$, de dentro para fora de S.

3. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (x+y)\,\vec{i} + (y+z)\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$, S é a fronteira do cilindro $W = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1\right\}$ e $\vec{n}$ orientada para fora de W.

4. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = x^3\,\vec{i} + y^3\,\vec{j} + z^3\,\vec{k}$, S é a superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 1$ e $\vec{n}$ a orientação normal exterior a S.

5. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = (x + \cos x, y + y\,\mathrm{sen}\,x, 2z)$, através do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x+y+z = 1$, onde $\vec{n}$ é a normal unitária exterior a S.

6. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + 4z^2\,\vec{k}$, através da superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z+y = 2$, com a normal S apontando para fora do sólido.

7. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(xy^2 + e^y\right)\,\vec{i} + \left(yz^2 + \mathrm{sen}^2 x\right)\,\vec{j} + \left(5 + zx^2\right)\,\vec{k}$, através da superfície aberta $S:\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z \ge 0$, com $\vec{n}$ tendo componente z positiva.

8. Seja $\vec{F}(x,y,z) = z\arctan\left(y^2\right)\,\vec{i} + z^3\ln\left(x^2+1\right)\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Determine o fluxo de $\vec{F}$ através da parte do paraboloide $x^2+y^2+z = 2$ que está acima do plano $z = 1$, sendo $\vec{n}$ a normal com componente z não negativa.

9. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + (-2y + e^x\cos z)\,\vec{j} + \left(z + x^2\right)\,\vec{k}$ e S é definida por $\left\{z = 9 - x^2 - y^2,\ 0\le z\le 5\right\}$, $\left\{z = 5,\ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$ e $\left\{z = 8 - 3\left(x^2+y^2\right),\ x^2+y^2\le 1\right\}$.

10. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x^3}{3} + y, \frac{y^3}{3}, \frac{z^3}{3} + 2\right)$, através da superfície S do sólido W definido por $W = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\ge 1,\ x^2+y^2+(z-2)^2\le 4,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right\}$, com campo de vetores normais a S apontando para fora de W.

11. Seja T o tetraedro de vértices $O = (0,0,0)$, $A = (2,0,0)$, $B = (0,6,0)$, $C = (0,0,2)$. Sejam S a superfície lateral de T, constituída pelas faces de T que não estão no plano xy e $\vec{F}(x,y,z) = (3y+z, x+4z, 2y+x)$ um campo vetorial de $\mathbb{R}^3$. Calcule $\iint_S (rot\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$, com a normal exterior a S.

12. Seja a superfície cônica S de vértice $(0,0,h)$, $(h>0)$, de base situada no plano xy com raio 1 e $\vec{n}$ com componente $\vec{k}$ não negativa. Seja $\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\vec{j} + 2(z+1)\,\vec{k}$, sendo $f(x,y,z)$ de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^3$. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S.

13. Seja $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, tal que $\nabla^2 f = x^2+y^2+z^2$. Calcule $\iint_S \nabla f\cdot\vec{n}\,dS$ onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$, com $\vec{n}$ exterior a S.

14. Seja S a calota esférica dada pela equação $x^2+y^2+z^2 = 4$, onde $0\le z\le 2$. Sobre S fixe a orientação $\vec{n}$, tal que $\vec{n}(0,0,2) = \vec{k}$. Calcule $\iint_S (rot\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y^3}{3} + ze^x, \frac{x^3}{3} - \cos(yz), xy\right)$.

15. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (2x+e^z)\,\vec{i} + (3y - ze^x)\,\vec{j} + (z-2)\,\vec{k}$, seja S a calota esférica $x^2+y^2+z^2 = a^2$, com $z \geq 0$ e raio $a > 0$. Sabendo que o fluxo de $\vec{F}$ na direção da normal exterior $\vec{n}$ é igual a $2\pi a^3$, calcule o raio da calota.

