CÁLCULO II

Cláudio Martins Mendes

Segundo Semestre de 2002

Contents

Chapter 1

Funções com Valores Vetoriais

Até aqui trabalhamos com funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (seqüencias).

Estudaremos agora funções com valores vetorias. As mesmas são úteis para descrever superfícies e curvas espaciais. São também úteis para descrever o movimento de objetos no espaço.

1.1 Definições - Propriedades

Definição 1.1.1. *$F : I \to \mathbb{R}^3$, $I \subset \mathbb{R}$, intervalo $F(t) = (f_1(t)\, , f_2(t)\, , f_3(t))$ ou $F(t) = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath} + f_3(t)\vec{k}$ é dita uma **função com valores vetoriais**.*

Definição 1.1.2. *Se $F(t) = (f_1(t)\, , f_2(t)\, , f_3(t))$ então*

$$\lim_{t\to a} F(t) = \left(\lim_{t\to a} f_1(t)\, , \lim_{t\to a} f_2(t)\, , \lim_{t\to a} f_3(t) \right) .$$

Definição 1.1.3. *F é dita **contínua em a** se $\lim\limits_{t\to a} F(t) = F(a)$.*

Definição 1.1.4. *F tem derivada $F'(t)$ se $F'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(t+h) - f(t)}{h}$.*
Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - f(t)}{h} &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}\, , \lim_{h\to 0} \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h}\, , \lim_{h\to 0} \frac{f_3(t+h) - f_3(t)}{h} \right) \\ &= (f_1'(t)\, , f_2'(t)\, , f_3'(t)) \ . \end{aligned}$$

Definição 1.1.5. $\displaystyle\int_a^b F(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt\,,\ \int_a^b f_2(t)dt\,,\ \int_a^b f_3(t)dt\right)$

ou

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt \cdot \vec{\imath} + \int_a^b f_3(t)dt \cdot \vec{\jmath} + \int_a^b f_3(t)dt \cdot \vec{k}\ .$$

Propriedades: Consideremos:

$$\begin{aligned} F, G : I &\to \mathbb{R}^3 \\ \mu : I &\to \mathbb{R} \end{aligned}$$

(i) $(F+G)'(t) = F'(t) + G'(t)$

(ii) $(\mu \cdot F)'(t) = \mu(t)F'(t) + \mu'(t)F(t)$

(iii) $(F \bullet G)'(t) = F(t) \cdot G'(t) + F'(t) \cdot G(t)$, onde $\bullet$ denota o produto escalar.

(iv) $(F \times G)'(t) = F'(t) \times G'(t) + F'(t) \times G(t)$, onde $\times$ denota o produto vetorial.

Faremos a prova de (iii). As outras serão deixadas como exercício.

Prova de (iii):

Seja $F(t) = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath} + f_3(t)\vec{k}$ e $G(t) = g_1(t)\vec{\imath} + g_2(t)\vec{\jmath} + g_3(t)\vec{k}$.

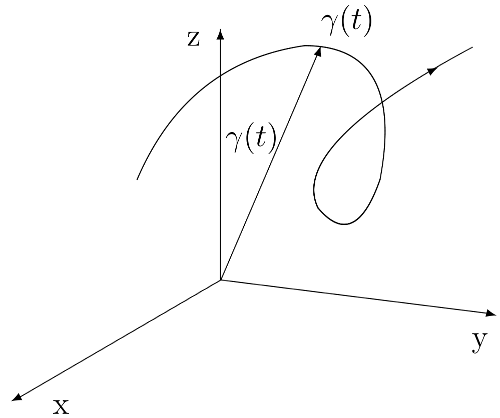
$$(F \bullet G)(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t) \cdot g_i(t)$$

$$\begin{aligned} (F \bullet G)'(t) &= \left(\sum_{i=1}^{3} f_i(t) \cdot g_i(t)\right)' = \sum_{i=1}^{3} (f_i(t) \cdot g_i(t))' = \\ &= \sum_{i=1}^{3} (f_i(t) \cdot g_i'(t) + f_i'(t) \cdot g_i(t)) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t) \cdot g_i'(t) + \sum_{i=1}^{3} f_i'(t) \cdot g_i(t) = \\ &= F(t) \bullet G'(t) + F'(t) \bullet G(t)\ . \end{aligned}$$

Passaremos a nos utilizar de funções do tipo acima para estudar os movimentos no espaço.

1.2 Movimentos no Espaço

Para descrever o movimento de uma partícula no espaço precisamos explicar onde a partícula está em cada instante de tempo $\boldsymbol{t}$ de um certo intervalo. Assim, a cada instante t no intervalo considerado I, corresponde um ponto $\gamma(t)$ e o movimento é descrito por uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$.



Definição 1.2.1. *Uma **curva no** $\mathbb{R}^3$ é uma aplicação contínua $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$, onde I é um intervalo da reta.*

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t)\,,\, \gamma_2(t)\,,\, \gamma_3(t))\,.$$

As equações : $\begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \\ z = \gamma_3(t) \end{cases}$ são chamadas **equações paramétricas de $\boldsymbol{\gamma}$**.

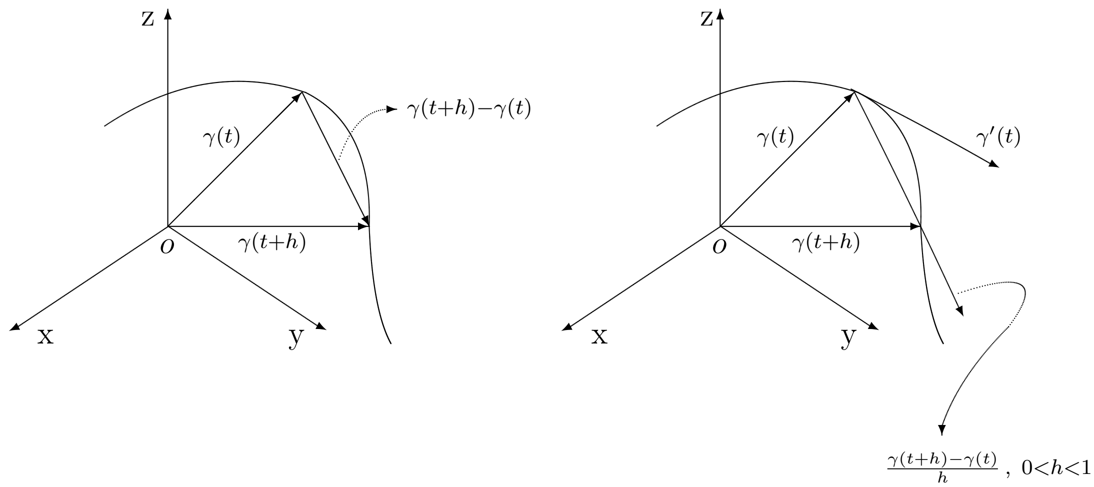
Como vimos, a função vetorial γ tem derivada $\gamma'(t)$ em $t \in I$ se

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}\,.$$

Lembre-se: $\gamma\,'(t) = (\gamma\,'_1(t)\,,\, \gamma\,'_2(t)\,,\, \gamma\,'_3(t))\,.$

Definição 1.2.2. $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ *uma curva. **Traço de $\boldsymbol{\gamma}$** é a imagem do intervalo I por γ. γ é dita **diferenciável de classe** C^r se $\gamma_1\,,\ \gamma_2\,, \gamma_3$ o forem em I.*

A figura a seguir mostra que o vetor $\dfrac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$ tem a direção que, conforme h tende a zero, aproxima-se da direção que costumamos chamar a direção tangente à curva γ em $\gamma(t)$.



A derivada $\gamma\,'(t)$ se existe e é diferente do vetor nulo é chamada o **vetor tangente** a γ em $\gamma(t)$. Ele é usualmente representado com a origem em $\gamma(t)$, como na figura.

Exemplos:

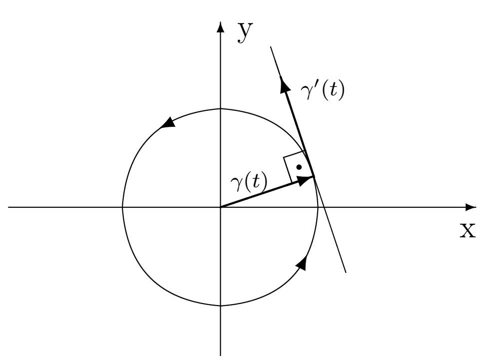
1. $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (\cos t\, ,\, \text{sen}\ t)$.

   Temos $\gamma\,'(t) = (-\text{sen}\ t\, ,\, \cos t)$.

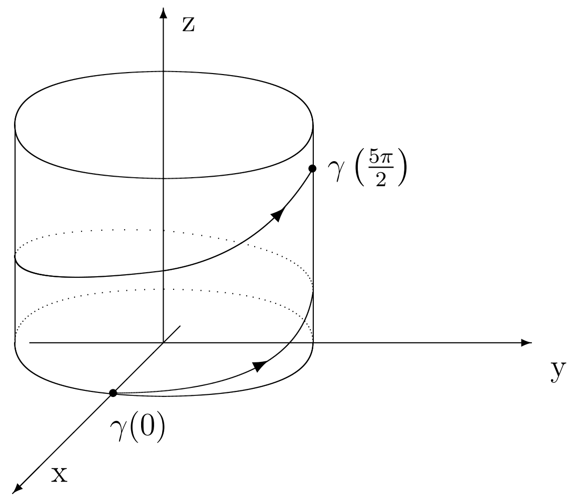
   Notemos que:

   (i) $\|\gamma\,'(t)\| = 1$

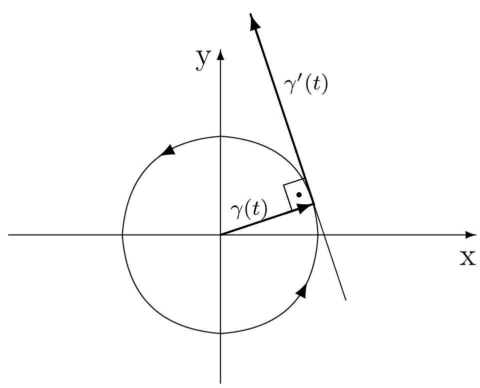
   (ii) $\gamma\,'(t) \bullet \gamma(t) = 0$



2. $\gamma : \left[0\, ,\, \dfrac{5\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3$; $\gamma(t) = (\cos t\, ,\, \text{sen}\ t\, ,\, t)$.



3. $\gamma : [\,0\,,\,\pi\,] \to \mathbb{R}^2$; dada por $\gamma(t) = (\cos 2t\,,\, \operatorname{sen}\, 2t)\,.$



Compare com o exemplo 1 . Note que diferentes curvas podem ter o mesmo traço.

4. Curvas podem ser, em geral, muito arbitrárias. Por exemplo, existe uma curva contínua, a curva de Peano, cujo traço é o quadrado $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ (Para maiores detalhes o leitor pode consultar o Livro de Elon Lages Lima, Elementos de Topologia Geral , pg. 252)

Muitas vezes chamamos o vetor $\gamma\,'(t)$ como o **vetor velocidade**. Isto tem sentido pois estamos entendendo uma curva como o movimento de uma partícula no espaço. Esse movimento é descrito em função do tempo por $\gamma(t)$. Observe que o número $\dfrac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{|h|}$, para h pequeno, é a velocidade média de γ no intervalo de t a $t+h$. Se $\gamma\,'(t)$ existe, não é difícil provar que

$$\|\gamma'(t)\| = \lim_{h\to 0} \frac{\|\gamma(t+h)-\gamma(t)\|}{|h|} \,.$$

De fato: Notemos que

$$\begin{aligned} 0 \;&\le\; \left| \frac{\|\gamma(t+h)-\gamma(t)\|}{|h|} - \|\gamma'(t)\| \right| \overset{(*)}{\le} \\ &\le\; \left\| \frac{\|\gamma(t+h)-\gamma(t)\|}{|h|} - \gamma'(t) \right\| \to 0 \,, \quad \text{com} \quad h \to 0 \,. \end{aligned}$$

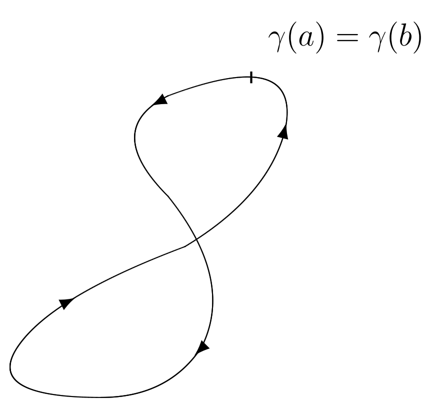
Logo $\dfrac{\|\gamma(t+h)-\gamma(t)\|}{|h|} \to \|\gamma'(t)\|$, com $h \to 0$.

(∗) Usamos a propriedade $\Big| \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \Big| \le \|\vec{u}-\vec{v}\|$.

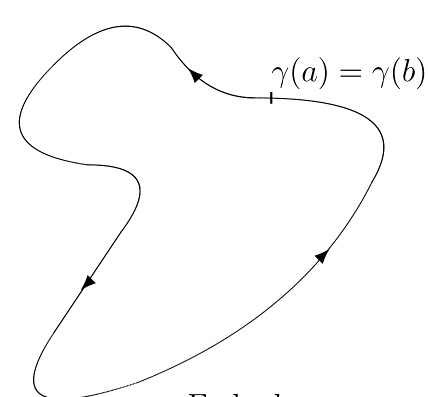
Assim $\|\gamma'(t)\|$ é um limite de velocidades médias sobre intervalos arbitrariamente pequenos. Por esta razão $\|\gamma'(t)\|$ é chamado a velocidade de γ no ponto $\gamma(t)$ e $\gamma'(t)$ é dito o vetor velocidade de γ no ponto $\gamma(t)$.

Definição 1.2.3. *Uma curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ é dita **regular (ou suave)** se for diferenciável de classe C^1 e se $\gamma'(t) = ({\gamma'}_1(t)\,,\ \gamma'_2(t)\,,\ {\gamma'}_3(t)) \neq (0,0,0)\,,\ \forall\, t \in I$.*

Definição 1.2.4. *$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ é dita **regular por partes** (ou **suave por partes**) se existir uma partição finita de $[a,b]$ em subintervalos tal que a restrição de γ a cada subintervalo seja regular. γ é dita **fechada** se $\gamma(a)=\gamma(b)$. Se γ é fechada e o seu traço não se intercepta em nenhum outro ponto então γ é dita **curva fechada simples**.*



Fechada não simples

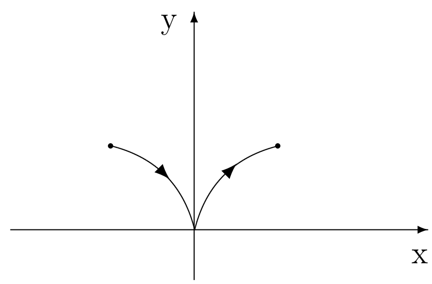


Fechada simples

Exemplos:

1. $\gamma : [-1\,,\,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3\,,\,t^2)$.

$$\begin{cases} y = t^2 = (t^3)^{2/3} = x^{2/3} \\ \text{Assim o traço da curva está contido no gráfico da função } \; y = x^{2/3}\,. \end{cases}$$



Notemos que $\gamma \in C^\infty$. Ainda $\gamma'(t) = (3t^2\,,\,2t)$, $t \in (-1, 1)$.

γ não é regular, uma vez que $\gamma'(0) = (0, 0)$.

γ é regular por partes.

Obs. Note a diferença entre traço de curva e gráfico de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

2. $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3 - 4t\,,\,t^2 - 4)$.

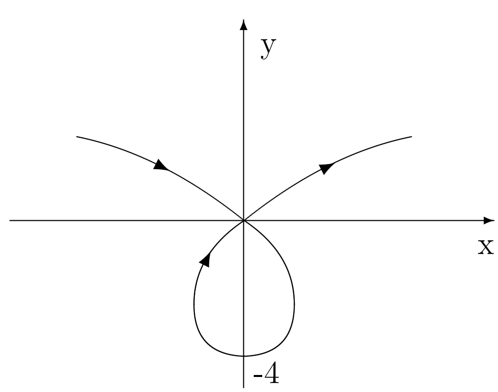
$\gamma'(t) = (3t^2 - 4\,,\,2t) \neq (0, 0)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

$\gamma \in C^\infty$.

Assim γ é regular.

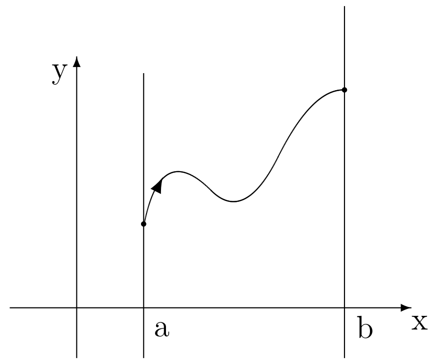
Note: $\gamma(-2) = \gamma(2) = (0, 0)$

$\gamma'(-2) = (8\,,\,-4)$ e $\gamma'(2) = (8\,,\,4)$



3. O gráfico de uma função contínua $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, pode ser parametrizado assim:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \qquad t \in [a, b]$$

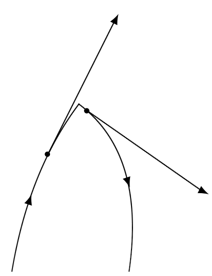


Um resultado que temos é o seguinte: uma curva regular (ou suave) não tem bicos (quinas).

De fato:

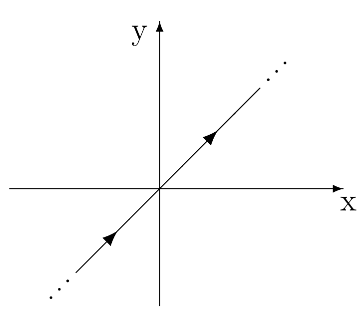
Uma curva regular é tal que o vetor tangente varia de maneira contínua.

Em um bico (quina) a mudança do vetor tangente só pode ser contínua se no bico ele for nulo (contra a regularidade da curva).



A recíproca deste resultado não é verdadeira. Para tanto consideremos o exemplo: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t^3, t^3)$.

Neste caso $\gamma'(0) = (0, 0)$ e assim γ não é regular mas o seu traço não forma bico.

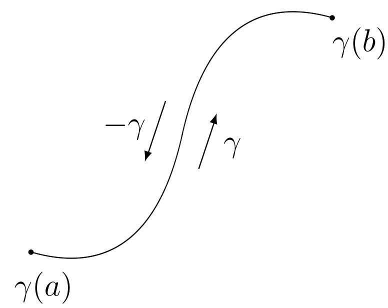


Iremos agora fazer uma **convenção**:

Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$.

Iremos denotar por $-\gamma$ a curva definida como:

$$-\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3\,,\ -\gamma(t) = \gamma(a + b - t).$$



Exercícios:

1. Mostre que se $\|\gamma(t)\|$ é constante então $\gamma\,'(t)$ é ortogonal a $\gamma(t)$, $\forall\, t \in I$.

   Resolução:

   Temos $(\gamma \bullet \gamma)(t) = \gamma(t) \bullet \gamma(t) = \|\gamma(t)\|^2 = C$.

   Derivando obtemos $(\gamma \bullet \gamma)'(t) = 0$.

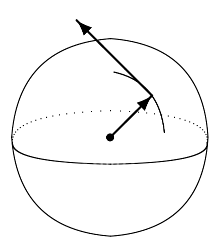
   Usando a propriedade da derivada do produto escalar obtemos:

   $$(\gamma \bullet \gamma)'(t) = 2\,\gamma\,'(t) \bullet \gamma(t)\,.$$

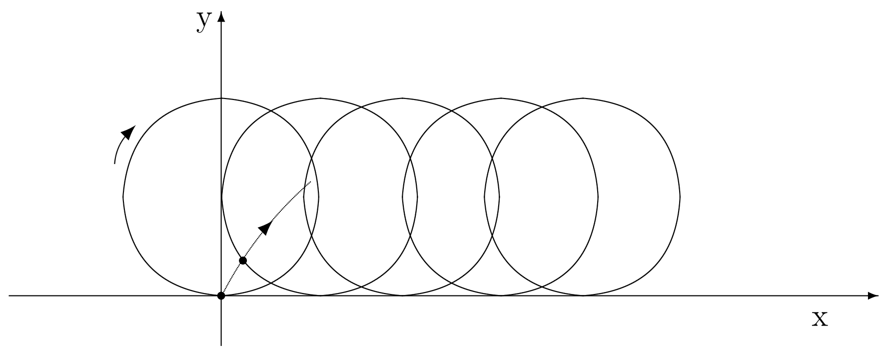
   Logo $\gamma\,'(t) \bullet \gamma(t) = 0$.

