Primeira Lista de Exercícios

1. Sejam A um conjunto não vazio e $P(A)$ o conjunto das partes de A. Dizemos que um conjunto não vazio $\mathcal{P} \subset P(A)$ é uma partição do conjunto A se:
   i) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{P}, B_1 \neq B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \emptyset$;
   ii) $\bigcup_{B \in \mathcal{P}} =$ A.
   Prove que: se $x, y \in A$ e definimos $x \sim y \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{P}$ tal que $x, y \in B$, então $\sim$ define uma relação de equivalência no conjunto A. Mais ainda, $A/\sim\ = \mathcal{P}$.

2. Sejam A um conjunto não vazio e $\sim$ uma relação de equivalência em A. Prove que $A/\sim$ é uma partição do conjunto A.

3. Prove que $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow xy' = x'y$ define uma relação de equivalência no conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, onde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b)/a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\})$.

4. Dê exemplo de relações de equivalência $\sim$ em um conjunto X tais que:
   a) $X/\sim = \{X\}$
   b) $\overline{x} = \{x\}, \forall x \in X$

5. Uma relação $\leq$ entre pares de elementos de um conjunto A diz-se uma *relação de ordem parcial em* A se:
   i) $x \leq x, \forall x \in A$
   ii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in A$
   iii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z, \forall x, y, z \in A$
   Uma relação de ordem parcial diz-se total ou linear se
   iv) $\forall x, y \in A$, tem-se $x \leq y$ ou $y \leq x$.
   Prove que:
   a) $x \leq y \Leftrightarrow (x - y)$ é não negativo, define uma relação de ordem total no conjunto Z.
   b) Se $A = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as funções reais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então:

   $$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

   define uma relação de ordem parcial em A que não é total em A.

6. Sejam a e b inteiros. Mostre que:
   (a) $(-1)a = -a$
   (b) Se $a^2 = 0$, então $a = 0$
   (c) Se $a^2 = a$, então $a = 0$ ou $a = 1$.
   (d) A equação $a + x = b$ tem uma única solução em $\mathbb{Z}$.

7. Sejam a e b inteiros tais que $a < b$. Mostre que $-a > -b$.

8. Dado um inteiro a, chamamos valor absoluto de a o número inteiro designado por $|a|$ e definido como segue:
Se $a \geq 0$, então $|a| = a$.
Se $a < 0$, então $|a| = -a$.

Sejam a, b inteiros. Prove que:

   (a) $|a| \geq 0$ e $|a| = 0$ se e somente se $a = 0$.
   (b) $-|a| \leq a \leq |a|$.
   (c) $|-a| = |a|$.
   (d) $|ab| = |a||b|$.
   (e) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (desilgualdade triangular).
   (f) $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

9. Seja a um inteiro. Mostre que, se $b \in \mathbb{Z}$ é tal que $a \leq b \leq a + 1$, então $b = a$ ou $b = a+1$. (Esse resultado pertmite definir a noção de "sucessor"de um inteiro. Esse é um dos conceitos em que Giuseppe Peano se baseou para elaborar sua axiomática do número natural).

10. Um elemento $a \in \mathbb{Z}$ diz-se inversível se existe um outro elemento $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $aa' = 1$. Mostre que os únicos elementos inversíveis de $\mathbb{Z}$ são 1 e -1. (Sugestão: prove que, se $aa' = 1$, então $|a| = 1$).

11. Sejam a, b, c inteiros. Prove que:

   (a) Se $c > 0$ e $ac < bc$, então $a < b$.
   (b) Se $c < 0$ e $ac > bc$, então $a < b$.
   (c) Se $a < b$, então $a^3 < b^3$. É verdade que, se $a < b$, então $a^2 < b^2$?
   (d) Se $ab > 0$, então $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$.
   (e) Se $a + a + a + a = 0$, então $a = 0$.

12. Prove que a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{Z}$.

13. Prove que todo conjunto não vazio de inteiros limitado superiormente contém um elemento máximo.

14. Prove que se um conjunto de inteiros tem um elemento máximo, então este é único.

15. Calcular a soma dos n primeiros números pares.

16. Calcular a soma dos n primeiros números ímpares.

17. Prove que para todo inteiro positivo n vale:

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

(b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

(c) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(d) $1 + 2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

(e) $n < 2^n$

18. Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais a_n tal que a_1 é dado e, para todo inteiro positivo, tem-se que

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

onde r é um número real fixo, chamado razão.

(a) Mostre que $a_n = a_1 + (n-1)r$

(b) Se $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, mostre que $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}r = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$

19. Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência de números reais a_n tal que a_1 é dado e, para todo inteiro positivo, tem-se que

$$a_{n+1} = a_n.q,$$

onde q é um número real fixo, diferente de zero e de um, chamado razão.

(a) Mostre que $a_n = a_1.q^{n-1}$

(b) Se $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, mostre que $S_n = \frac{q^n-1}{q-1}$

20. O método de recorrência é usado para definir o símbolo $n!$ (fatorial de n). Definimos
i) $1! = 1$
ii) $n! = n[(n-1)!]$, para todo inteiro $n \geq 2$.
Por conveniência define-se também $0! = 1$. Prove que:

(a) $n! > n^2, \quad \forall n \geq 4$

(b) $n! > n^3, \quad \forall n \geq 6$

21. Seja x um inteiro positivo. Mostre que

$$(1+x)^n > 1 + nx, \quad \forall n \geq 2.$$