16. Calcule $\iint_S (rot\vec{F}) \cdot \vec{n}\; dS$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2y+2\right)\vec{i} + \left(x^3+y^4\right)\vec{j} + (2yz-1)\,\vec{k}$ e S a parte da esfera $x^2+y^2+z^2-4z = 0$, com $z \leq 1$, orientada com $\vec{n}$ exterior.

17. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Seja W um sólido e seja S a fronteira de W, com normal exterior $\vec{n}$. Prove que $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS = \iiint_W \nabla^2 f\; dxdydz$, onde $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ é a derivada direcional de f na direção do vetor unitário $\vec{n}$.

18. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, tal que $\nabla^2 f = x^2+y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,1) = \frac{1}{3}$, para todo $(x,y,1) \in \mathbb{R}^3$. Calcule $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS$, onde S é a lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por $x^2+y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, $z = 0$, $x^2+y^2 \leq 1$, com normal $\vec{n}$ apontando para fora de S.

19. Considere o campo vetorial $\vec{F} = (x+f(y,z))\,\vec{i} + (x-y+z)\,\vec{j} + \left(z^4 - 3a^2\right)\vec{k}$, onde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$. Seja S uma lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por $x^2+y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq \sqrt{a}$, $a > 0$ e $x^2+y^2 \leq a^2$, $z = 0$. Sabendo que o fluxo de $\vec{F}$ através de S, de dentro para fora é igual a πa^3, calcule o valor de a.

20. Encontre o fluxo do campo $\vec{F} = (e^y + \cos(yz))\,\vec{i} + (-2zy + \operatorname{sen}(xz))\,\vec{j} + \left(z^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\vec{k}$ através da superfície S, orientada positivamente, $S = S_1 \cup S_2$, onde $S_1 :\; z = 4 - 2x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 2$ e $S_2 :\; z = 1 + x^2 + \frac{y^2}{2}$, $1 \leq z \leq 2$.

21. Calcule $\iint_S (rot\vec{F}) \cdot \vec{n}\; dS$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = x\;\vec{j} + xy\;\vec{k}$, através de $S :\; x^2+y^2+\frac{z^2}{4} = 1$, $z \leq 1$, orientada de forma que o vetor normal no ponto $(0,0,-2)$ seja o vetor $-\vec{k}$.

22. Verifique o teorema de Stokes, calculando as duas integrais do enunciado para
    (a) $\vec{F}(x,y,z) = (y,-x,0)$, S o paraboloide $z = x^2+y^2$, $0 \leq z \leq 1$ e $\vec{n}$ apontando para fora de S.
    (b) $\vec{F}(x,y,z) = y\;\vec{i} + z\;\vec{j} + x\;\vec{k}$, S o hemisfério $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $a > 0$, orientada com $\vec{n}$ normal unitária exterior a S.

23. Use o o teorema de Stokes para mostrar que a integral de linha é igual ao valor dado, indicando a orientação da curva C em:
    (a) $\oint_C (3y+z)\,dx + (x+4y)\,dy + (2x+y)\,dz = -\frac{3\sqrt{2}\,\pi}{4}$, onde C é a interseção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ com o plano $y+z = 1$.
    (b) $\oint_C (y+z)\,dx + (z+2x)\,dy + (x+y)\,dz = -\pi$, onde C é a interseção do plano $y = z$ com o cilindro $x^2+y^2 = 2y$.
    (c) $\oint_C (2xy)\,dx + \left[(1-y)z + x^2 + x\right]\,dy + \left(\frac{x^2}{2} + e^z\right)\,dz = \pi$, onde C é a interseção do cilindro $x^2+y^2 = 1$ com o cone $z = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$.
    (d) $\oint_C (8x-2y)\,dx + y\,dy + 3z\,dz = -4$, onde C é a fronteira do triângulo situado no plano $x+z = 2$, de vértices $(2,0,0)$, $(2,2,0)$ e $(0,0,2)$.

24. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F} = \left(x-y^2\right)\vec{i} + \left(x - z + \frac{y^2}{2+\operatorname{sen} y}\right)\vec{j} + y\;\vec{k}$ e C a interseção do paraboloide $4z = x^2+y^2$ com o cilindro $x^2+y^2 = 4$, orientada no sentido anti-horário se projetada no plano xy.

25. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = (yz+z,\, xz+e^{-y},\, xy+e^{-z})$ e C a curva interseção das superfícies $x^2+y^2 = 4$ e $z = y+3$, orientada no sentido anti-horário quando projetada no plano xy.

26. Calcule $\displaystyle\int_C (e^{x^2}+y^2)\,dx + (e^{y^2}-z^2)\,dy + (e^{z^2}-x^2)\,dz$, onde C é o contorno da parte do plano $x+y+z = 1$, que está no primeiro octante, no sentido anti-horário.

27. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (z - x + \operatorname{sen} x, z - x + \cos y, x - y + e^z)$ e C é a interseção do cilindro $x^2+y^2 = a^2$ com o plano $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

28. Calcule a circulação do campo $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ ao redor da curva C fronteira do triângulo recortado do plano $x+y+z=1$ pelo primeiro octante, no sentido horário quando vista da origem.

29. Calcule $\displaystyle\oint_C (e^{-x^3/3} - yz)\,dx + (e^{-y^3/3} + xz + 2x)\,dy + (e^{-z^3/3} + 5)\,dz$, onde C é dada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$.

30. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = yz^2\,\vec{i} + 2xz\,\vec{j} + \cos(xyz)\,\vec{k}$ e C é a interseção da superfície $z = x^2+y^2$ com $z = 10 - x^2 - y^2$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

31. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y,z) = \left(2^x + z^2\right)\vec{i} + \left(2^y + x^2\right)\vec{j} + \left(2^z + y^2\right)\vec{k}$ quando uma partícula se move sob sua influência ao redor da borda da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ que está no primeiro octante, no sentido anti-horário quando vista de cima.

32. Calcule $\int_C (z - y)\,dx + \ln\left(1+y^2\right)\,dy + \left[\ln(1+z^2) + y\right]\,dz$, sendo C dada por $\vec{r}(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 4 - 4\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

33. Seja o campo $\vec{F}$, tal que $rot\,\vec{F} = (-4x, 2(y-1), f(z))$, onde $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ com $f(0) = 1$. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é a curva dada pela interseção das superfícies $z = x^2+y^2$ e $x^2 + (y-1)^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

34. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F}$ um campo em $\mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F} = (-y, x, f(x,y,z))$, onde $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$, tal que $\nabla f\cdot\vec{i} = -3$ em $\mathbb{R}^3$ e C é a interseção da superfície $x^2+y^2 = 1$ com o plano $z - y = 2$, com uma orientação tal que quando projetada no plano $z = 0$ produz um percurso no sentido horário.

35. Utilizando o teorema de Stokes, transforme $\iint_S rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\;dS$ em uma integral de linha e calcule:

    (a) $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{k}$, $S:\ \vec{r}(u,v) = \left(u, v, u^2+v^2\right)$, com $u^2+v^2 \le 1$, sendo $\vec{n}$ a normal apontando para cima.

    (b) $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i}$, S a superfície $x^2+y^2+z^2 = 2$, $x^2+y^2 \le 1$ e $z \ge 0$, sendo $\vec{n}$ a normal apontando para cima.

    (c) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$, $S:\ x^2+y^2+\frac{z^2}{4} = 1$, $z \le 1$, sendo $\vec{n}$ tal que $\vec{n}(0,0,-2) = -\vec{k}$.

    (d) $\vec{F}(x,y,z) = x^2y\,\vec{i} + 2y^3z\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$, $S:\ \vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\,\vec{i} + (r\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j} + r\,\vec{k}$, com $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, sendo $\vec{n}$ a normal exterior.

36. Calcule $\iint_S rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\;dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (y, 2x, xyz)$, S é formada pelas cinco faces do cubo $[0,2]\times[0,2]\times[0,2]$ que não estão no plano xy com $\vec{n}$ exterior a S.