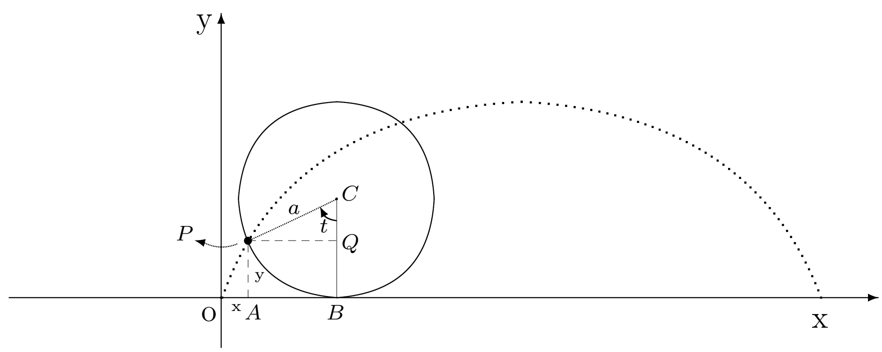
   Assim $\gamma\,'(t)$ é ortogonal a $\gamma(t)$, $\forall\, t \in I$.

   Observe: Se $\|\gamma(t)\|$ é constante então a extremidade de $\gamma(t)$ se desloca sobre uma superfície esférica de centro na origem. O vetor tangente $\gamma\,'(t)$ é sempre ortogonal a um raio da esfera.

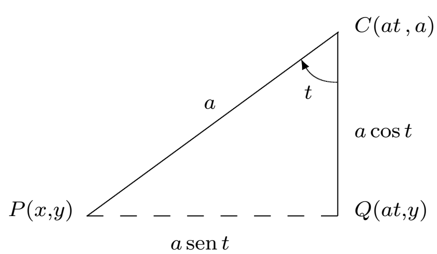


2. A figura abaixo é descrita por um ponto P sobre uma circunferência de raio a que rola sobre o eixo x. Esta curva é chamada **ciclóide**. Determinar uma parametrização dela.





Seja $P(x, y)$.



O giro da circunferência implica que $OB = \text{arco } BP = a.t$.

Logo: $x = OB - AB = OB - PQ = at - a \,\text{sen}\, t = a(t - \text{sen}\ t)$.

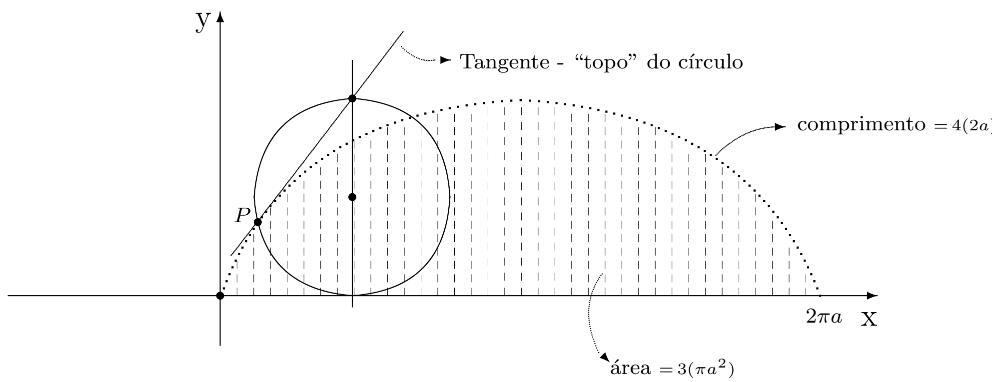
Também $y = BC - QC = a - a\cos t = a(1 - \cos t)$.

Portanto a ciclóide tem a representação paramétrica:

$$\begin{cases} x = a(t - \text{sen}\ t) \\ y = a(1 - \cos t) . \end{cases}$$

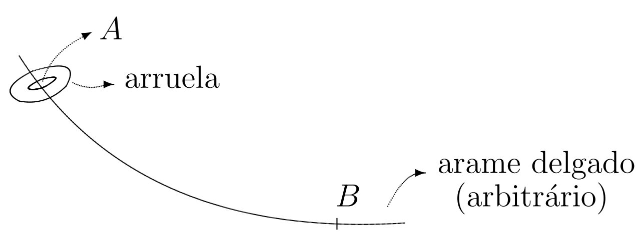
Assim: $\dfrac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$ e $\dfrac{dy}{dt} = a\,\text{sen}\; t$, que são funções contínuas. Ainda, estas se anulam em $t = 2\,n\,\pi$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Logo a ciclóide não é suave.

Nota 1: Vamos registrar aqui algumas propriedades da ciclóide. Para maiores detalhes o leitor pode consultar o Livro Cálculo com Geometria Analítica - Vol. 2 - Simmons - pg. 259.



Nota 2: Vamos aqui também apresentar algumas curiosidades à respeito desta curva. O leitor interessado em maiores detalhes pode consultar o Livro citado anteriormente na Nota 1, pg. 264.

Na situação representada abaixo, consideremos o problema de deslizar arruela sob ação da gravidade somente.

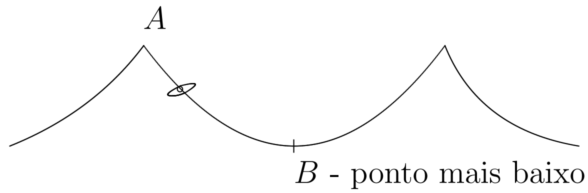


Qual deve ser a forma do arame (trajetória) que permita a arruela ir de A até B no menor tempo possível?

A resposta é uma ciclóide (invertida) com A na origem.

Não é o segmento de reta.

(Menor tempo: braquistócrona)



Soltando-se a arruela em **qualquer** ponto entre A e B o tempo levado até chegar a B é o mesmo.

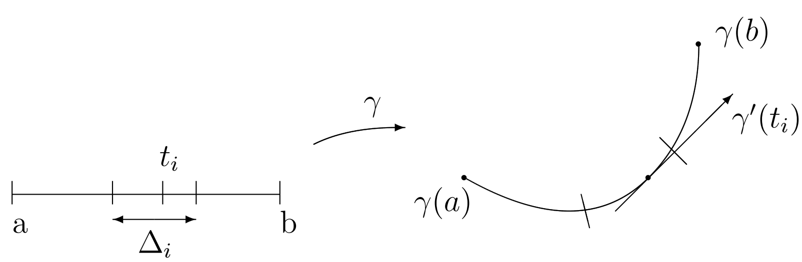
(Tempos iguais: Tautócrona)

Ambos problemas foram resolvidos no sec. XVII pelos Irmãos Bernouilli.

O **comprimento de uma curva** é a distância total percorrida pela partícula móvel. Prova-se que dada uma curva diferenciável de classe C^1, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, seu comprimento é dado por

$$c(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

Vejamos uma interpretação:



$\|\gamma'(t_i)\| \cdot \Delta_i \simeq$ comprimento do arco destacado, melhorando a aproximação quando $\Delta_i \to 0$.

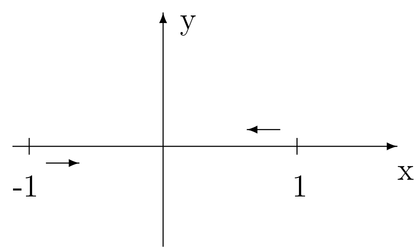
Assim:

$$c(\gamma) = \lim_{\Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \|\gamma_i'(t_i)\| \cdot \Delta_i = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Observação: O Leitor interessado na dedução desta fórmula pode consultar, por exemplo, o livro Advanced Calculus - Buck - pg. 321.

Exemplos:

1. $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, 0)$



O comprimento da curva é 4. Calcule pela definição.

2. Calcular o comprimento da hélice circular $\gamma(t) = (\cos t\,,\,\text{sen}\ t)\,,\ t \in [0, 2\pi]$

$$c(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\text{sen}^2 t + \cos^2 t + 1}\ dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\ dt = 2\sqrt{2}\ \pi$$

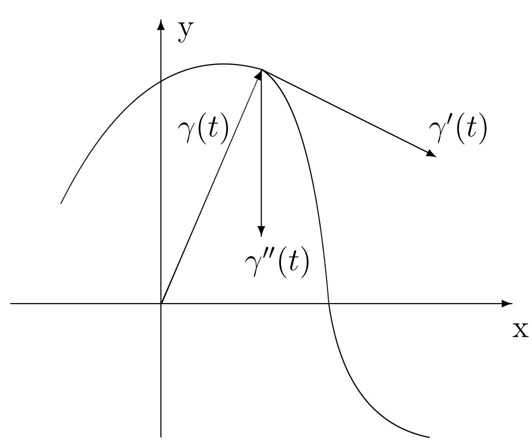
3. Calcular o comprimento do gráfico da função de classe C^1, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

   Podemos pensar na parametrização $\gamma : [a, b] \to R^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$.
   $c(\gamma) = \displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\ dt$ - fórmula já deduzida anteriormente.

4. **Definição:** Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$. $\gamma(t)$ - vetor posição.

   $\gamma'(t)$ - vetor velocidade. $\gamma''(t)$ - vetor aceleração.

   Consideremos a situação:



Conclua que $\gamma''(t)$ aponta para o lado côncavo de γ, como ilustrado acima.

Exemplos:

1. Uma partícula desloca-se num plano obedecendo a lei:

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2\,, \quad \gamma(t) = (t^2 - t)\vec{\imath} + t\vec{\jmath}$$

Determine a velocidade e a aceleração no instante t. Esboce a trajetória e represente geometricamente $\gamma'(1)$ e $\gamma''(1)$.

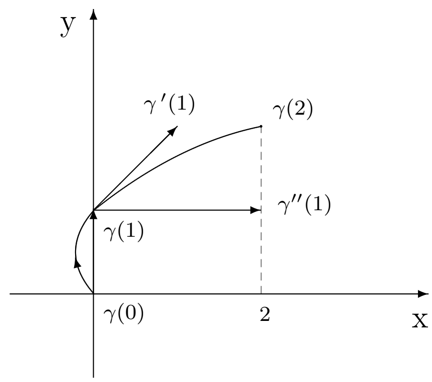
$\gamma'(t) = (2t-1)\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

$\gamma''(t) = 2\,\vec{\imath}$

$\gamma\,(1) = (0,1)$

$\gamma'(1) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$

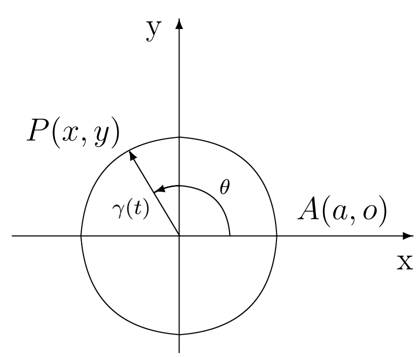
$\gamma''(1) = 2\,\vec{\imath}.$



2. Uma partícula percorre uma circunferência com velocidade angular constante. Mostre que a aceleração é representada por um vetor de módulo constante, orientado para o centro da circunferência (este vetor é chamado **aceleração centrípeta**).

Sem perda de generalidade, podemos supor:

θ = ângulo formado por $\overrightarrow{OP}$ no instante t.



Temos: velocidade angular w = constante.

Assim: $\theta = w \cdot t$.

Logo: $\begin{cases} x = a\cos(wt) \\ y = a \text{ sen } (wt)\,. \end{cases}$

$\gamma(t) = a\cos(wt)\vec{\imath} + a\ \text{sen}(wt)\vec{\jmath}\,.$

$\gamma\,'(t) = -a\,w\ \text{sen}(wt)\vec{\imath} + a\,w\cos(wt)\vec{\jmath}\,.$

$\gamma\,''(t) = -a\,w^2\cos(wt)\vec{\imath} - a\,w^2\cos(wt)\vec{\jmath}\,.$

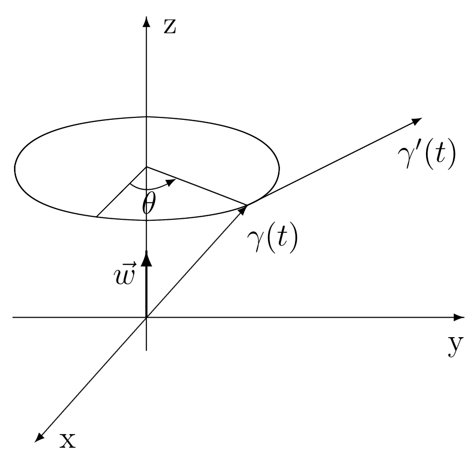
Temos então que:

$$\|\gamma\,''(t)\| = a\,w^2 \quad \text{e} \quad \gamma\,''(t) = -w^2\,\gamma(t)$$

o que comprova que $\gamma\,''(t)$ aponta para o centro da circunferência.

3. Consideremos o movimento dado por:

$$\gamma(t) = a\cos(wt)\vec{\imath} + a\ \text{sen}(wt)\vec{\jmath} + h\,\vec{k}$$

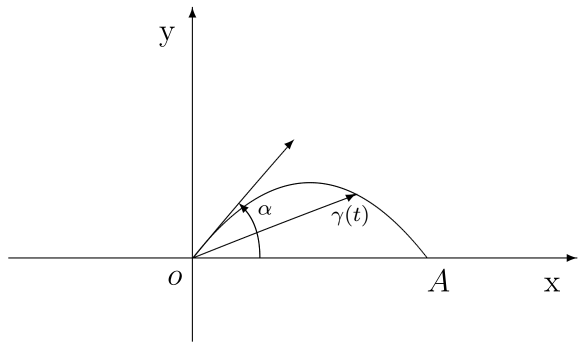


$\vec{w} = w\,\vec{k}$ - chamado **velocidade angular** de γ.

$$\vec{w}\times\gamma(t) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & w \\ a\cos(wt) & a\ \text{sen}(wt) & k \end{vmatrix} = -a\,w\ \text{sen}(wt)\vec{\imath} + a\,w\cos(wt)\vec{\jmath} = \gamma\,'(t)\,.$$

Portanto: o vetor velocidade é o produto vetorial da velocidade angular $\vec{w}$ pelo vetor posição $\gamma(t)$.

4. Vamos agora examinar o comportamento de um projetil disparado por um canhão. Introduzimos o sistema de coordenadas.



Vamos desprezar a resistência do ar, considerando apenas a força da gravidade.

Seja $\|\vec{v_0}\| = v_0$

$\vec{g} = -g\,\vec{\jmath}$, onde $\|\vec{g}\| = g = 9{,}8m/s^2$

Pela 2a. Lei de Newton ($\vec{F} = m\,\vec{a}$) temos:

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{g}$$

ou

$$\gamma''(t) = \vec{g}$$

Integrando:

$$\gamma'(t) = t \cdot \vec{g} + \vec{c}$$

Temos que $\vec{v}_0 = \gamma'(0) = \vec{c}$

Logo $\gamma'(t) = t\,\vec{g} + \vec{v}_0$

Integrando novamente:

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}\,t^2\,\vec{g} + t\,\vec{v}_0 + \vec{d}$$

Ainda: $\vec{0} = \gamma(0) = \vec{d}$

Logo: $\gamma(t) = \frac{1}{2}\,t^2\,\vec{g} + t\,\vec{v}_0 = -\frac{1}{2}\,t^2\,g\,\vec{\jmath} + t(\vec{v}_0 \cos\alpha\,\vec{\imath} + v_0 \text{ sen } \alpha\,\vec{\jmath})$

Temos então as equações paramétricas:

$$(*) \qquad \begin{cases} x = (v_0 \cos\alpha)t \\ y = -\frac{1}{2}\,t^2\,g + (v_0 \text{ sen } \alpha)t \end{cases}$$

Eliminando t, temos:

$y = \dfrac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\;x^2 + (\text{tg } \alpha)x$ - o que mostra que a trajetória é uma parábola.

Alcance (ou ponto A):

Fazemos $y = 0$ em $(*)$

$t(-\frac{1}{2}\, g\, t + v_0 \operatorname{sen}\, \alpha) = 0$

$t = 0$ - corresponde ao ponto 0 ou $t = \dfrac{2\, v_0 \operatorname{sen}\, \alpha}{g}$ - corresponde ao ponto A.

Substituindo na 1a. equação de $(*)$ obtemos:

$$x = v_0 \cos\alpha\, \frac{2\, v_0 \operatorname{sen}\, \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{g} \ .$$

Em particular: alcance máximo se $\operatorname{sen}(2\alpha) = 1$ ou seja $\alpha = 45^0$.

Altura Máxima:

$y' = -\mathrm{tg} + v_0 \operatorname{sen}\, \alpha = 0$

$t = \dfrac{v_0 \operatorname{sen}\, \alpha}{g}$

Assim a altura máxima ocorre em $t = \dfrac{v_0 \operatorname{sen}\, \alpha}{g}$ e $h_{\max} = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}$.

Chapter 2

Funções de Várias Variáveis

2.1 Noções Topológicas no $\mathbb{R}^n$

Consideremos $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Associamos ao ponto P um número real chamado sua *norma*, definido por:

$$\|P\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}$$

Se $P \in \mathbb{R}^2$, então $\|P\| = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$, que é reconhecida com "*distância*" do ponto P à origem, ou seja, o comprimento do vetor associado a P.

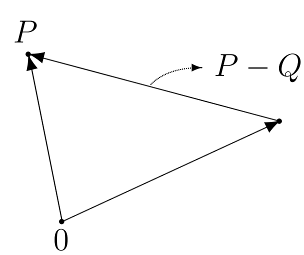
Analogamente, para $P \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}^3$, etc...

Usamos agora a definição de norma para definir distância no $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a *distância* entre os pontos P e Q é dada por $\|P - Q\|$.

Se $P = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Q = (y_1, \ldots, y_n)$, então

$$d(P,Q) = \|P - Q\| = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2\right]^{1/2}$$

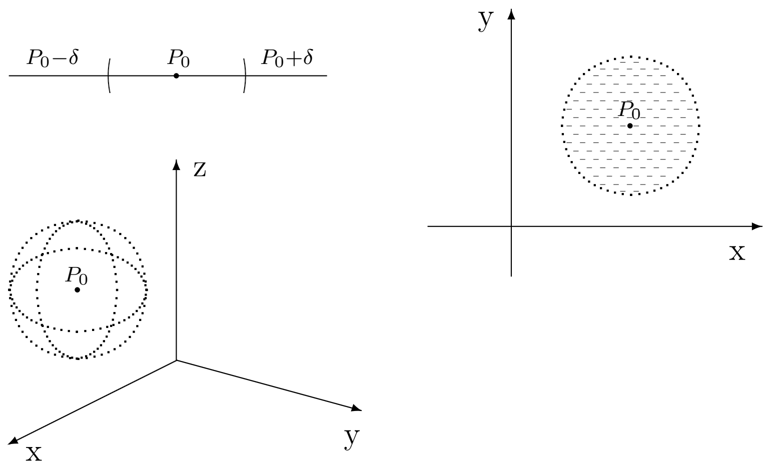
Observação: Esta é a *distância euclidiana*. Observamos que, além deste, há outros conceitos de distância.



Ao espaço $\mathbb{R}^n$, com esta distância, costumamos chamar de *ESPAÇO EUCLIDIANO*.

Definição 2.1.1. *Chama-se* ***bola aberta*** *de centro* $P_0 \in \mathbb{R}^n$ *e raio* $\delta > 0$, *ao seguinte conjunto:*

$$B(P_0, \delta) = \{P \in R^n \mid d(P, P_0) < \delta\}$$



Chama-se ***bola fechada*** de centro $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $\delta > 0$ ao conjunto

$$\overline{B}(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n \mid d(P, P_0) \leq \delta\}$$

Chama-se ***esfera*** de centro $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $\delta > 0$, ao conjunto

$$S(P_0, \delta) = \{P \in \mathbb{R}^n \mid d(P, P_0) = \delta\}$$

Observação: Uma bola aberta de centro P_0 e raio $\delta > 0$ também será chamada uma *vizinhança de raio* δ *do ponto* P_0.

Notação: $V_\delta(P_0)$

Dado um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, qualquer, todo ponto do $\mathbb{R}^n$ tem uma das propriedades:

(a) dizemos que P é **ponto interior** a S, se existe $\delta > 0$ tal que $B(P, \delta) \subset S$.

(b) dizemos que P é **ponto exterior** a S, se existe $\delta > 0$ tal que $B(P, \delta)$ não contém qualquer elemento de S, isto é, $B(P, \delta) \cap S = \emptyset$;

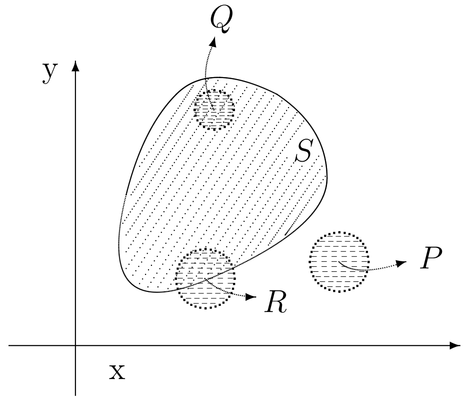
(c) dizemos que P é **ponto fronteira** de S, quando P não é interior nem exterior a S, isto é, $\forall\, \delta > 0$, $B(P, \delta)$ contém pontos de S e pontos que não são de S.

Exemplos:

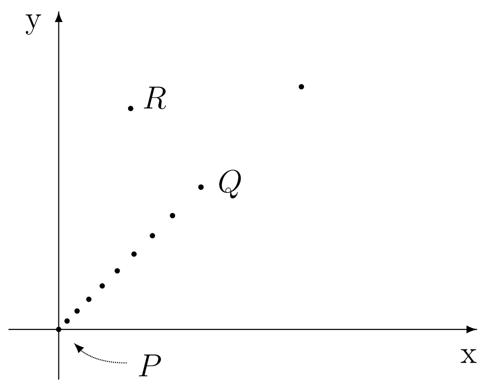
(1) P é exterior a S

Q é interior a S

R é fronteira de S



(2) $S = \left\{ \left(\dfrac{1}{n} , \dfrac{1}{n} \right) \, , \, n \in N \right\}$



P é ponto fronteira de S

Q é ponto fronteira de S

R é ponto exterior a S

Definição 2.1.2. *Seja $A \subset R^n$. Dizemos que A é* ***aberto****, se todo ponto de A for interior a A, isto é, $\forall P \in A, \ \exists \delta > 0$ tal que $B(P, \delta) \subset A$.*

Exemplos:

1. $\mathbb{R}^n$ é aberto no $\mathbb{R}^n$

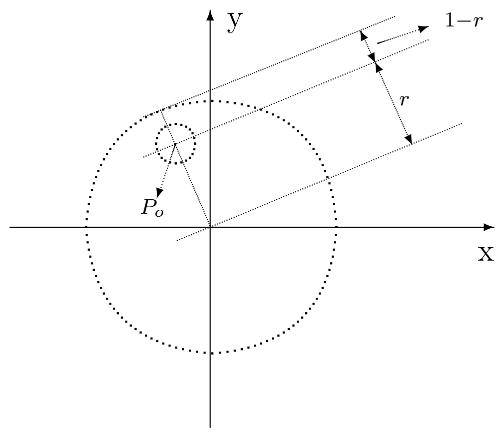
2. $A = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \ \|P\| < 1\}$

   Seja $P_0 \in A \Leftrightarrow \|P_0\| = r < 1$

   Consideremos $B\left(P_0 \, , \, \dfrac{1-r}{2}\right)$

   Mostremos que $B\left(P_0 \, , \, \dfrac{1-r}{2}\right) \subset A$

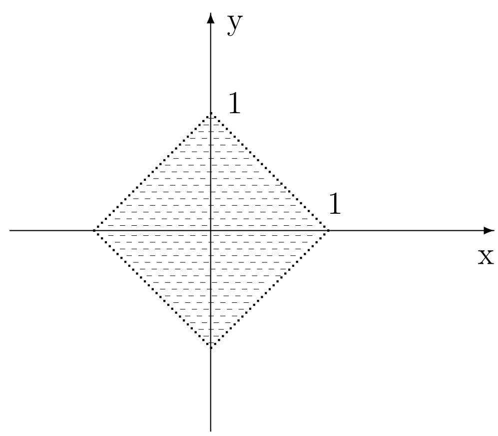
$$
\begin{aligned}
P \in B\left(P_0 \, , \, \frac{1-r}{2}\right) \Longrightarrow \|P\| \ &= \ \|P - P_0 + P_0\| \leq \|P - P_0\| + \|P_0\| = \\
&= \ \|P - P_0\| + r < \frac{1-r}{2} + r < 1 \ .
\end{aligned}
$$



3. Qualquer $B(P_0, \delta)$ é um conjunto aberto no $\mathbb{R}^n$.

4. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \; |x| + |y| < 1\}$

C é aberto



5. $C \cup \{(0, 1)\}$ **não é** aberto.

Observação: Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto dos pontos interiores a A é chamado **interior** de A e é denotado por $\text{int}\, A$ ou $\mathring{A}$.

Analogamente, $\text{ext}\, A$ ou $\text{front}\, A$.

Definição 2.1.3. *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que P é um **ponto de acumulação** de A , se qualquer vizinhança de P contém um ponto de A , diferente de P .*

Exemplos:

1. Todo ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação do $\mathbb{R}^n$.

2. Nenhum ponto $P \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação do conjunto $\emptyset$.

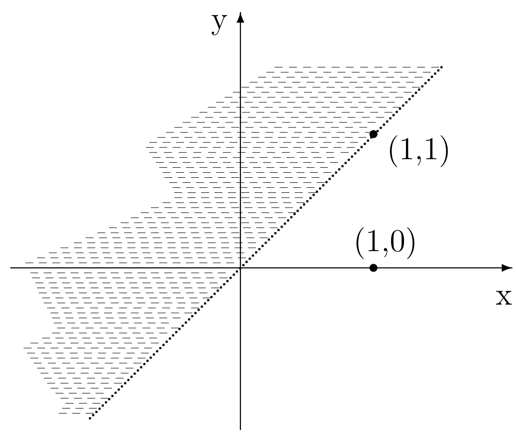
3. $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$

   O conjunto dos pontos de acumulação de A é: $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

4. $A = \{(x, y) \mid y > x\} \cup \{(1, 0)\}$

   $(1, 0) \in A$ mas **não é** ponto de acumulação de A.

   $(1, 1) \notin A$ mas **é** ponto de acumulação de A.



   Conjunto dos pontos de acumulação de A : $\{(x, y) \mid y \geq x\}$.

5. $A = \left\{ \left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n} \right) \mid n \in N \right\}$

   Observe que $(0, 0) \notin A$ e que $(0, 0)$ é o **único** ponto de acumulação de A.

Exercício:

Mostre que se P é ponto de acumulação de um conjunto A, então toda $B(P, \delta)$ contém infinitos pontos de A.

Conclua disto que um conjunto finito não pode ter pontos de acumulação.

Definição 2.1.4. *Dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que P é um* ***ponto isolado*** *de A se $P \in A$ e P* ***não*** *é ponto de acumulação de A.*

Exemplos:

1. Vide exemplo (4) da definição 3:

   (1,0) é ponto isolado de A

   (2,1) não é ponto isolado de A (não pertence a A).

2. Vide exemplo (3) da definição 3 :

   O conjunto A não tem pontos isolados.

Definição 2.1.5. *Um conjunto A é **fechado** se todo ponto de acumulação de A pertence a A.*

Exemplos:

1. $\mathbb{R}^n$ é fechado

2. $\emptyset$ é fechado

3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ não é fechado

4. Vide exemplo (4) da definição 3: A não é fechado

5. Vide exemplo (5) da definição 3: A não é fechado

Exercícios:

1. Prove que todo conjunto finito é fechado.

2. O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ é fechado em $\mathbb{R}^2$?

Observação: Na linguagem comum as palavras ***aberto*** e ***fechado*** são exclusivas e totalizantes. Tal fato não ocorre aqui, como mostram os exemplos abaixo:

conjuntos	aberto	fechado
$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$	sim	não
conjunto finito	não	sim
$\left\{\frac{1}{n} \mid n \in N\right\}$	não	não
$\mathbb{R}^2$	sim	sim

Teorema 2.1.6. *Um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto.*

Prova:

$(\longrightarrow)$ Seja F - conjunto fechado

$\forall\, P \in \mathcal{C}F \Leftrightarrow P \notin F$ (fechado) $\Rightarrow$ P **não** é ponto de acumulação de $F \Leftrightarrow \exists\, \delta > 0$ tal que $B(P, \delta) \subset \mathcal{C}F$. Portanto $\mathcal{C}F$ é aberto.

$(\longleftarrow)$ Seja $\mathcal{C}F$ - conjunto aberto

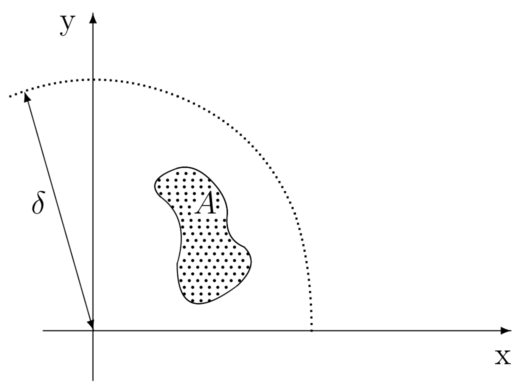
Consideremos P um ponto de acumulação qualquer de F. Mostremos que $P \in F$.

Suponhamos que $P \notin F \Rightarrow P \in \mathcal{C}F$ (aberto).

$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$ tal que $B(P, \delta) \subset \mathcal{C}F \Rightarrow P$ não é ponto de acumulação de F (contra hipótese).

Logo $P \in F$ e assim F é fechado.

Definição 2.1.7. *$A \subset \mathbb{R}^n$ é dito* ***limitado*** *se existe $\delta > 0$ tal que $A \subset B(0, \delta)$.*



Exemplos:

1. Qualquer $B(P, \delta)$ é um conjunto limitado

2. $\{(1, m) \mid m \in N\}$ não é limitado

3. $\{(\text{sen}\ x\, ,\, \cos x) \mid x \in R\}$ é limitado. Desenhe-o.

Vamos agora enunciar um dos resultados básicos do Cálculo, que garante a existência de pontos de acumulação. Para a prova, o leitor pode consultar o livro: Advanced Calculus, Buck, pg. 38 .

Teorema 2.1.8 (Bolzano-Weierstrass). *Todo subconjunto infinito e limitado do $\mathbb{R}^n$ tem pelo menos um ponto de acumulação.*

Definição 2.1.9. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se diz **compacto** quando é fechado e limitado.*

Exemplos:

1. Todo conjunto finito é compacto
2. Toda bola fechada do $\mathbb{R}^n$ é compacta
3. $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ é compacto

Definição 2.1.10. *Uma coleção $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de conjuntos abertos é chamada uma **cobertura aberta** ou um **recobrimento aberto** do conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} \Omega_\alpha$.*

Exemplos:

1. $\{B(0, n)\}_{n \in N}$ cobertura aberta do $\mathbb{R}^n$
2. $\{B(P, 1)\}_{P \in \mathbb{Z}^n}$ cobertura aberta do $\mathbb{R}^n$
3. $\{B(P, \frac{1}{2})\}_{P \in \mathbb{Z}^n}$ não é cobertura aberta do $\mathbb{R}^n$ mas é de $\mathbb{Z}^n$

Definição 2.1.11. *Seja Ω uma cobertura de $A \subset \mathbb{R}^n$. Uma subcoleção Ω' de Ω é dita uma **subcobertura** de A relativamente a Ω se Ω' ainda é cobertura de A .*

Observação: Se o número dos conjuntos na subcobertura é finito ela é dita **subcobertura finita**.

Exemplo:

1. $\{B(0, n)\}_{n \in N}$ cobertura do $\mathbb{R}^n$
   $\{B(0, n)\}_{n \in 2N}$ subcobertura do $\mathbb{R}^n$ relativa a cobertura acima

Uma caracterização de grande valor teórico dos conjuntos compactos (cuja prova pode ser encontrada em Advanced Calculus, Buck, pg. 39) é a seguinte:

Teorema 2.1.12 (Heine-Borel). *Toda cobertura aberta de um conjunto compacto $A \subset \mathbb{R}^n$ admite uma subcobertura finita.*

Exercícios:

1. Se A e B são conjuntos fechados, mostre que $A \cap B$ e $A \cup B$ são também fechados.

2. Esboce os seguintes conjuntos:
   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ \max\{|x|, |y|\} < 1\}$
   $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ |x| + |y| < 1\}$

3. Pense e veja se concorda:

   (i) O conjunto $\{x \in R \ | \ 0 < x < 1\}$ é aberto;

   (ii) O conjunto $\{(x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \ | \ 0 < x < 1\}$ não é aberto;

   (iii) Qualquer plano **não** é aberto no $\mathbb{R}^3$.

4. Qual é a fronteira do conjunto

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x, y \in \mathbb{Q}\}$$

   Observe que $\mathbb{R}^2 - P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ (x, y) \notin P\}$ não é um conjunto aberto.

5. Determine os pontos de acumulação, a fronteira e o interior dos seguintes conjuntos:

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x \geq 0\}$

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ |x| = |y|\}$

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ | \ x, y \in \mathbb{Z}\}$

   (d) $\mathbb{R}^3$

   (e) $\{(x, y) \ | \ x^2 - y^2 \geq 1\}$

   (f) $\left\{\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \ | \ m, n \in \mathbb{N}\right\}$. Esboce o conjunto.

   (g) $\{(x, y, z) \ | \ x^2 + y^2 + z^2 > 4\}$

6. Citar as propriedades que se aplicam a cada um dos conjuntos do exercício anterior, dentre as seguintes: aberto, fechado, limitado, finito.

7. Seja S o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $y = \text{sen}\,\dfrac{1}{x}$ e $x > 0$. Determine $\overset{\circ}{S}$. S é fechado? Determine front S.

8. Considere $S = \{(x, y) \ | \ x^2 + y^2 = 1 \quad \textbf{ou} \quad y = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 1\}$. Determine $\overset{\circ}{S}$. S é fechado?

9. Justifique porque **não** se pode aplicar o teorema de Heine-Borel aos seguintes conjuntos e respectivos recobrimentos:

$A = [a,b] \times [c,d]$ $\{S_y\}_{y \in [c,d]}$ onde $S_y = [a,b] \times \{y\}$	$A = \mathbb{R}^2$ $\{V_\delta(0)\}_{\delta \in N}$	$A = V_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ $\{V_r(0)\}_{0<r<1}$

10. Mostre que um ponto fronteira de S que não está em S é um ponto de acumulação de S.

11. Determine um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ com exatamente três pontos de acumulação.
Será possível conseguir um subconjunto do $\mathbb{R}^2$ com exatamente três pontos interiores?

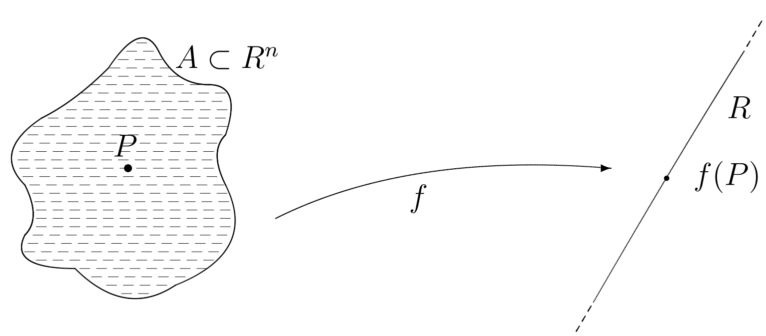
12. Prove que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ que não tenha pontos de acumulação não tem pontos interiores.

2.2 Funções - Limites - Continuidade

2.2.1 Definição

Definição 2.2.1. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Uma **função** f definida em A com valores em $\mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada ponto de A um e um só número real.*

Os pontos de A são chamados **variáveis independentes**.



Notação: $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

O conjunto A é chamado **domínio de f**.

O conjunto $B = \{f(P) \mid P \in A\}$ é chamado **imagem de f** e denotado por $Im(f)$.

Observação: Durante o curso de Cálculo I estudamos funções $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Generalizações deste conceito podem ser feitas das mais diversas maneiras. Por exemplo, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\ell : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, etc.

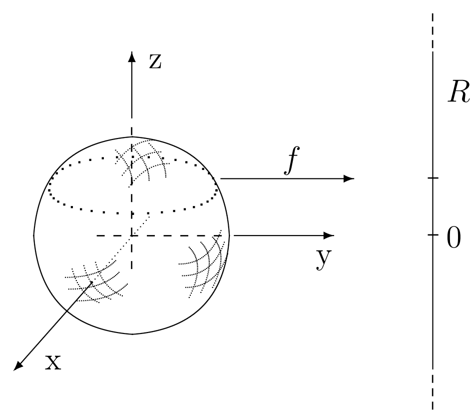
Todos estes casos aparecerão durante o curso, mas em especial estaremos trabalhando com $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mais particularmente com $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exemplos:

1. $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

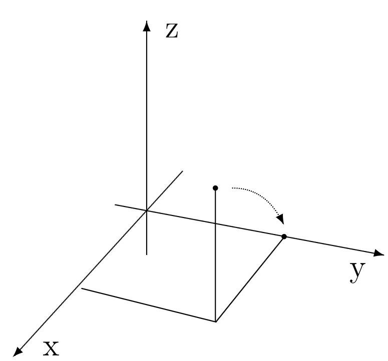
   $f(x, y, z) =$ altura em relação ao plano xy

   $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$



2. $P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

   $(x_1, \dots, x_n) \to x_i$ **i-ésima projeção** por exemplo, $n = 3$ e $i = 2$, $(x, y, z) \to y$.



Exercício: Encontre o domínio da função dada por $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x-y^2}}$.

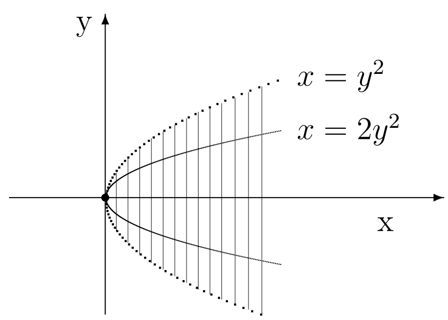
Encontre também os pontos (x,y) para os quais $f(x,y)=1$.

Resolução:

A expressão só faz sentido nos pontos (x,y) tais que $x-y^2>0$ ou seja $x>y^2$.

Ainda: $f(x,y)=1 \Leftrightarrow y=\sqrt{x-y^2} \Rightarrow y^2 = x - y^2 \Leftrightarrow x = 2y^2$.

A seguir representamos o domínio de f e os pontos onde $f(x,y)=1$.



Observação: Analogamente como feito para função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ podemos definir, ponto a ponto, a soma, o produto, a divisão de duas funções $f,g : A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Por exemplo: a função soma $f+g$ é definida por: $(f+g)(P)=f(P)+g(P),\ \forall\, P\in A$.

2.2.2 Gráficos

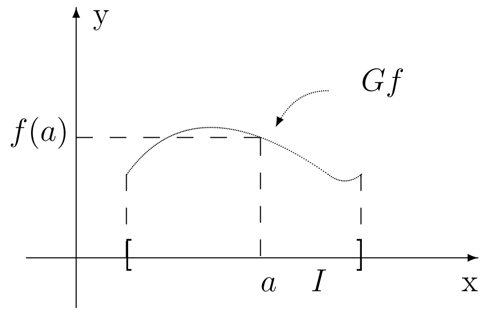
Definição 2.2.2. $f : A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. *Chama-se **gráfico de f** ao subconjunto do $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por*

$$G_f = \{(P, f(P)) \mid P\in A\}\,.$$

Observação: Como o gráfico é um subconjunto do R^{n+1} e no papel podemos representar até o $\mathbb{R}^3$ então podemos desenhar o gráfico de funções de no máximo duas variáveis, isto é, $n=2$.

Exemplos:

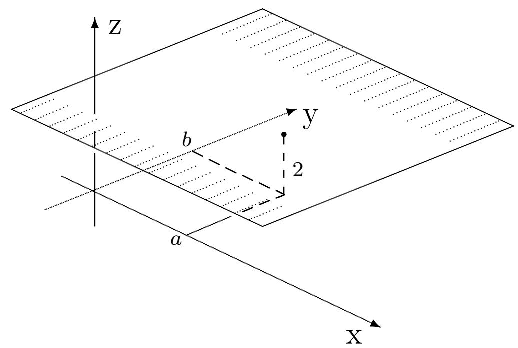
(1) $f : I \subset R \to R$



(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(P) = 2$

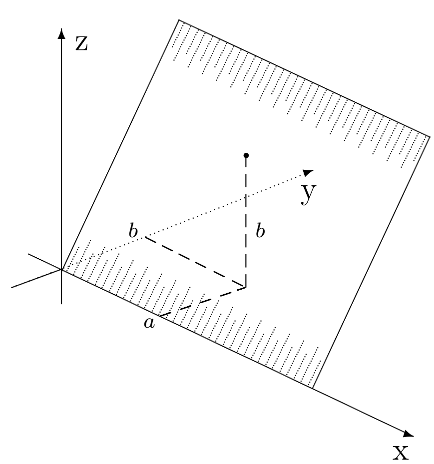
$G_f = \{(x, y, 2) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$



(3) $f : R^2 \to R$

$(x, y) \to y$

$G_f = \{(x, y, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$

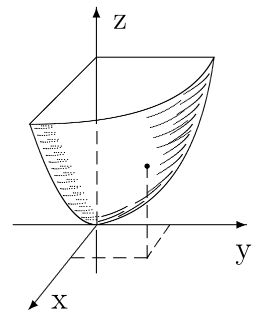


(4) $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to x^2 + y^2$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$

$G_f = \{(x,y,x^2+y^2) \ / \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$

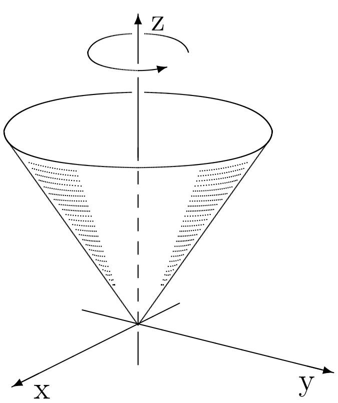


(5) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(P) =$ distância de P ao

ponto (0,0), ou seja,

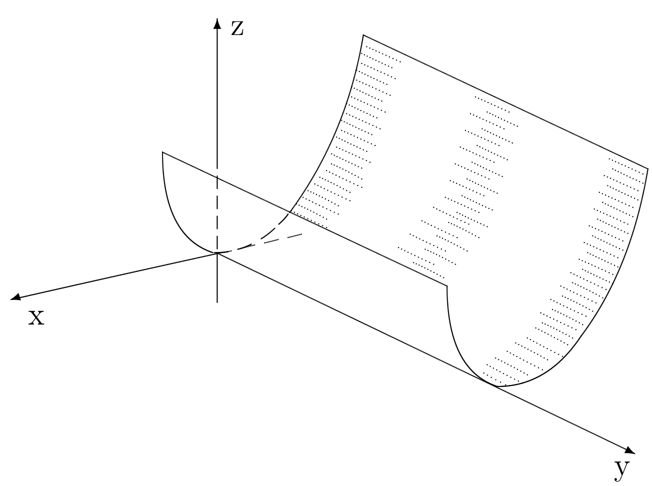
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$



(6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to x^2$

$G_f = \{(x,y,x^2) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$



Exercícios

1. Esboce o gráfico de $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(P) =$ distância do ponto P ao ponto $(0,0)$ onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$.