    (a) Utilizando o teorema de Gauss

    (b) Utilizando o teorema de Stokes.

37. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(z^2 + e^{x^2}, xz + e^y, 2xy + ze^z\right)$ e C é a curva obtida como interseção da superfície $z = 1 - y^2$, $z \ge 0$, com o plano $x + z = 2$, orientada no sentido anti-horário quando vista do eixo x positivo.

38. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(z, z^2 + y\cos y, 2yz + ze^{-z}\right)$ e C é a curva obtida como interseção da superfície $z = x^2$, com o plano $y + z = 4$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

39. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(-2y + e^{\operatorname{sen} x}, -z + y, x^3 + e^{\operatorname{sen} z}\right)$ e C é a interseção da superfície $z = y^2$, com o plano $x + z = 1$, orientada no sentido de crescimento de y.

40. Determine $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(yz + x^3, xz + 3y^2, xy + 4\right)$ e C é a curva obtida como interseção da superfícies $z = 5 - y^2$, $z \geq 1$ e $x + z = 5$, orientada no sentido de crescimento de y.

41. Calcule $\displaystyle\int_C (ze^{xz} + ye^{xy} + 6x)\,dx + (xe^{xy} + ze^{yz})\,dy + (xe^{xz} + ye^{yz} - \operatorname{sen} z)\,dz$, onde C é a curva dada por $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + (t-1)(t-3)\,\vec{j} + \pi t^3\,\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

42. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (e^{-y} - ze^{-x}, e^{-z} - xe^{-y}, e^{-x} - ye^{-z})$ e C é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \left(\frac{\ln(1+t)}{\ln 2}, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right), \frac{1-e^t}{1-e}\right)$, $0 \leq t \leq 1$.

43. Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(x + y + z, z + x + e^{-y^2/2}, x + y + e^{-z^2/2}\right)$ ao longo da curva interseção da superfície $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, $z \geq 0$, com o plano $y = -1$, orientada no sentido de crescimento de x.

44. Seja o campo vetorial $\vec{F} = \left(3yz^2 - 2xe^z\right)\,\vec{i} + \left(3xz^2 + \cos y\right)\,\vec{j} + \left(6xyz - x^2e^z\right)\,\vec{k}$

    (a) $\vec{F}$ é conservativo? Por quê?

    (b) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, se C é a curva descrita por $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \left(\frac{\pi}{2}t^3\right)\,\vec{j} + (t-1)(t-2)\,\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$

    (c) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é a fronteira do plano $x + y + z = 2$, que fica no primeiro octante, orientada no sentido anti-horário.

Respostas

1. (a) 24π
   (b) $\frac{\pi}{2}$
2. 1500π
3. 3π
4. $\frac{12\pi}{5}$
5. $\frac{2}{3}$
6. 17π
7. $\frac{164\pi}{5}$
8. $\frac{3\pi}{2}$
9. $\frac{81\pi}{4}$
10. $\frac{\pi}{15}\left(890 + 3\sqrt{2}\right)$
11. -12
12. $\frac{2\pi}{3}(h+3)$
13. $\frac{4\pi}{5}$
14. 8π
15. 1
16. $\frac{-9\pi}{2}$
18. $\frac{\pi}{6}$
19. $\frac{1}{3}$
20. 6π
21. $\frac{-3\pi}{4}$
22. (a) 2π
    (b) $-\pi a^2$
24. 4π
25. -4π
26. $\frac{1}{3}$
27. $-2\pi\,a(a+b)$
28. $-\frac{1}{2}$
29. 6π
30. 75π
31. 16
32. 32π
33. 5π
34. π
35. (a) 0
    (b) $-\pi$
    (c) $-\frac{3\pi}{4}$
    (d) $\frac{\pi}{4}$
36. (a) 4
    (b) 4
37. $\frac{8}{3} - e + e^{-1}$
38. $-\frac{16}{3}$
39. 2
40. 32
41. e^{π}
42. $3\,e^{-1}$
43. $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$
44. (a) É conservativo
    (b) 0
    (c) 0