2. Tente definir uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico seja uma "telha eternit" .

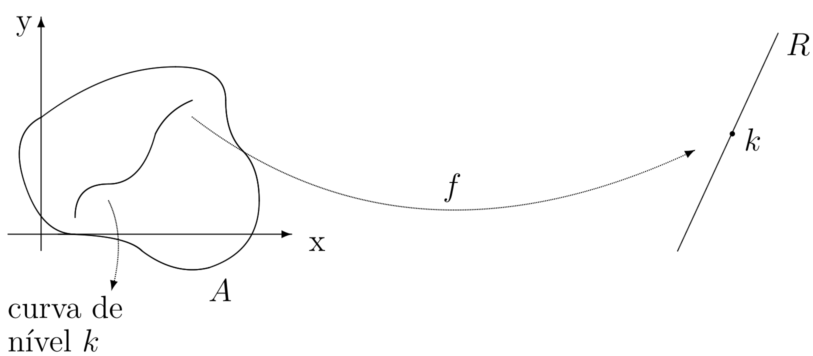
3. Esboce o gráfico de $f(x,y) = x^2 + |y|$.

2.3 Curvas e Superfícies de Nível

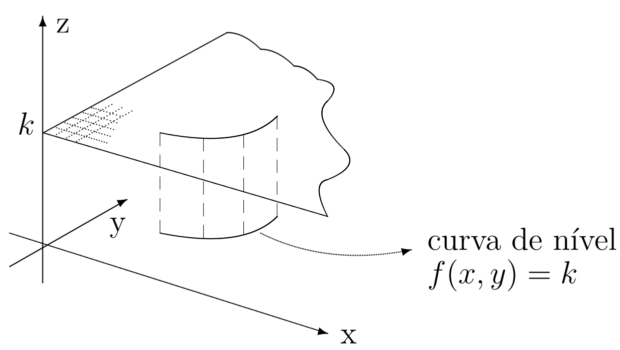
Existe uma outra técnica gráfica, útil, para descrever o comportamento de uma função de duas variáveis. O método consiste em descobrir no plano xy os gráficos das equações $f(x,y) = k$ para diferentes valores de k . Os gráficos obtidos desta maneira são chamados as **curvas de nível** da função f .

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Curva de nível k : $\{(x,y) \in A \ \text{ tal que } \ f(x,y) = k\}$.



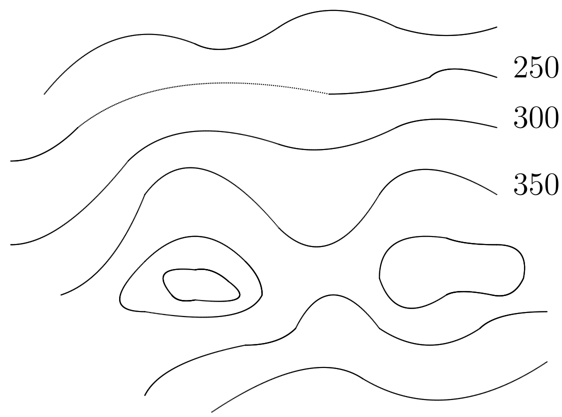
ou



Exemplos:

1. $z = f(x,y) =$ altura em relação ao nível do mar (definida em uma pequena porção aproximadamente plana).

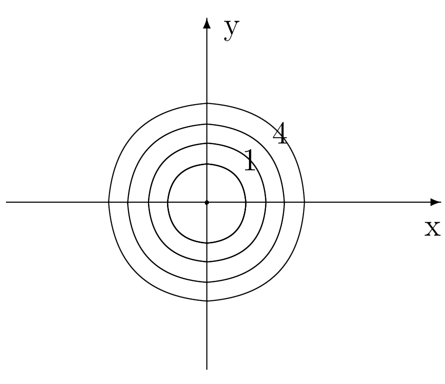
Nossas curvas de nível correspondem às **linhas de contorno** em uma mapa topográfico.

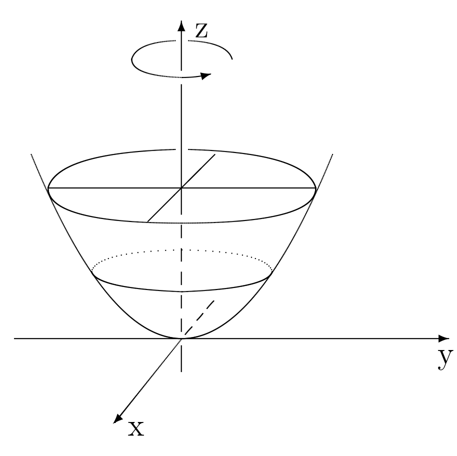


2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $f(x, y) = x^2 + y^2$

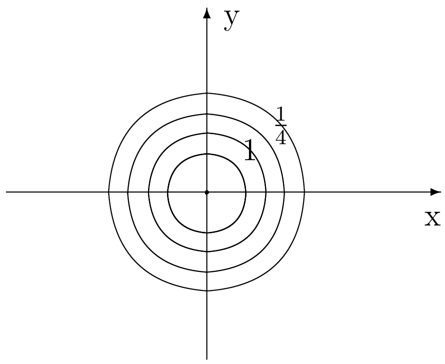
   As curvas de nível são os gráficos das equações $x^2 + y^2 = k$.

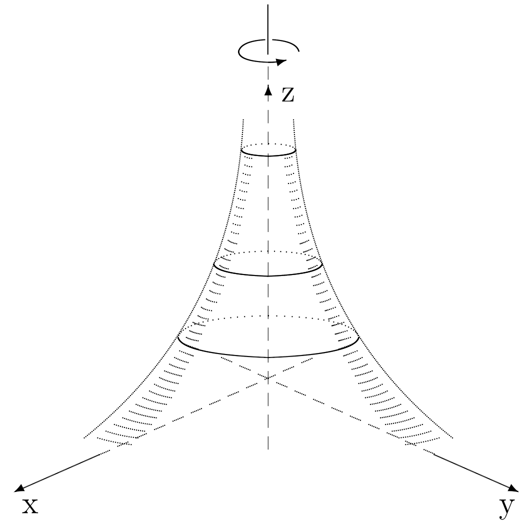




3. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$
Curvas de nível: $x^2+y^2=c$.





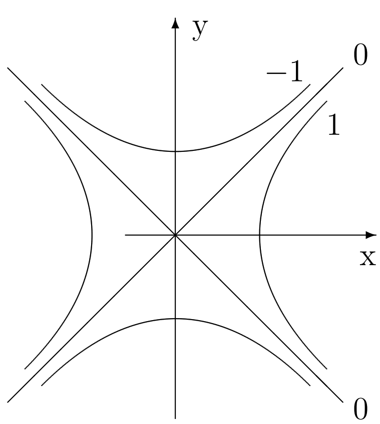
4. $z = f(x,y) = x^2 - y^2$

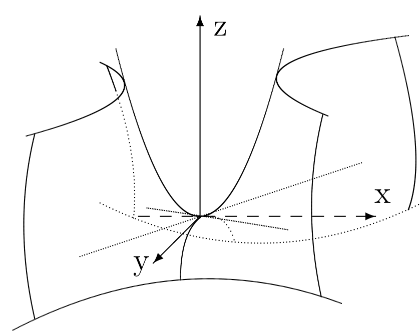
   Curvas de nível:

   $x^2 - y^2 = c$

   $c = 0 \rightarrow |x| = |y|$

   $c \neq 0$ - hipérboles



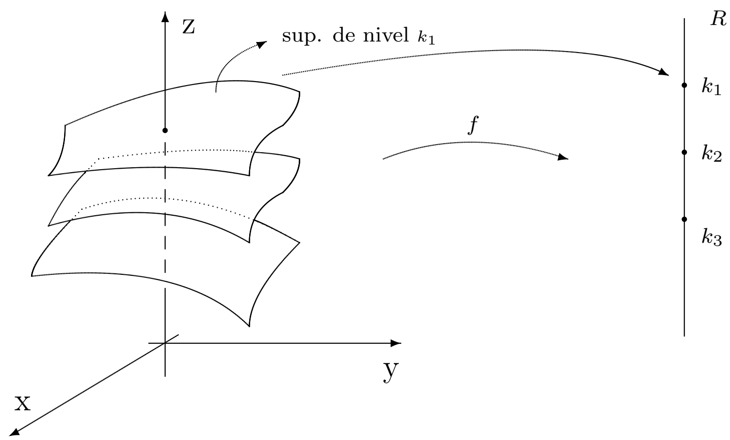


Se f é uma função de três variáveis x, y, z então, por definição, as **superfícies de nível** de f são os gráficos de $f(x,y,z) = k$, para diferentes valores de k.

$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Superfícies de nível $k : \{(x, y, z) \in A \text{ tal que } f(x, y, z) = k\}$.

Em aplicações, por exemplo, se $f(x, y, z)$ é a temperatura no ponto (x, y, z) então as superfícies de nível são chamadas **superfícies isotermas**. Se $f(x, y, z)$ representa potencial elas são chamadas **superfícies equipotenciais**.



Exemplos:

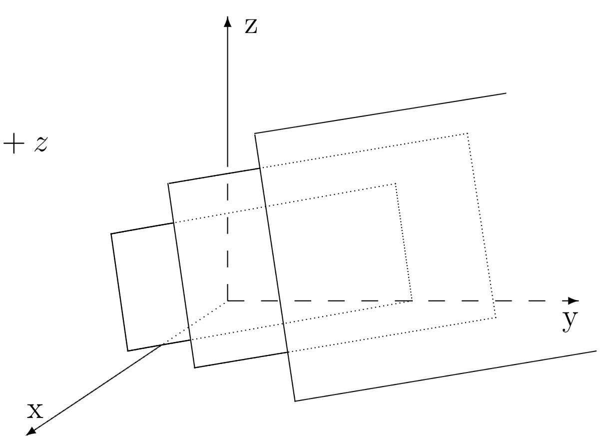
(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x, y, z) = 2x + y + z$

superfícies de nível

$2x + y + z = k$

planos paralelos



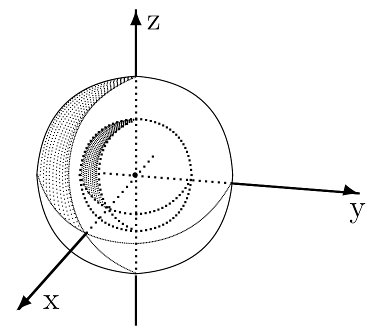
(2) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

superfícies de nível

$x^2 + y^2 + z^2 = k \geq 0$

Superfícies esféricas de centro na origem

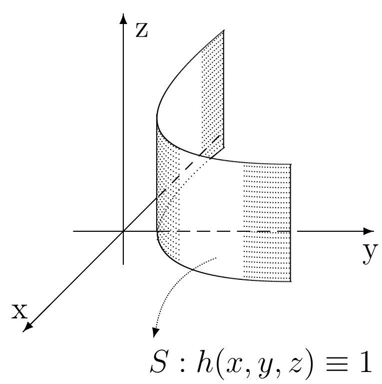


(3) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$h(x, y, z) = \dfrac{y}{e^x}$

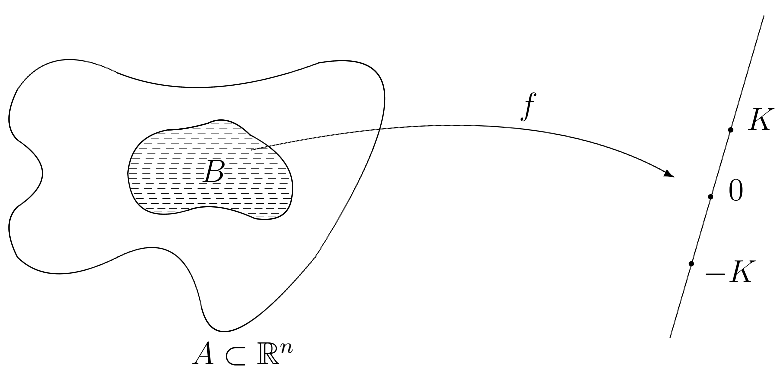
superfícies de nível

$y = ke^x$



2.4 Funções Limitadas

Definição 2.4.1. *$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se* **limitada** *em um conjunto $B \subset A$ se existir uma constante $K \in R$ tal que $|f(P)| \leq K, \ \forall \ P \in B$.*



Exemplos:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $f(x, y) = 2x + y$

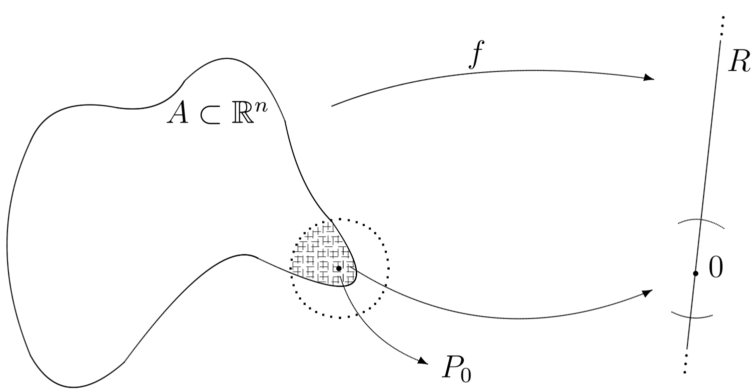
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$

f é limitada em B ; senão vejamos:

$|f(x, y)| = |2x + y| \leq 2|x| + |y| \leq 2a + a = 3a$.

2. $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$
   $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$
   f não é limitada em $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.4.2. *$f : A \subset \mathbb{R}^n \to R$ diz-se* **limitada em um ponto** *$P_0 \in A$ se existir $\delta > 0$ tal que f seja limitada em $A \cap B(P_0, \delta)$.*



Exemplo:

$f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$

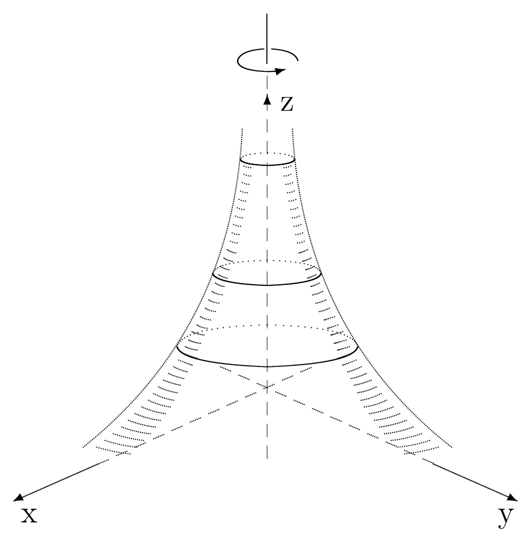
$f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

não é limitada em

$\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ mas é limitada

em qualquer ponto de

$\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.



Teorema 2.4.3. *Se uma função é limitada em todos os pontos de um conjunto compacto C então ela é limitada em C .*

Prova:

Para todo $P \in C$ existe $B(P, \delta_p)$ tal que

$$|f(Q)| < K_p \ , \quad \forall\, Q \in C \cap B(P, \delta_p) \, .$$

Como C é compacto, pelo Teorema de Heine-Borel existe um número finito de bolas abertas $B(P_1, \delta_{p_1}), \ldots, B(P_n, \delta_{p_n})$ que recobrem C.

Temos as constantes $K_{p_1}, \ldots, K_{p_n}$.

Seja $K = \max\{K_{p_1}, \ldots, K_{p_n}\}$.

Então,

$$P \in C \Leftrightarrow \exists\ P_i \quad \text{tal que} \quad P \in B(P_i, \delta_{p_i}) \Leftrightarrow |f(P)| < K_{p_i} \leq K \, .$$

Portanto f é limitada em C.

Exercícios:

1. Determinar os domínios máximos de cada uma das funções abaixo, esboçando-os graficamente:

   (a) $z = \text{arc sen}\dfrac{x}{x+y}$ (b) $z = \dfrac{\ln(x-2y)}{\sqrt{y-2x}}$

   (c) $z = \ln(36 - 4x^2 - 9y^2)$ (d) $z = \dfrac{x}{y^2 - 4x}$

   (e) $z = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

2. Esboce o gráfico de:

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

   (b) $g(x,y) = \text{sen}\dfrac{1}{x} \ , \quad x \neq 0$

3. Considere no $\mathbb{R}^2$ o seguinte conjunto:

$$H = \{(x,y) \in R^2 \mid x \leq y \leq x + 1\} \, .$$

   Considere ainda $f : H \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2$. Observe que f é limitada em todo ponto do conjunto H mas não é limitada em H. Compare com o resultado dado no Teorema 5.4.3.

4. Traçar curvas de nível para as funções

(a) $f(x,y) = xy$

(b) $g(x,y) = \cos x$

5. Determinar as superfícies de nível das funções:

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2}{z}$

(b) $g(x,y,z) = x + 2y$

6. Ache as curvas de nível de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \operatorname{sen}(x-y)$. Esboce o gráfico de f.

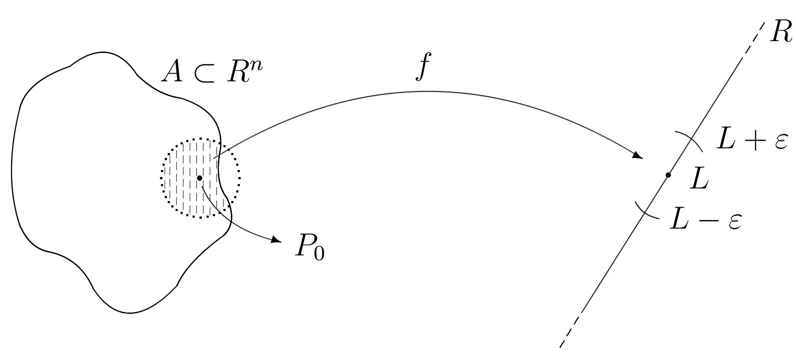
2.5 Limites

Definição 2.5.1. *Escrevemos* $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$ *e dizemos que* ***limite da função*** f ***no ponto*** P_0 ***é igual a*** L *quando:*

(i) $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* P_0 *é ponto de acumulação de* A.

(ii) Correspondendo a cada $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$0 < \|P - P_0\| = d(P, P_0) < \delta \Big\} \Longrightarrow |f(P) - L| < \varepsilon$$



Observação: Quando $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = 0$ diremos frequentemente que f é **infinitésima** no ponto P_0.

Exemplos:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $(x, y) \to x$

   f é infinitésima no ponto (0,0)

   De fato:

   Sabemos que $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$

   Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta \leq \varepsilon$.

   Então,

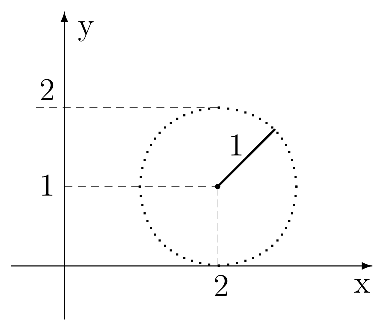
   $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Longrightarrow |x| < \delta \leq \varepsilon$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $f(x, y) = x + y^2$

   $\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x, y) = 3$

   De fato:

   Sabemos que

   $|x + y^2 - 3| = |x - 2 + y^2 - 1| \leq |x - 2| + |y + 1|\,|y - 1|$

   Então, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \min\left\{1\,,\, \frac{\varepsilon}{4}\right\}$.

   Logo, $|y + 1| < 3$.

   Teremos,

   $[(x-2)^2+(y-1)^2]^{1/2} < \delta \Rightarrow x+y^2-3| \leq |x-2|+|y+1|\,|y-1| \leq \delta+3\delta = 4\delta \leq 4\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$

Propriedades:

1. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem limite em um ponto P_0 então este limite é único.

2. Se $\lim_{P\to P_0} f(P) = L_1$ e $\lim_{P\to P_0} g(P) = L_2$ então, $\lim_{P\to P_0}(f + g)(P) = L_1 + L_2$ e $\lim_{P\to P_0}(fg)(P) = L_1L_2$

3. Se $\lim_{P\to P_0} f(P) = L \neq 0$, então, $\lim_{P\to P_0} \frac{1}{f(P)} = \frac{1}{L}$

   Ainda se $\lim_{P\to P_0} g(P) = M$, então, $\lim_{P\to P_0} \frac{g(P)}{f(P)} = \frac{M}{L}$

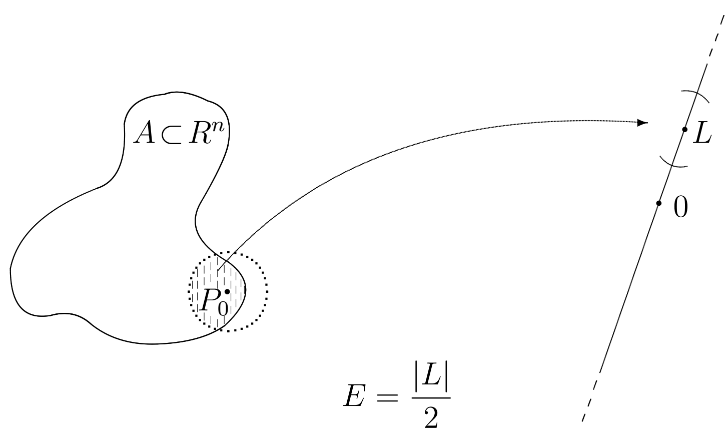
4. Se uma função tem limite em um ponto P_0 então ela é limitada em P_0. (P_0 pertencente ao domínio da função).

   Observação: A recíproca não vale. (Dê um contra exemplo).

5. O produto de um infinitésimo em um ponto por uma limitada no ponto é um infinitésimo no ponto.

6. **Teorema da Conservação do Sinal:**

   Se $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = L \neq 0$, então existe $B(P_0, \delta)$ na qual as imagens $f(P)$ têm o mesmo sinal de L (exceto, possívelmente, $f(P_0)$).



No caso de uma variável vimos que existem somente duas "direções" através das quais o ponto P pode se aproximar do ponto P_0. Introduzimos então as noções de limite à esquerda e à direita. No caso de duas variáveis (ou mais) temos um número infinito de "modos de aproximação".

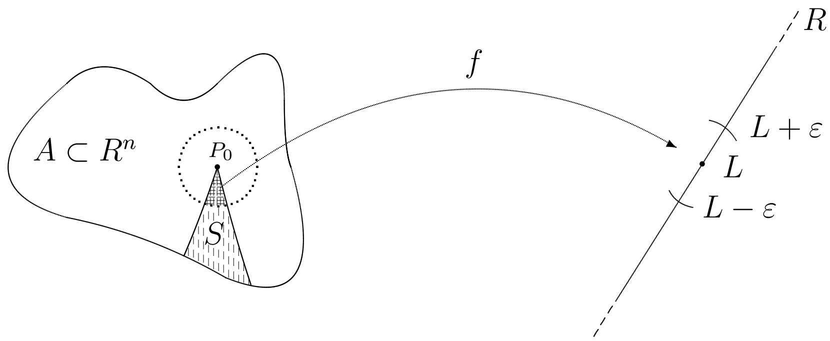
O caso geral é coberto pela seguinte definição:

Definição 2.5.2. *Sejam S um conjunto no qual f está definida e P_0 um ponto de acumulação de S. Dizemos que **$f(P)$ converge para L conforme P aproxima-se de P_0 em S** e escrevemos*

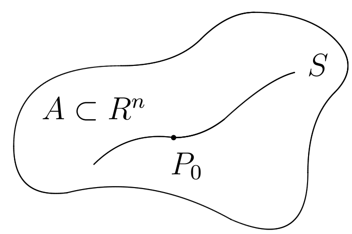
$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in S}} f(P) = L$$

se, e somente se, correspondendo a cada $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} 0 < \|P - P_0\| < \delta \\ P \in S \end{array}\right\} \implies |f(P) - L| < \varepsilon$$



Observação: Um importante caso especial é quando S é um segmento ou um arco de curva.



Teorema 2.5.3. *Se $f(P)$ está definida para todos pontos P em uma vizinhança de P_0, exceto, possivelmente, em P_0 e $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$, então o limite de $f(P)$ existe para P aproximando-se de P_0 em* **qualquer** *conjunto S que tenha P_0 como ponto de acumulação e sempre tem o mesmo valor L.*

Prova:

Dados P_0 e S nas condições.

Dado $\varepsilon > 0$.

Como $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = L$, sabemos que existe $\delta > 0$, tal que $0 < \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \varepsilon$.
Isto ainda é verdadeiro se $P \in S$.

Assim segue que $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in S}} f(P) = L$.

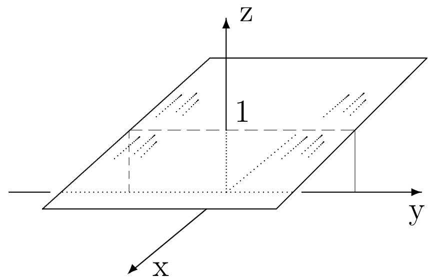
Observação:

Este teorema fornece um critério:

$$\boxed{\text{Se os limites em dois caminhos diferentes são diferentes então o limite não existe.}}$$

Exemplos:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$$f(x,y) = \begin{cases} 1\,, & para\ x \neq 0 \\ 0\,, & para\ x = 0 \end{cases}$$

$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S_1}} 1 = 1$$

$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in S_2}} 0 = 0$$

Portanto, não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

2. $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0) \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} P \in \text{eixo } y \\ P \in \text{eixo } x \end{array}\right\} \Longrightarrow xy = 0 \Longrightarrow f(P) = 0$$

Logo $f(P)$ converge para **0** conforme P aproxima-se de 0 através dos eixos coordenados.

É verdade que $\displaystyle\lim_{P\to 0} f(P) = 0\,$?

$P = (x,y)$

$$|f(P)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Assim dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\delta = \varepsilon$ e teremos

$$0 < \|P - 0\| < \delta = \varepsilon \implies |f(P) - 0| < \varepsilon$$

Portanto, $\displaystyle\lim_{P\to 0} f(P) = 0\,.$

3. $g : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to R$

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$g(P) \equiv 0$ quando P está em um dos eixos coordenados, de modo que $g(P)$ converge para 0 quando P aproxima-se de 0 pelos eixos. Entretanto $\displaystyle\lim_{P\to 0} g(P)$ não existe.

Seja $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$

$g(P) = g(x,x) = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{\substack{P \to 0 \\ P \in S}} g(P) = \dfrac{1}{2} \neq 0$

Portanto, $\lim\limits_{P \to 0} g(P)$ não existe.

Observamos que $g(x, m\,x) = \dfrac{m}{1+m^2}$ e que $g(0,y) = 0$ e assim o gráfico de g é constituído por retas horizontais. Tente esboça-lo.

4. $F : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

   $F(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

   Se P pertence a um dos eixos, $F(P) = 0$

   Sobre a reta $y = x$:

   $F(P) = F(x,x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ de modo que $\lim\limits_{\substack{P \to 0 \\ P=(x,x)}} F(P) = 0\,.$

   De fato, $F(P)$ converge para 0 conforme P aproxima-se da origem ao longo de toda reta passando pela origem.

   Vejamos:

   Seja $y = mx$

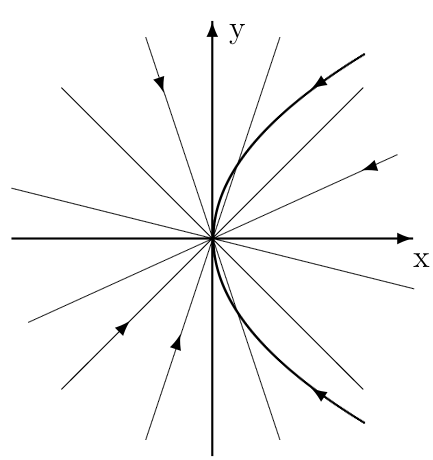
   $F(P) = F(x, mx) = \dfrac{m^2 x}{1+m^4x^2}$ e assim $\lim\limits_{\substack{P \to 0 \\ y=mx}} F(P) = 0\,.$

   Apesar disto, **não** é verdade que $\lim\limits_{P \to 0} F(P) = 0\,.$

   Tomemos $S = \{(x,y) \mid y^2 = x\}$

   $F(P) = F(y^2, y) = \dfrac{1}{2}$

   $\lim\limits_{\substack{P \to 0 \\ P \in S}} F(P) = \dfrac{1}{2}\,.$



2.6 Continuidade

Definição 2.6.1. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, P_0 um ponto de acumulação de A com $P_0 \in A$. f é dita **contínua em** P_0 se $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$, ou seja:*

$$\text{dado } \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$\left.\begin{array}{c} \|P - P_0\| < \delta \\ P \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon\,.$$

Definição 2.6.2. *Uma função f é dita **contínua em um conjunto B** quando for contínua em todo ponto de B.*

Exemplos:

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y) = x + y$

   Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

   Dado $\varepsilon > 0$

   Queremos $\delta > 0$ tal que

   $\left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right]^{1/2} < \delta \Longrightarrow |x + y - (x_0 + y_0)| < \varepsilon$

   mas

   $|x + y - (x_0 + y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \delta + \delta = 2\delta$

   Basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

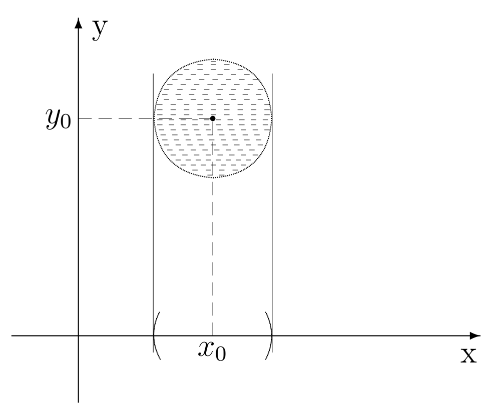
2. $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

   $p_1(x, y) = x$

   p_1 é contínua no $\mathbb{R}^2$.

   Olhe a ilustração ao lado.

   Qual o δ apropriado?



3. $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

   $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$

   p_i é contínua no $\mathbb{R}^n$.

4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \,, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \,, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   f não é contínua em $(0,0)$.

Propriedades:

1. A soma de m funções contínuas em um ponto é uma função contínua no ponto.

2. O produto de m funções contínuas em um ponto é uma função contínua no ponto.

   Conseqüência: Denotando $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, uma polinômial $P(x)$ em $x_1, \ldots, x_n$ é uma soma de parcelas do tipo:

   $$a x_1^{\ell_1} \cdot x_2^{\ell_2} \cdots x_n^{\ell_n} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} a \text{ - constante} \\ \ell_i \in N \,, \quad i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

   que pode ser escrita como

   $$a \, [p_1(x)]^{\ell_1} \cdots [p_n(x)]^{\ell_n}$$

   que é contínua, como produto de funções contínuas.

   Logo, usando a propriedade (1), toda polinomial é contínua.

3. Dada uma função contínua e $\neq 0$ em um ponto, então a recíproca é contínua naquele ponto.

4. Se uma função é contínua e $\neq 0$ em um ponto, ela possui sinal constante em alguma vizinhança daquele ponto.

5. Se uma função é contínua em um conjunto compacto, então ela é limitada nesse conjunto.

De fato:

Como a função tem limite em todos os pontos do conjunto, ela é limitada em todos os pontos do conjunto compacto. Pelo teorema 5.4.3 ela é limitada no conjunto.

Definição 2.6.3. $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad B \subset A\,.$
Imagem *do conjunto* B *pela função* f *é o conjunto* $f(B) = \{f(P)\ /\ P \in B\}$.
Assim, por exemplo, a função f *é dita limitada em* B *se* $f(B)$ *é limitado.*

Observação: Com esta definição a propriedade (5) pode ser enunciada assim:

Se f é contínua em K onde K é compacto então $f(K)$ é limitado. Como $f(K) \subset R$ e é limitado, temos pelo ***axioma do sup,*** que existe $L = \sup f(K)$ e $\ell = \inf f(K)\,.$

Teorema 2.6.4. *Se uma função é contínua em um conjunto compacto então existe um ponto onde ela atinge seu extremo superior e um ponto onde ela atinge seu extremo inferior.*

Prova:

Suponhamos que f não assuma $L = \sup f(K)$.

Logo $f(P) < L\,, \ \ \forall\ P \in K.$

Seja $g(P) = L - f(P) > 0$, contínua.

Assim, $\dfrac{1}{g(P)}$ é contínua no compacto $K\,.$

Então $\dfrac{1}{g(P)} = \dfrac{1}{L - f(P)}$ é limitada em $K \Rightarrow \exists\ H$ tal que $\dfrac{1}{L - f(P)} < H\,, \ \ \forall\ P \in K.$

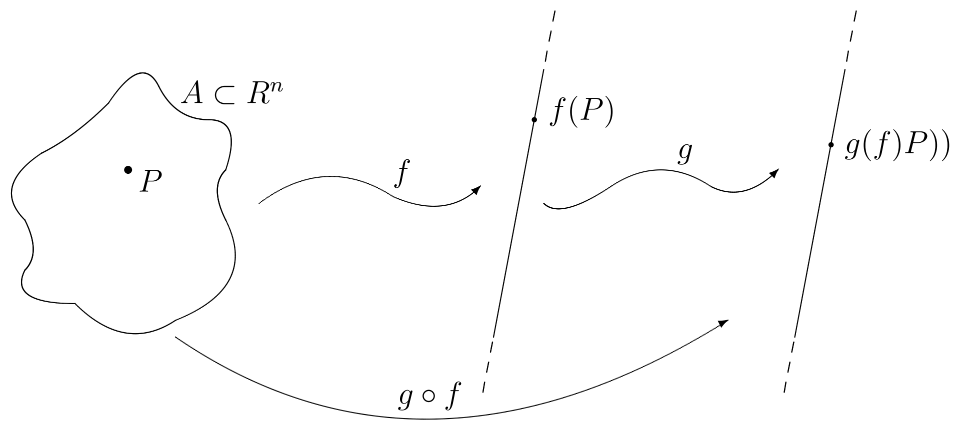
Logo $L - f(P) > \dfrac{1}{H} \Rightarrow L - \dfrac{1}{H} > f(P)\,, \ \ \forall\ P \in K\,.$

Portanto, L não é extremo superior (contra hipótese).

Fica como exercício a demonstração para extremo inferior.

Definição 2.6.5. *Sejam* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}$ *e* $g : B \to \mathbb{R}\,.$ *A* ***função composta*** *de* g *com* f, *indicada por* $g \circ f$ *é definida por*

$$\begin{aligned} g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n &\ \to\ \mathbb{R} \\ (g \circ f)(p) &\ =\ g(f(P)) \end{aligned}$$



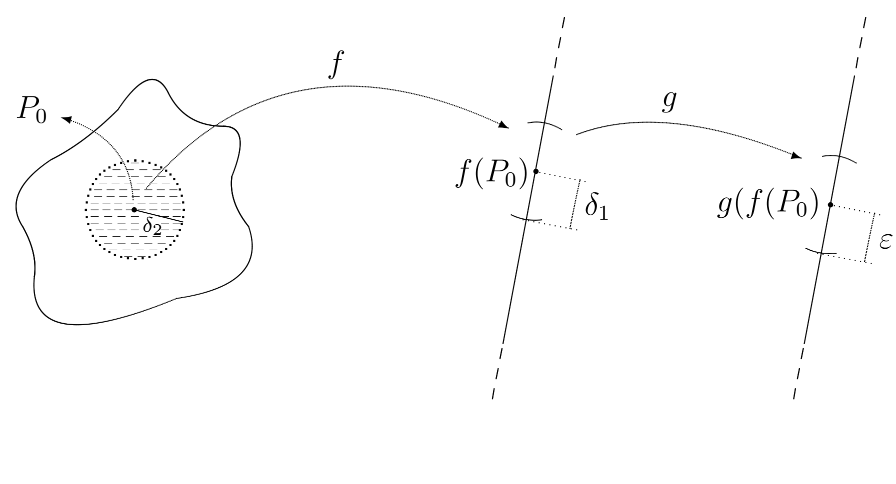
Teorema 2.6.6. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ tais que f seja contínua em P_0 e g contínua em $f(P_0)$. Então $g \circ f$ é contínua em P_0.*

Prova:

Dado $\varepsilon > 0$.

Queremos $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \|P - P_0\| < \delta \\ P \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow |(g \circ f)(P) - (g \circ f)(P_0)| < \varepsilon .$$



Sabemos que existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon\,,\, f(P_0))$ tal que

$|z - f(P_0)| < \delta_1 \Longrightarrow |g(z) - g(f(P_0))| < \varepsilon\,.$

Como f é contínua em P_0 sabemos que dado $\delta_1 > 0\,,\ \ \exists\, \delta_2 > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{l} \|P - P_0\| < \delta_2 \\ \ \ P \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \ |f(P) - f(P_0)| < \delta_1\,.$$

Logo para

$\|P - P_0\| < \delta_2 \Longrightarrow |f(P) - f(P_0)| < \delta_1 \Longrightarrow |g(f(P)) - g(f(P_0))| < \varepsilon\,.$

Portanto, $g \circ f$ é contínua em P_0.

Exercícios:

1. Mostrar, pela definição, que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} (x^2 + y^2 - 4) = 0\,.$

2. Seja a função $f(x,y) = \begin{cases} \ \ 1\,, & x \geq 0 \\ -1\,, & x < 0\,. \end{cases}$

   Prove que a função tem limite igual a 1 nos pontos (x_0, y_0) com $x_0 > 0$ e que tem limite igual a -1 nos pontos (x_0, y_0) com $x_0 < 0$. Prove ainda que não tem limite nos pontos $(0, y_0)$.

3. Sejam A e B dois pontos no espaço e seja $f(P) = \|P - A\| - \|P - B\|\,.$

   f é uma função limitada?

   Você pode mostrar que, para qualquer P_0, $\displaystyle\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$?

4. Prove, usando a definição de limite, que: $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} (x^2 + 2yx + y^2) = 9\,.$

5. Determinar o valor dos seguintes limites, quando existirem:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$

(b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

(c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{xy}\right)$

(d) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to \pi}} x^2\,\text{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(1+y^2)\text{sen }x}{x}$

(f) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1+x-y}{x^2+y^2}$

(g) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \dfrac{4x-y-3z}{2x-5y+2z}$

6. Usando a definição, prove que $f(x,y) = xy + 6x$ é contínua em:

(a) $(1,2)$

(b) (x_0, y_0)

7. Investigue a continuidade de cada uma das funções abaixo, no ponto (0,0):

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{3x+5y} & , \quad 3x+5y \neq 0 \\ 0 & , \quad 3x+5y = 0 \end{cases}$

(b) $g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x^2+y^2} & , \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

8. (a) Mostre que a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é limitada em $\mathbb{R}^2$.

(b) Mostre que $f(x,y)$ não tem limite em $(0,0)$.

(c) Caso exista, determine o valor $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[\text{sen}(x+y)\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]$.

9. Investigue a continuidade no ponto (0,0) da função abaixo:

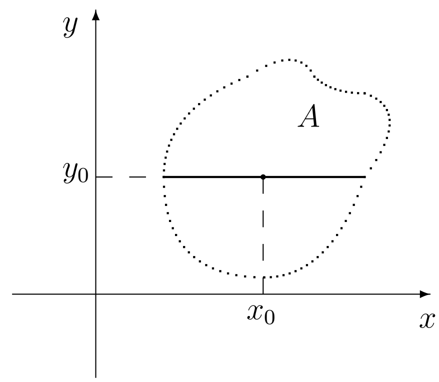
$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x-y}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.7 Derivadas Parciais e Funções Diferenciáveis

2.7.1 Derivadas Parciais

Seja $z = f(x, y)$ definida em um conjunto aberto A e seja $(x_0, y_0) \in A$. Então para x suficientemente próximo de x_0 todos os pontos (x, y_0) estão em A. Assim podemos considerar $z = f(x, y_0)$ como uma função de x, em um pequeno intervalo em torno de x_0. A derivada em x_0 desta função de x (se a derivada existir) é chamada **derivada parcial de f em ralação a x no ponto** (x_0, y_0).

Notações:



$f_x(x_0, y_0)$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$; $f_1(x_0, y_0)$

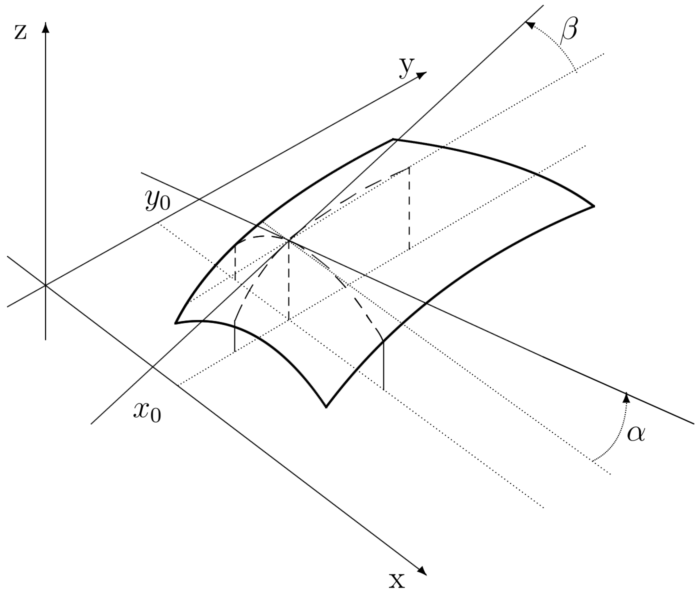
$z_x(x_0, y_0)$; $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$

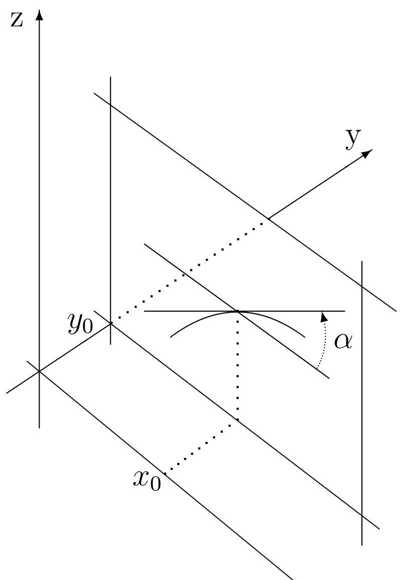
Assim:

$$f_x(x_0, y_0) = \left[\frac{df(x, y_0)}{dx}\right]_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \, .$$

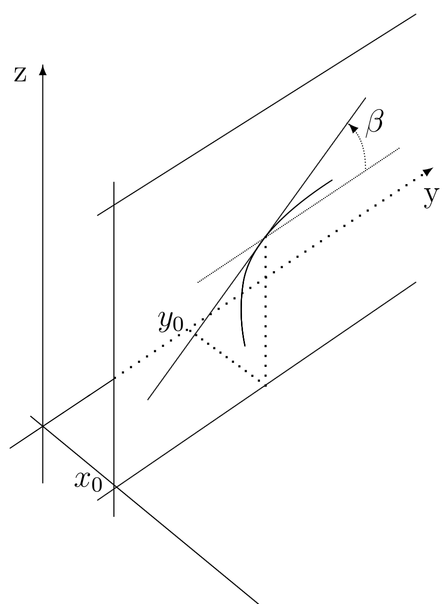
Interpretação Geométrica

Podemos interpretar geometricamente a derivada parcial como uma inclinação. Consideramos a secção da superfície $z = f(x, y)$ pelo plano vertical $y = y_0$. Neste plano a curva $z = f(x, y_0)$ tem uma tangente com inclinação $f_x(x_0, y_0)$ em x_0.



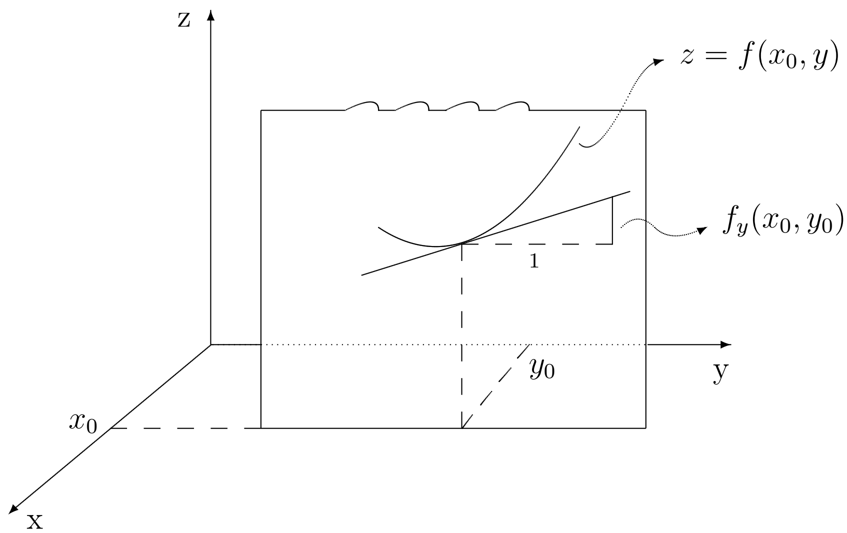


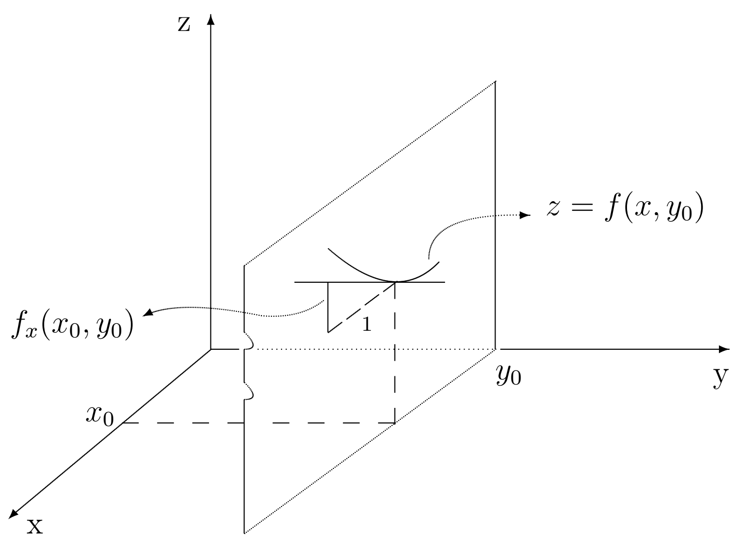
tg $\alpha = f_x(x_0, y_0)$



tg $\beta = f_y(x_0, y_0)$

outras ilustrações:





Considerando z como uma função de y, para x fixo, obtemos de maneira semelhante uma outra derivada parcial $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_2 = z_y = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ que também pode ser vista como uma inclinação.

Temos

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Observação: Para se achar as derivadas parciais de uma função dada por uma lei de formação podem-se aplicar as regras usuais para funções de uma variável, tratando-se todas as variáveis independentes, exceto uma, como constantes.

Exemplo: Se $f(x,y) = x^2y + y\cos x$, determine $f_x(1,0)$ e $f_y(1,0)$.

Resolução: Mantendo y constante e derivando em relação a x obtemos $f_x(x,y) = 2xy - y \operatorname{sen} x$ e assim $f_x(1,0) = 0$.

Mantendo x constante e derivando em relação a y obtemos $f_y(x,y) = x^2 + \cos x$ e assim $f_y(1,0) = 2$.

Para o caso de $\boldsymbol{n}$ variáveis $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, ..., $\boldsymbol{x}_n$:

Qual a derivada parcial no ponto $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ relativamente a x_1 da função $f(x_1, \ldots, x_n)$?

Fixando-se $x_2, x_3, \ldots, x_n$ a nossa função fica sendo função de uma variável x_1, $f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \left[\frac{df(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{dx_1}\right]_{x_1^0}$$

Exemplo: $z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cos x_2 + x_3$

$f_1(x_1,x_2,x_3) = \cos x_2$; $f_2(x_1,x_2,x_3) = -x_1 \operatorname{sen} x_2$; $f_3(x_1,x_2,x_3) = 1$ onde estamos usando a notação f_i para $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

2.7.2 Derivadas parciais de ordem superior

Se f é uma função de duas variáveis x e y, então f_x e f_y são também funções de duas variáveis. Se estas funções f_x e f_y estiverem definidas em um aberto A poderemos considerar suas derivadas parciais $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ e $(f_y)_y$ chamadas **derivadas parciais de segunda ordem de $\boldsymbol{f}$**, denotadas como segue:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Se estas derivadas parciais existirem em todos os pontos de um aberto A, poderemos falar nas derivadas parciais de terceira ordem, e assim sucessivamente.

De forma completamente análoga definimos as derivadas parciais de ordem superior para função de três ou mais variáveis.

Definição 2.7.1. *Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aberto. f é dita de **classe $\boldsymbol{C^k}$** ($k \geq 1$) **em $\boldsymbol{B}$** $\subset A$ se as derivadas parciais até a ordem k existirem e forem contínuas em todos os pontos de B. f é dita de **classe $\boldsymbol{C^\infty}$** se f é de classe C^k, $\forall\, k \geq 1$.*

Notação: $f \in C^k$ ou $f \in C^\infty$.

Exemplo 1: A função $z = f(x,y) = xy$ é de classe C^∞ já que $f_x(x,y) = y$; $f_y(x,y) = x$; $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 1$ e todas as demais derivadas parciais de qualquer ordem são nulas. Como as funções acima e a função nula são contínuas temos que $f \in C^\infty$.

Exemplo 2: A função $z = f(x,y) = x \operatorname{sen} y + y^2 \cos x$ é de classe C^∞.

Observação: Nestes dois exemplos notamos que $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$, isto é, a ordem de derivação não influi no resultado, mas isto nem sempre é válido.

De fato:

Consideremos $z = f(x,y) = x + |y|$

$$f_x(x,y) \equiv 1 \qquad\qquad f_{xy}(0,0) = 0$$

No entanto $f_y(0,0)$ não existe e assim $f_{yx}(0,0)$ não existe.

O próximo Teorema fornece condições sob as quais podemos afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$

Teorema 2.7.2 (Teorema de Schwarz ou Teorema de Clairaut). *Seja $z = f(x,y)$ tal que f, f_x, f_y e f_{xy} sejam contínuas em um conjunto aberto A. Seja $P_0 = (x_0, y_0) \in A$. Então $f_{yx}(P_0)$ existe e $f_{yx}(P_0) = f_{xy}(P_0)$.*

Prova:

Seja $\phi(x) = f(x\,,\, y_0 + k) - f(x, y_0)$, onde k e y_0 são fixados.

Para x suficientemente próximo de x_0 e k pequeno, ϕ é uma função da única variável x, diferenciável no intervalo $(x_0\,,\, x_0 + h)$ e contínua em $[x_0\,,\, x_0 + h]$, h pequeno.

Para esta função aplicamos o Teorema do Valor Médio para funções de uma variável, entre

x_0 e $x_0 + h$, obtendo:

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = h \cdot \phi'(x_0 + \theta_1 h) \ \text{ onde } \ 0 < \theta_1 < 1$$

Assim: $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = h\,[f_x(x_0 + \theta_1 h\,,\, y_0 + k) - f_x(x_0 + \theta_1 h\,,\, y_0]$.

Agora para cada h aplicamos o Teorema do Valor Médio novamente para a segunda variável, obtendo:

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = h \cdot k\,[f_{xy}(x_0 + \theta_1 h\,,\, y_0 + \theta_2 k)]$$

onde também $0 < \theta_2 < 1$.

Relembrando o significado de ϕ podemos escrever:

$$[f(x_0 + h\,,\, y_0 + k) - f(x_0 + h\,,\, y_0)] - [f(x_0\,,\, y_0 + k) - f(x_0\,,\, y_0)] = h{\cdot}k\, f_{xy}(x_0 + \theta_1{\cdot}h\,,\, y_0 + \theta_2{\cdot}k)$$

Dividindo por k e fazendo $k \to 0$ obtemos $f_y(x_0 + h\,,\, y_0) - f_y(x_0\,,\, y_0) = h\, f_{xy}(x_0 + \theta_1 h\,,\, y_0)$, desde que f_{xy} é contínua.

Novamente usando a continuidade de f_{xy} , dividimos por h e fazemos $h \to 0$ e obtemos

$$f_{yx}(x_0\,,\, y_0) = f_{xy}(x_0\,,\, y_0)$$

$\square$

Observação: Vejamos outro exemplo onde não temos a igualdade $f_{xy} = f_{yx}$.

Consideremos:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$$

De fato,

$$f_x(x,y) = xy \cdot \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ,\ (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_y(x,y) = xy \cdot \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} + x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ,\ (x,y) \neq (0,0)$$

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(\Delta x, 0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = 1$$

Observação: No exemplo anterior podemos observar que f, f_x e f_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$. Assim, pelo Teorema anterior f_{xy} não pode ser contínua em $(0,0)$, pois caso o fosse $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$, o que não é o caso. Obtenha uma expressão para f_{xy} e tente provar a não continuidade.

Exercícios:

1. Se $f(x,y) = (x-y)\ \mathrm{sen}(3x+2y)$ calcule: (a) $f_x\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, (b) $f_y\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

2. Calcule u_x e u_y quando:

   (a) $u = e^{xy}\ \mathrm{sen}(x+y)$ (b) $u = \ln(x^4+y^4)\ \mathrm{arcsen}\sqrt{1-x^2-y^2}$

3. Se
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2+xy}{x+y} & \text{para} \quad x \neq -y \\ 0 & \text{para} \quad x = -y \end{cases}$$

   (a) calcule $f_x(x,0)$ e $f_y(0,y)$;

   (b) observe que f não é constante em nenhuma vizinhançade $(0,0)$.

4. Ache $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y)$ se $f(x,y) = \ln(x+y)$

5. Mostre que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ está satisfeita por:

   (a) $\ln(x^2+y^2)$ (b) $x^3 - 3xy^2$

6. Mostre que a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

é diferenciável para todo x, mas não é de classe C^1 em $x = 0$.

7. Calcule $f_y(1,2)$ onde $f(x,y) = x^{x^{x^y}} + \operatorname{sen}(\pi x)[x^2 + \operatorname{sen}(x+y) + e^x \cos^2 y]$.

   Sugestão: Existe uma maneira muito fácil de fazer isto.

8. Sejam $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, contínuas. Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por
   $f(x,y) = \displaystyle\int_0^x g(t,0)dt + \int_0^y h(1,t)dt$

   (a) Mostre que $f_x(x,y) = g(x,0)$ e que $f_y(x,y) = h(1,y)$

   (b) Ache uma função $\overline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\overline{f}_x(x,y) = x$ e $\overline{f}_y(x,y) = y$

2.7.3 Diferenciabilidade

Quando uma função de uma variável é derivável em um ponto, ela é também contínua neste ponto. Observe agora o que acontece com o exemplo abaixo:

Exemplo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \quad \text{para} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad \text{para} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Note que não existe limite no ponto $(0,0)$ (visto anteriormente), e assim, f não é contínua em $(0,0)$.

Mas f é derivável em relação a x e a y em $(0,0)$. De fato:

Fixando-se $y = 0 \Longrightarrow z = f(x,0) \equiv 0$, e assim $f_x(0,0) = 0$.

Fixando-se $x = 0 \Longrightarrow z = f(0,y) \equiv 0$, e assim $f_y(0,0) = 0$.

Assim é possível com a função tenha todas as derivadas parciais em um ponto e que não seja contínua naquele ponto.

Vamos então introduzir o conceito de diferenciabilidade, que vai garantir a continuidade da função. Na realidade ele implicará que o gráfico da função não tem quinas, e em particular, que não tem saltos. Será introduzido por analogia com o conceito de diferenciabilidade de funções de uma variável.

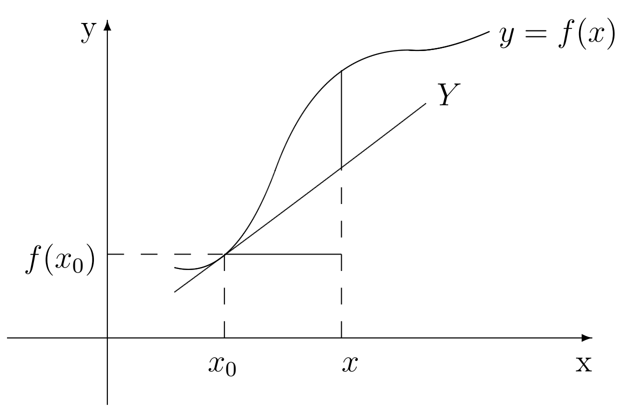
Para uma variável:

$y = f(x)$ é **diferenciável** em x_0 , se existe uma reta passando por $(x_0, f(x_0))$ de equação

$$Y = f(x_0) + m(x - x_0)\,,$$

tal que a diferença $f(x) - Y$ seja um infinitésimo de ordem superior, em comparação com $x - x_0$, quando $x \to x_0$, isto é:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - Y}{x - x_0} = 0$$



$y = f(x)$ é **derivável** no ponto x_0 , se existe o seguinte limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Mas ser derivável é equivalente a ser diferenciável (para funções de uma variável).

De fato:

$\Longrightarrow$ Suponhamos f derivável em x_0 .

Então existe $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m\,.$

Consideremos a reta de equação $Y = f(x_0) + m(x - x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - Y}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right) = 0$$

Portanto f é diferenciável em x_0 .

$\Longleftarrow$ Suponhamos f diferenciável em x_0 .

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-Y}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)}{x-x_0} = \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m \right) \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - m
\end{aligned}
$$

Portanto f é derivável em x_0 .

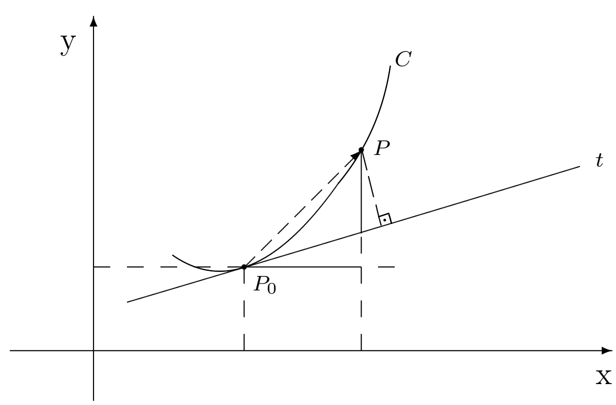
Assim, geometricamente, podemos traçar uma tangente ao gráfico da função f pelo ponto $(x_0\,,\, f(x_0))$.

Exercício Conceitual:

Seja f diferenciável em x_0. Seja $P_0 = (x_0, y_0)$ onde $y_0 = f(x_0)$. Se P é um outro ponto da curva C descrita por $y = f(x)$ e β é o ângulo entre o vetor $P - P_0$ e a reta tangente a C em P_0 , mostre que

$$
\beta \to 0 \quad \text{com} \quad P \to P_0 \; .
$$

Reciprocamente, mostre que se $\beta \to 0$, então f é diferenciável em P_0.



Nota: O exercício acima mostra que em um sentido preciso o ângulo entre a reta tangente e a curva é zero no ponto de tangência.

Para duas variáveis:

Diz-se que $z = f(x, y)$ é **diferenciável** num ponto (x_0, y_0), se existe um plano pelo ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, de equação:

$$
Z = f(x_0, y_0) + A(x - x_0) + B(y - y_0) \ ,
$$

tal que a diferença $f(x,y) - Z$ seja um infinitésimo de ordem superior, em comparação com $\alpha = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ quando $\alpha \to 0$, isto é:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x,y) - Z}{\alpha} = 0 \qquad (*)$$

Em notação alternativa, tomando $x = x_0 + h$ e $y = y_0 + k$ e chamando

$$E(h,k) = f(x,y) - Z = f(x_0 + h, y_0 + k) - [f(x_0, y_0) + Ah + Bk]$$

$(*)$ pode ser reescrita como

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0 \qquad (**)$$

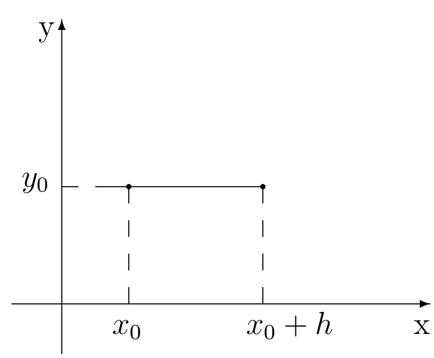
Logo, $f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + Ah + Bk + E(h,k)$.

Passando ao limite, com $(h,k) \to (0,0)$, obtemos:

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$$

Acabamos de provar que se f é **diferenciável** em (x_0, y_0), então f é **contínua** em (x_0, y_0).

Voltemos em $(**)$, fazendo $k = 0$



Obtemos:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\,,\, y_0) - f(x_0, y_0) - Ah}{|h|} = 0$$

Mas isto equivale a:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\,,\, y_0) - f(x_0, y_0) - Ah}{h} = 0$$

ou

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + h\,,\, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - A \right] = 0$$

ou

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+h\,,\,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\right]=A$$

Assim, $f_x(x_0,y_0)=A\,.$

Analogamente, $f_y(x_0,y_0)=B\,.$

Portanto: se f for diferenciável num ponto (x_0,y_0), então f tem derivadas parciais nesse ponto. Além disso, o plano de equação

$$(**)\qquad Z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

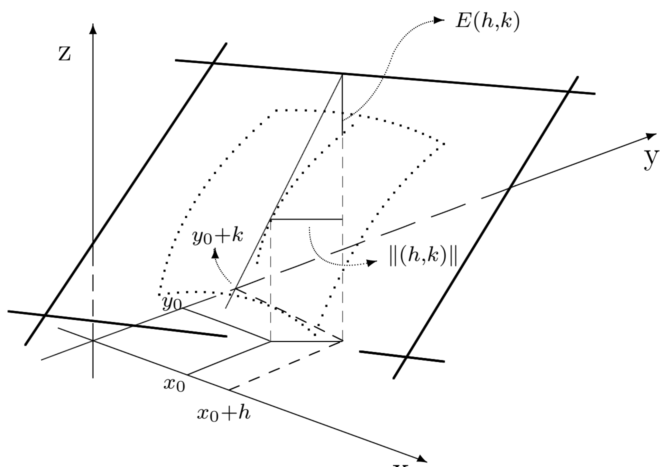
aproxima o gráfico de $z=f(x,y)$ no seguinte sentido:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x,y)-Z}{\alpha}=0$$

ou, na notação alternativa

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|}=0$$

Este é um modo de exprimir o fato de que o plano **é tangente** à superfície no ponto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.



Exemplos:

1. $z=g(x,y)=x+y$

   g é diferenciável em (x_0,y_0), $\forall\ (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\,.$

   De fato:

   Consideremos o plano

$Z = x_0 + y_0 + 1(x - x_0) + 1(y - y_0) = x + y$

$$\frac{g(x,y) - Z}{\alpha} = 0 \to 0 \quad \text{com} \quad \alpha \to 0$$

2. $z = f(x,y) = xy$

   f é diferenciável em (x_0, y_0), $\forall\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

   De fato:

   Consideremos o plano

   $Z = x_0 y_0 + y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0)$

   $$\frac{f(x,y) - Z}{\alpha} = \frac{x(y - y_0) - x_0(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \to 0$$

   com $\alpha \to 0$ (já visto anteriormente).

3. $p_1(x,y) = x$

   p_1 é diferenciável em (x_0, y_0), $\forall\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

   De fato:

   Consideremos o plano

   $Z = x_0 + 1(x - x_0) = x$

   $$\frac{p_1(x,y) - Z}{\alpha} = 0 \to 0 \quad \text{com} \quad \alpha \to 0\,.$$

Observação 1: Olhe detalhadamente os exemplos (1) e (3). Qual é o tipo de gráfico destas funções? Qual seria o plano esperado para resolver o problema da diferenciabilidade?

Observação 2: No caso de uma função f ser diferenciável em um ponto, nós podemos mostrar que em um sentido preciso o ângulo entre o plano tangente e a superfície é zero no ponto de tangência. é uma generalização do exercício conceitual dado anteriormente.

Propriedades:

1. A soma (também o produto) de duas funções diferenciáveis em um ponto é uma função diferenciável no ponto.

2. Se uma função $f(x,y) \neq 0$ é diferenciável em um ponto, então a recíproca é diferenciável nesse ponto.

3. Toda polinomial em duas variáveis $P(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ é diferenciável, como soma e produto de diferenciáveis.

Observação 1: Já vimos que toda função diferenciável é contínua, mas nem toda contínua é diferenciável.

Exemplo:

$z = f(x,y) = |x| + |y|$ é contínua em $(0,0)$.
Fixando $y = 0 \Longrightarrow z = |x| \Longrightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$ não existe.
Sabemos que se $z = f(x,y)$ é diferenciável, então ela tem derivadas parciais. Assim, $z = |x| + |y|$ não é diferenciável em $(0,0)$.

Observação 2: Vimos que se $z = f(x,y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), então existem $f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$. No entanto, pode acontecer que existam $f_x(x_0,y_0)$ e $f_y(x_0,y_0)$ e f não ser diferenciável em (x_0,y_0).

Exemplos:

1. $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ para } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ para } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   Já foi visto anteriormente que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Ainda: f não é contínua (e portanto não é diferenciável) em $(0,0)$.

2. $z = g(x,y) = \sqrt{|xy|}$

   Observe que $g_x(0,0) = g_y(0,0) = 0$ e que g é contínua em todo ponto do plano.

   Ainda assim, g não é diferenciável na origem, pois:

$$\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{g(h,k) - [g(0,0) + 0 \cdot h + 0 \cdot k]}{\|(h,k)\|} = \frac{\sqrt{|h\,k|}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

   não tende a zero com $(h,k) \to (0,0)$ (observe o que acontece na direção $h = k$).

   Tente esboçar o gráfico de g.

Algumas vezes é dificil verificar diretamente a diferenciabilidade da função. O próximo teorema dá uma condição suficiente para que uma função f seja diferenciável e é importante dada a facilidade de verificação de suas hipóteses.

Teorema 2.7.3 (Critério de Diferenciabilidade). *Se as derivadas parciais f_x e f_y existirem em um conjunto aberto A contendo P_0 e forem contínuas em P_0, então f será diferenciável em P_0.*

Prova: Consideremos $P_0 = (x_0, y_0)$. Como A é aberto, para h e k suficientemente pequenos o retângulo formado pelos 4 pontos: (x_0, y_0), $(x_0+\Delta x\, ,\, y_0)$, $(x_0\, ,\, y_0+\Delta y)$ e $(x_0+\Delta x\, ,\, y_0+\Delta y)$ está contido em A.

Temos então que $\Delta f = f(P) - f(P_0) = f(x_0 + h\, ,\, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + h\, ,\, y_0 + k) - f(x_0 + h\, ,\, y_0)] + [f(x_0 + h\, ,\, y_0) - f(x_0, y_0)]$.

Usando o Teorema do Valor Médio para funções de uma variável sobre cada uma das diferenças acima, obtemos:

$$\Delta f = f_y(x_0 + h\, ,\, y_1) \cdot k + f_x(x_1, y_0) \cdot h$$

Por hipótese, f_x e f_y são contínuas em P_0 e assim

$$f_x(x_1, y_0) = f_x(x_0, y_0) + \eta_1 \quad \text{e} \quad f_y(x_0 + h\, ,\, y_1) = f_y(x_0, y_0) + \eta_2$$

onde ambos η_1 e η_2 tendem a zero com $\|(h, k)\| \to 0$.

Assim: $\Delta f = f_x(x_0, y_0) \cdot h + f_y(x_0, y_0) \cdot k + \eta_1 \cdot h + \eta_2 \cdot k$.

Pela definição de diferenciabilidade nós temos somente que mostrar:

$$\frac{n_1 \cdot h + n_2 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0$$

mas

$$\left| \frac{n_1 \cdot h + n_2 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq (|n_1| + |n_2|) \to 0$$

conforme $\sqrt{h^2 + k^2} \to 0$. □

Exemplo:

Seja $z = f(x, y) = \mathrm{sen}(xy)$

$$f_x(x, y) = y \cdot \cos(xy)$$
$$f_y(x, y) = x \cdot \cos(xy)$$

são contínuas em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Logo pelo teorema anterior, $f(x, y) = \mathrm{sen}(xy)$ é diferenciável em todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Observação: Embora o teorema anterior pareça resolver todos os problemas no que se refere a mostrar que uma função é diferenciável, há casos em que ele não se aplica, ou seja: existem funções diferenciáveis em um ponto cujas derivadas parciais não são contínuas neste ponto. Neste caso a verificação da diferenciabilidade deve ser feita pela definição. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo:

Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Determine f_x e f_y ;

(b) Mostre que f_x e f_y não são contínuas em $(0,0)$;

(c) Prove que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Resolução:

(a) $$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x \text{ sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2x}{(x^2+y^2)} \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 2y \text{ sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) - \dfrac{2y}{(x^2+y^2)} \cdot \cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) $\lim\limits_{t\to 0} f_x(t,t)$ e $\lim\limits_{t\to 0} f_y(t,t)$ não existem e portanto f_x e f_y não são contínuas em $(0,0)$.

(c) Para verificar que f é diferenciável em $(0,0)$ note que

$$\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \sqrt{(h^2+k^2)} \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) \quad \text{e que} \quad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

A Diferencial

Seja $f(x,y)$ **diferenciável** em (x_0,y_0) e consideremos a transformação linear $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$L(h,k) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_o)k\,.$$

Voltando à condição de diferenciabilidade notamos que

$$E(h,k) = f(x_0+h\,,\,y_0+k) - f(x_0,y_0) - [f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k] = \Delta f - L(h,k)\,,$$

onde $\Delta f = f(x_0+h\,,\,y_0+k) - f(x_0,y_0)$.

Assim:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta f - L(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

ou seja $L(h,k) \sim \Delta f$, para $\|(h,k)\| \sim 0$.

Chamamos a transformação linear L de **diferencial** de f em (x_0,y_0).

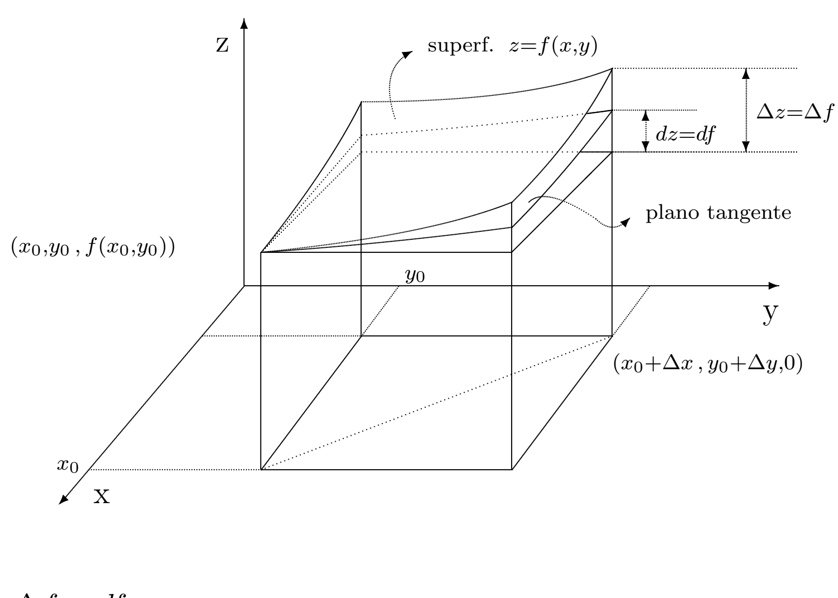
Dizemos que $L(h,k) = f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k$ é a diferencial de f em (x_0,y_0) relativa aos acréscimos h e k.

Em **notação clássica** a diferencial de f em (x,y) relativa aos acréscimos dx e dy é indicada por dz (ou df)

$$dz = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$$

Assim, para acréscimos pequenos,

$$\Delta z \sim dz\,.$$



Chamando $\eta = \dfrac{\Delta f - df}{\|(h,k)\|}$, a condição de diferenciabilidade pode ser reformulada como: f é **diferenciável** em (x_0,y_0) se, e somente se, $\Delta f = df + \eta\cdot\sqrt{h^2+k^2}$, onde $\eta\to 0$ com $\|(h,k)\|\to 0$.

Observação 1: Em geral, $\Delta z \neq dz$. Quando $h = \Delta x$ e $k = \Delta y$ são pequenos, então dz constitui uma aproximação de Δz.

Observação 2: Podemos dizer que a diferencial é uma função de quatro variáveis independentes, a saber: as coordenadas x , y do ponto considerado e os acréscimos Δx e Δy.

Exemplos:

1. Se $z = f(x, y) = 3x^2 - xy$, calcule Δz e dz se (x, y) muda de $(1, 2)$ para $(1.01\,, 1.98)$.

   Temos:

   $dz = (6x - y)dx + (-x)dy$

   Substituindo $x = 1$, $y = 2$, $dx = \Delta x = 0.01$ e $dy = \Delta y = -0.02$, obtemos:

   $dz = (6 - 2)(0.01) + (-1)(-0.02) = 0.06$

   Calculando diretamente Δz, teríamos:

   $\Delta z = 0.0605$.

   Assim, o erro envolvido é 0.0005.

2. O raio e a altura de uma caixa de forma cilíndrica são medidos como $3m$ e $8m$ respectivamente, com um possível erro de $\pm 0.05m$. Use diferenciais para calcular o erro máximo no cálculo do volume

   $V = \pi\, r^2 h$

   $dV = \dfrac{\partial V}{\partial r}\, dr + \dfrac{\partial V}{\partial h}\, dh = 2\pi r\, h\, d\,r + \pi\, r^2 dh$

   Substituindo $r = 3$, $h = 8$, $dr = dh = \pm 0.05$, temos:

   $dV = 48\pi(\pm 0.05) + 9\pi(\pm 0.05) = \pm 2.85\pi \simeq \pm 8.95m^3$.

—— / / —— / / ——

Resultados análogos valem para funções de n-variáveis ($n > 2$).

Por exemplo:

f é **diferenciável** em um ponto $P_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ em $\mathbb{R}^n$ se

$f(P) = f(P_0) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \cdots + A_n h_n + \eta \cdot \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$ tal que $\eta \to 0$

conforme $\|P - P_0\| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2} \to 0$, onde $P = (a_1 + h_1\,,\, a_2 + h_2, \ldots, a_n + h_n)$.

Neste caso: $f_{x_i}(P_0) = f_i(P_0) = A_i\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$

Exercícios:

1. Justifique porque a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^6} & , \text{ se } \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ se } \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   não é diferenciável na origem.

2. Calcular as diferenciais das funções dadas abaixo:

   (a) $z = e^x y^2$ (b) $z = x^2\sqrt{1+xy^2}$

3. As dimensões de uma caixa retangular fechada são medidas como sendo 3, 4 e 5 metros, com um possível erro de 5cm. Use diferenciais para aproximar o erro máximo no cálculo de :

   (a) área da superfície da caixa;

   (b) volume da caixa.

4. Seja $f(x)$ diferenciável com $f(0) = 0$ e $f(x) \neq 0$ para $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

   Seja $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)f(y)}{f^2(x)+f^2(y)} & , \text{ para } \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ para } \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (i) Mostre que existe $g_x(0,0)$ e $g_y(0,0)$;

   (ii) Mostre que $g(x,y)$ não é diferenciável em $(0,0)$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x,y)| \leq x^2 + y^2$.

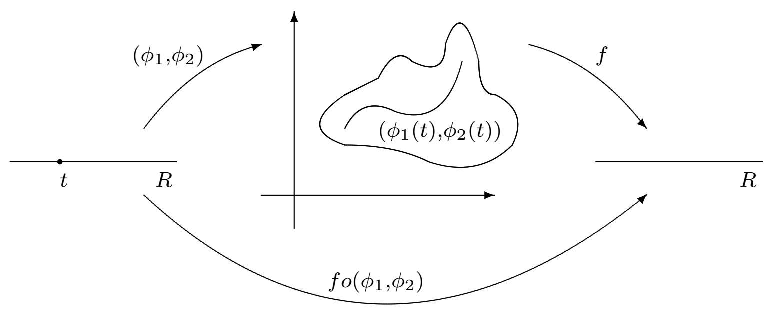
   Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

2.7.4 Regras da Cadeia

Muitas vezes a função $z = f(x,y)$ é dada sob a forma de função composta, em que os argumentos x, y são eles próprios funções de t

$$x = \phi_1(t) \qquad\qquad y = \phi_2(t).$$

Então, $z = f(\phi_1(t)\,,\,\phi_2(t))$ e podemos, portanto, falar em diferenciabilidade relativamente a t.



Teorema 2.7.4. *Sejam $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ diferenciáveis em t_0 e $z = f(x,y)$ diferenciável no ponto $P_0 = (\phi_1(t_0),\, \phi_2(t_0))$. Então $z(t) = f(\phi_1(t), \phi_2(t))$ é diferenciável no ponto t_0 e ainda*

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)_{t_0} \quad .$$

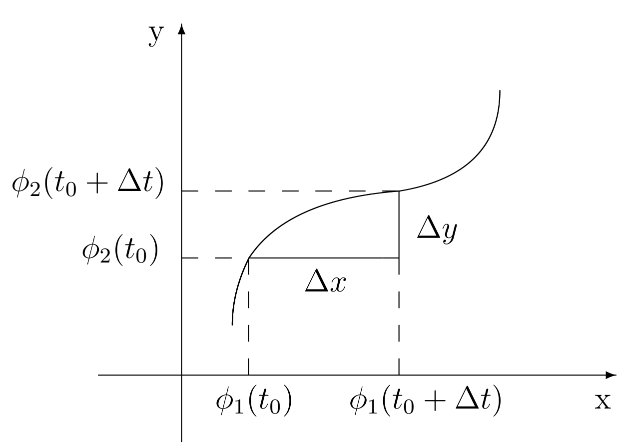
Prova:

Como z é diferenciável em P_0, temos em particular que:

$$\Delta z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \Delta y + \alpha\,\eta$$

onde $\eta \to 0$ com $\alpha \to 0$ e $\alpha = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ sendo que

$$\begin{cases} \Delta x = \phi_1(t_0 + \Delta t) - \phi_1(t_0) \\ \Delta y = \phi_2(t_0 + \Delta t) - \phi_2(t_0)\ . \end{cases}$$



Logo, para $\Delta t \neq 0$

$$(*) \qquad \frac{\Delta z}{\Delta t} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \eta\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

Observemos que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)_{t_0} \qquad \text{e} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)_{t_0}$$

ainda:

$$\Delta t \to 0 \Longrightarrow [\Delta x \to 0 \quad \text{e} \quad \Delta y \to 0]$$

pois ϕ_1 e ϕ_2 sendo diferenciáveis em t_0 são contínuas em t_0.

Passando ao limite a expressão $(*)$ com $\Delta t \to 0$, temos:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_1}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{d\phi_2}{dt}\right)_{t_0} .$$

pois $\eta \to 0$ com $\Delta t \to 0$ e $[(\Delta x/\Delta t)^2 + (\Delta y/\Delta t)^2] \to L \in \mathbb{R}$ com $\Delta t \to 0$.

Exemplos:

1. $z = f(x,y) = e^{xy}$ onde $\begin{cases} x = \text{sen } t \\ y = \cos t \end{cases}$

1º modo:

$x_0 = \text{sen } t_0$

$y_0 = \cos t_0$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = y_0\, e^{x_0 y_0} \cos t_0 + x_0\, e^{x_0 y_0} \cdot -\text{sen } t_0 = e^{x_0 y_0} \left[\cos^2 t_0 - \text{sen }^2 t_0\right].$$

2º modo:

$z(t) = e^{\text{sen}\, t \cos t}$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = e^{\text{sen} t_0 \cos t_0} (\text{sen}\, t_0 \cdot -\text{sen}\, t_0 + \cos t_0 \cos t_0) = e^{\text{sen} t_0 \cos t_0} \left(\cos^2 t_0 - \text{sen}^2\, t_0\right).$$

Observação: Podemos pensar que a regra da cadeia seja dispensável, já que podemos primeiro fazer as substituições e depois derivar. Na verdade, ainda continuamos fazendo uso da regra da cadeia mesmo depois de fazermos as substituições.

2. $z = f(x,y) = x^2 + y$ onde $x = t^3$, $y = t^2$

$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = 6t_0^5 + 2t_0$

Observação: Vale um teorema análogo para o caso de n variáveis.

Enunciado:

Sejam $x_i = x_i(t)$ $i = 1, \ldots, n$ funções diferenciáveis em t_0. Seja $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ diferenciável em $P_0 = (x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))$. Então $z(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ é diferenciável em t_0 e

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dz}{dx_i}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t_0}$$

Generalização:

Sejam $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ onde

$x_1 = x_1(t_1, \ldots, t_s)$

$\vdots$

$x_n = x_n(t_1, \ldots, t_s)$

Temos então:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial t_i}\right)(t_1^0, \ldots, t_s^0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_j}\right)_{P_0} \cdot \left(\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\right)(t_1^0, \ldots, t_s^0) \ .$$

onde $P_0 = (x_1(t_1^0, \ldots, t_s^0), \ldots, x_n(t_1^0, \ldots, t_s^0))$.

Na prática, costuma-se escrever:

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \ .$$

Exemplo:

$$z = f(x,y) = e^{xy} \text{ onde } \begin{cases} x = x(r,s) = r + s \\ y = y(r,s) = r - s \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = e^{r^2 - s^2} \cdot 2r$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = e^{r^2 - s^2} \cdot (-2s)$$

Exercício:

Seja $z = f(x,y) = \dfrac{2x+y}{y-2x}$ onde $\begin{cases} x = 2u - 3v \\ y = u + 2v \end{cases}$

Calcular:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ (b) $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ (c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}$ (d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$ (e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}$

no ponto $u = 2$ e $v = 1$.

Respostas:

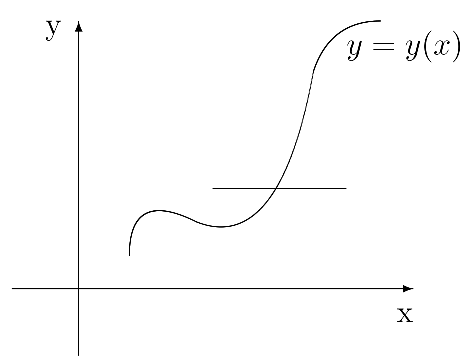
(a) 7 (b) -14 (c) 21 (d) 112 (e) -49

Observação: é freqüente encontrar-se $z = f(x,y)$ com $y = y(x)$. Neste caso, $z = f(x, y(x)) = z(x)$. Ainda

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Portanto

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$



Exercícios:

1. (a) Mostre que para uma função $f(x,y)$ ter como curvas de nível circunferências com centro na origem é necessário e suficiente que $x\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = y\,\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

   Sugestão: as equações paramétricas da circunferência com centro na origem e raio a são:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a \text{ sen } t \end{cases}$$

(b) Dê dois exemplos de funções diferenciáveis na origem cujas curvas de nível sejam circunferências.

2. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Considere a curva $y = \phi(x) = x^3$ e calcule:

(a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ (b) $\dfrac{dz}{dx}(1)$

2.7.5 Gradiente - Curva de Nível - Superfície de Nível

Definição 2.7.5. *Seja $z = f(x,y)$ com derivadas parciais no ponto P. Chamamos* ***gradiente de f no ponto*** *$P = (x,y)$ e indicamos por $\nabla f(P)$ ao vetor:*

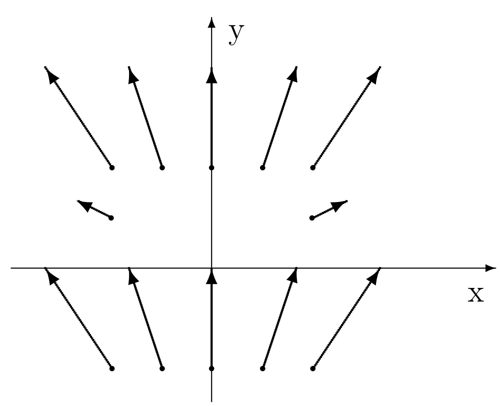
$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P \cdot \vec{j}$$

Se $w = f(x,y,z)$ e $P = (x,y,z)$ então $\nabla f(P) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_P \cdot \vec{i} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_P \cdot \vec{j} + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)_P \cdot \vec{k}$

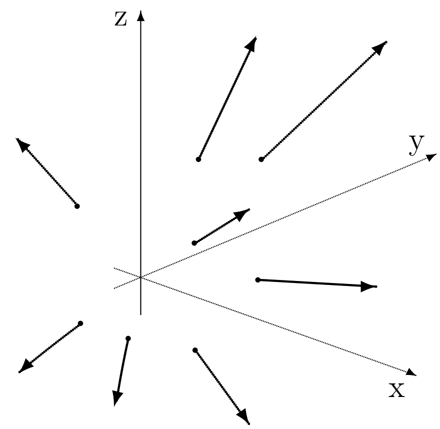
Exemplos:

(1) $f(x,y) = \dfrac{1}{6}(x^2 + y^3)$

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{3}\,x\,\vec{i} + \frac{1}{2}\,y^2\,\vec{j}$$



(2) $g(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$



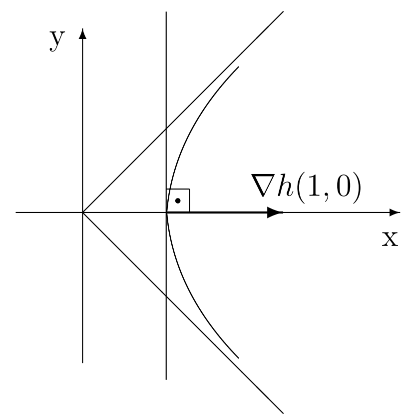
$\nabla g(x,y,z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

(3) $h(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla\, h(1,0) = 2\,\vec{i}$

Curva de Nível por $(1,0)$:

$\{(x,y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$



Neste exemplo notamos que $\nabla h(1,0)$ é normal à curva de nível de h que passa por (1,0). O resultado a seguir mostra que este fato, sob certas condições, é geral:

Teorema 2.7.6. *Seja $z = f(x,y)$ diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$ com $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$. Então $\nabla f(P_0)$ é normal à curva de nível γ que passa por P_0 (estamos supondo γ uma curva regular numa vizinhança de P_0).*

Prova:

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a curva de nível de $f(x,y)$ tal que $\gamma(t_0) = P_0$.

Assim temos que

$$z(t) = f(x(t), y(t)) \equiv k \qquad (*)$$

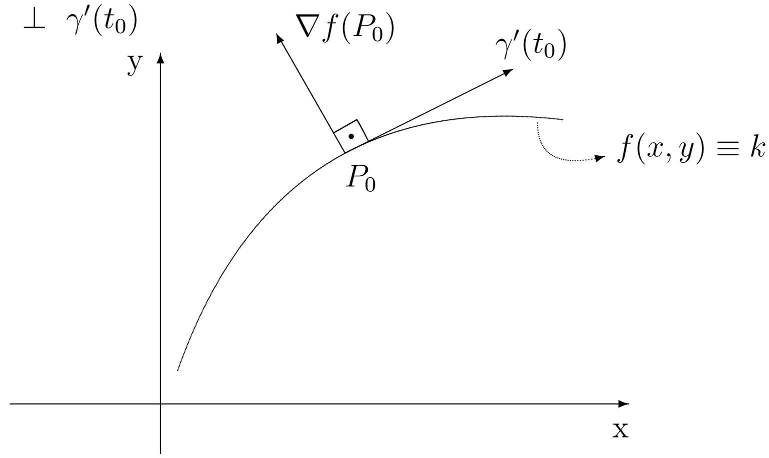
Como γ e f são diferenciáveis, podemos usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os membros de $(*)$, obtendo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} = 0$$

A equação anterior pode ser reescrita como

$$< \nabla f(P_0)\,,\ \gamma'(t_0) > \ = \ 0$$

Portanto, $\nabla f(P_0) \ \perp \ \gamma'(t_0)$



Exercício:

1. Achar um vetor normal à curva $y = x + \operatorname{sen} x$ no ponto $x = \pi/2$.

1o modo:

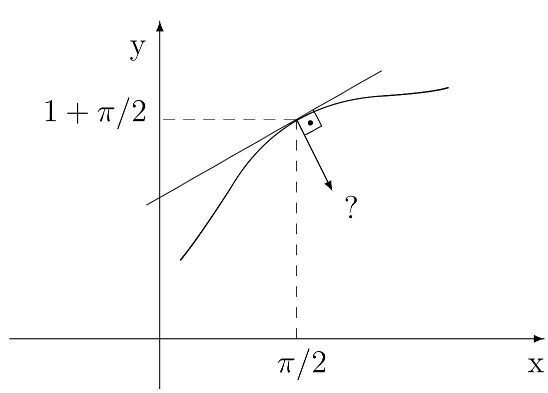
Definimos

$F(x,y) = (x + \operatorname{sen} x) - y$

Vemos que a curva considerada

é uma curva de nível da função

diferenciável F. Assim, para calcular



um vetor normal basta calcular $\nabla F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1\right)$

$$\nabla F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+1\right) = \vec{i} - \vec{j}$$

Portanto o vetor $\vec{i} - \vec{j}$ é normal à curva $y = x + \operatorname{sen} x$ no ponto $x = \frac{\pi}{2}$.

2o modo:

A equação vetorial da curva é:

$$\vec{r}(x) = x\,\vec{i} + (x + \text{sen } x)\vec{j}$$

O vetor tangente é

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{i} = (1 + \cos x)\vec{j}$$

no ponto $x = \dfrac{\pi}{2}$ temos

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dx}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{i} + \vec{j}$$

Verifica-se que $\vec{\eta} = \vec{i} - \vec{j}$ é tal que

$$< \left(\frac{d\vec{r}}{dx}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right), \vec{\eta} > \; = \; 0 \Longleftrightarrow \eta \perp \left(\frac{d\vec{r}}{dx}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Exercícios:

1. Achar as equações

   (a) da tangente

   (b) do plano normal à curva $\begin{cases} x = t - \cos t \\ y = 3 + \text{sen } 2t \\ z = 1 + \cos 3t \end{cases}$ no ponto $t = \dfrac{\pi}{2}$

   Resposta: plano normal: $2\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) - 2(y-3) + 3(z-1) = 0$.

2. Consideremos g e f tais que $g(x,y) = e^{x+y}$, $f'(0) = (1,2)$ e $f(0) = (1,-1)$. Calcular $F'(0)$, onde $F(t) = g(f(t))$.

3. Considere $f(x,y) = xy + 1$.

   (a) Desenhe as curvas de nível $f(x,y) \equiv 0$, $f(x,y) = 1$, $f(x,y) = 2$.

   (b) Desenhe alguns vetores gradientes de f.

   (c) O que acontece com $\nabla f(0,0)$ e com a curva de nível que passa por $(0,0)$?

4. Em cada um dos casos abaixo, desenhe um número suficiente de vetores para ilustrar o campo gradiente de f:

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2)$

(b) $f(x,y,z) = x + y + z$

(c) $f(x,y,z) = 20 - z$

— // — // —

Vamos agora generalizar o resultado visto na última seção, para funções de 3 variáveis.

Suponhamos que S seja uma superfície com equação $F(x,y,z) = k$, ou seja, uma superfície de nível da função F, e seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto sobre S.

Seja ainda $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva arbitrária, contida na superfície S, tal que $\gamma(t_0) = P_0$.

Assim temos $F(x(t), y(t), z(t)) = k \qquad (*)$.

Seja γ e F são diferenciáveis, podemos usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados de $(*)$, como se segue:

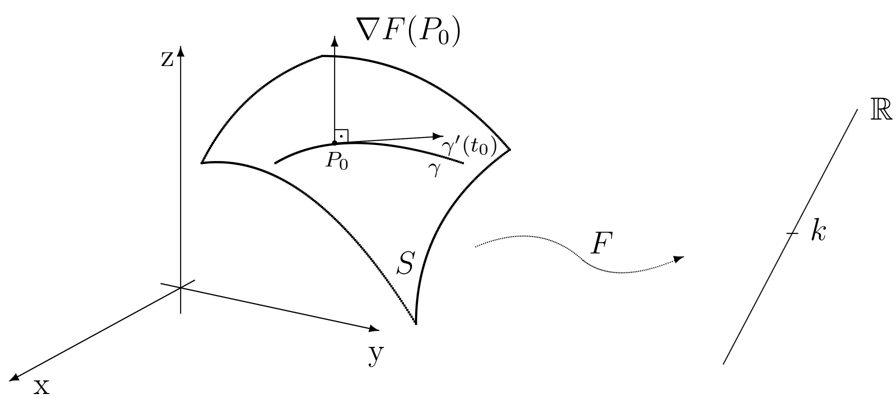
$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0$$

Como $\nabla F = <\ F_x\,,\ Fy\,,\ F_z\ >$ e $\gamma'(t) = \left(\dfrac{dx}{dt}\,,\ \dfrac{dy}{dt}\,,\ \dfrac{dz}{dt} \right)$ a equação anterior pode ser reescrita como

$$<\ \nabla F\,,\ \gamma'(t)\ > = 0$$

Em particular, quando $t = t_0$, temos $\gamma(t_0) = (x_0\,,\ y_0\,,\ z_0)$ e assim

$$<\ \nabla F(x_0\,,\ y_0\,,\ z_0)\,,\ \gamma'(t_0)\ > = 0$$



A equação anterior nos diz que o vetor gradiente em P_0, $\nabla F(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$, é normal ao vetor $\gamma'(t_0)$ de **qualquer** curva de nível γ em S que passe por P_0.

Se $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$ é natural definir o **plano tangente** à superfície de nível $F(x, y, z)=k$ em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ como o plano que passa por P_0 e tem como vetor normal o vetor $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

Assim uma equação do plano tangente seria:

$$(*) \qquad F_x(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)(y-y_0) + F_y(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)(z-z_0) = 0$$

Observação: No caso especial em que S seja o gráfico de $z = f(x, y)$, com f diferenciável em (x_0, y_0) podemos reescrever a equação como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0 \quad \text{ e}$$

entender S como uma superfície de nível (com $k = 0$) de F. Então

$$\begin{aligned} F_x(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) &= f_x(x_0\,,\,y_0) \\ F_y(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) &= f_y(x_0\,,\,y_0) \\ F_z(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) &= -1 \end{aligned}$$

Logo $(*)$ se torna

$$f_x(x_0\,,\,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0\,,\,y_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

ou

$$z - z_0 = f_x(x_0\,,\,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0\,,\,y_0)(y-y_0)$$

Então, nossa nova, mais geral, definição do plano tangente é consistente com a definição que foi dada no caso de diferenciabilidade para funções de duas variáveis.

Exemplos:

1. Dada a superfície regular

$$S : x^2yz + 3y^2 = 2xz^2 - 8z\ ,$$

encontrar:

(a) Equação do plano tangnete no ponto (1,2,-1).

(b) Equação da normal à superfície no mesmo ponto.

(c) Em que ponto a normal encontraaa o plano $x + 3y - 2z = 10$.

Resolução:

(a) Definimos

$F(x, y, z) = x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z$ - diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$

Notamos que S é superfície de nível de F, pois $F(S) \equiv 0$

$\nabla F(1, 2, -1) = -6\vec{i} + 11\vec{j} + 14\vec{k}$

Pelo resultado anterior $\nabla F(1, 2, -1)$ é normal à superfície S no ponto $(1, 2, -1)$, e assim, a equação do plano tangente é

$$-6(x - 1) + 11(y - 2) + 14(z + 1) = 0\,,$$

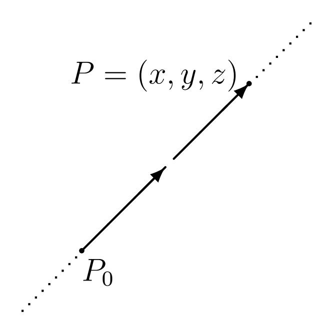
ou seja

$$6x - 11y - 14z + 2 = 0\,.$$

(b) $P - P_0 = t(-6, 11, 14)$

$(x - 1\,,\ y - 2\,,\ z + 1) = t(-6, 11, 14)$

$$\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 2 + 11t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 + 14t \end{cases}$$



(c) Substituindo um ponto geral da reta que é da forma $(1 - 6t\,,\ 2 + 11t\,,\ -1 + 14t)$ na equação do plano $x + 3y - 2z = 10$ temos

$(1 - 6t) + 3(2 + 11t) - 2(-1 + 14t) = 10$

$t = -1$

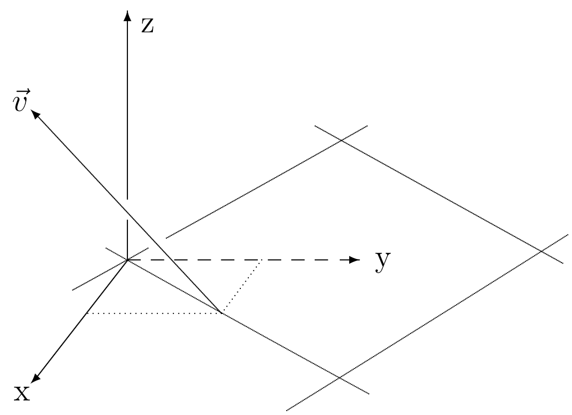
Portanto o ponto de encontro será $(7, -9, -15)$.

2. Dada a curva $(x, y, z) = (e^t\,,\ e^{-t}\,,\ \sqrt{2}\,t)$.

Qual a equação do plano normal à curva no ponto P, correspondente a $t = 0$?

Resolução:

$P = (1, 1, 0)$



Plano normal à curva é o plano normal à tangente

$\vec{r}(t) = e^t\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \sqrt{2}\,t\vec{k}$

$\dfrac{d\,\vec{r}}{dt}(t) = e^t\vec{i} - e^{-t}\vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k}$

$\dfrac{d\,\vec{r}}{dt}(0) = 1\vec{i} - 1\vec{j} + \sqrt{2}\,\vec{k} = \vec{v}$

A equação do plano normal será do tipo

$x - y + \sqrt{2}\,z + d = 0$

mas deve passar pelo ponto $(1, 1, 0)$

$1 - 1 + 0 + d = 0 \iff d = 0$

Portanto, **plano normal:** $x - y + \sqrt{2}\,z = 0\,.$

3. Dada a superfície $z = x^2 + 2xy + y^3$, determinar a reta normal no ponto $(1, 2, 13)$.

   Resolução:

   Definimos

   $F(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^3 - z$ - diferenciável em $\mathbb{R}^3$

   A superfície dada é uma superfície de nível de F .

   $\nabla F(1, 2, 13) = (6, 14, -1)$ é um vetor normal à superfície dada, no ponto $(1, 2, 13)$.

   Equação da reta normal

$$\begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 2 + 14\lambda \\ z = 13 - \lambda \end{cases}$$

Exercícios:

1. Determinar a equação do plano tangente à superfície $z = x^2 + y^2$ no ponto $(1, 2, 5)$.

   Resposta: $2x + 4y - z - 5 = 0$.

2. Determinar o plano tangente a $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ no ponto $(1, 2, 2)$.

   Resposta: $x + 2y + 2z - 9 = 0$.

3. Ache um vetor normal e o plano tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy + ye^x$ em $(x, y) = (1, 1)$.

4. Ache os pontos do parabolóide $z = x^2 + y^2 - 1$ nos quais a reta normal à superfície coincide com a reta que liga a origem a estes pontos.

5. Dar a equação do plano tangente à superfície regular $S : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 36$ no ponto $(1, 2, 3)$.

6. Ache a equação do plano tangente à superfície $z = x^2 + 5xy - 2y^2$ no ponto $(1, 2, 3)$.

7. Ache o plano tangente e a reta normal ao hiperbolóide de uma folha $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ no ponto $(2, -3, 3)$.

8. (a) Encontre a equação do plano tangente à superfície $f(x, , y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$ no ponto $(1, 1, \sqrt{2})$.

   (b) Mostre que a superfície e o plano têm uma reta comum.

   (c) Qual é o ângulo entre esta reta e o vetor $\nabla f(1, 1, \sqrt{2})$?

2.7.6 Derivada Direcional

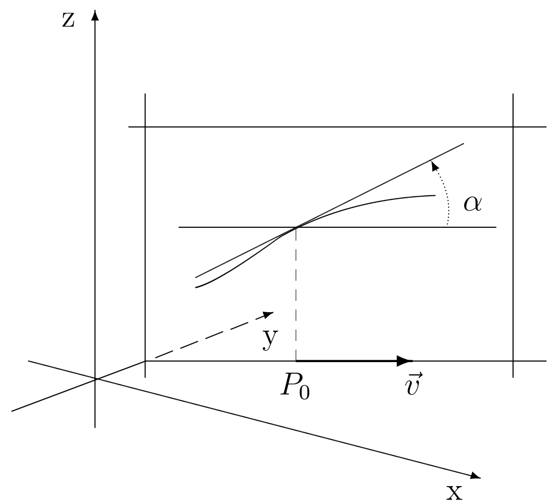
Definição 2.7.7. *Consideremos $z = f(x, y)$ definida em um aberto do $\mathbb{R}^2$ e seja $\vec{v} = (v_1, v_2)$ um vetor unitário ($\|\vec{v}\| = 1$). A **derivada direcional** de f no ponto P_0 na direção $\vec{v}$ é o valor do limite:*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{v}) - f(P_0)}{t} \text{ , quando este limite existir.}$$

Notação:

$$D_{\vec{v}} f(P_0) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right) (P_0)$$

$D_{\vec{v}}(P_0) = \text{tg } \alpha$

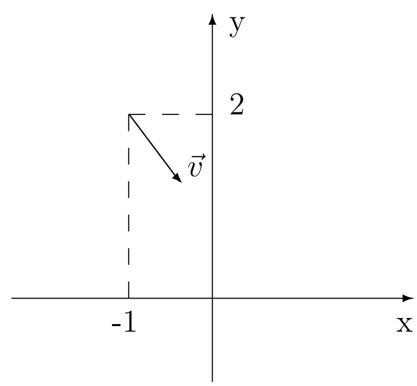


Exemplos:

1. Dada a função $f(x,y) = x^2 - xy + 5y$, calcular $D_{\left(\frac{3}{5}\,,\,-\frac{4}{5}\right)} f(-1,2)$.

   Resolução:

   Verifica-se que $\left\| \left(\frac{3}{5}\,, -\frac{4}{5} \right) \right\| = 1$

   $f(P_0 + t\vec{v}) = \ldots = 13 - \frac{36}{5}\,t + \frac{21}{25}\,t^2$

   $f(-1,2) = 13$

   $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{v}) - f(P_0)}{t} = -\frac{36}{5}$

   Portanto, $D_{\left(\frac{3}{5}\,,\,-\frac{4}{5}\right)} \; f(-1,2) = -\frac{36}{5}$

2. $f(x,y,z) = 2xy - z^2$

   Calcular a derivada direcional em $(2,-1,1)$ na direção $\vec{v} = (3,1,-1)$.

   Observe que $\|\vec{v}\| = \sqrt{11}$

   $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}\;(3,1,-1)$

   $f(P_0 + t\,\vec{u}) = \ldots = -5 + \frac{5t^2}{11}$

   $f(P_0) = -5$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(P_0+t\vec{u})-f(P_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{5t}{11}=0\,.$$

Exercícios:

1. Prove que $D_{\vec{i}}f(a,b)=f_x(a,b)$

   $D_{\vec{j}}f(a,b)=f_y(a,b)$

   Vejamos a resolução de $D_{\vec{i}}f(a,b)$

   $\vec{i}=(1,0)$

   $D_{\vec{i}}f(a,b)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f[(a,b)+t(1,0)]-f(a,b)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t}=f_x(a,b)$

2. Responda: se $D_{\vec{v}}\,f(P_0)=k$ então $D_{-\vec{v}}\,f(P_0)=?$

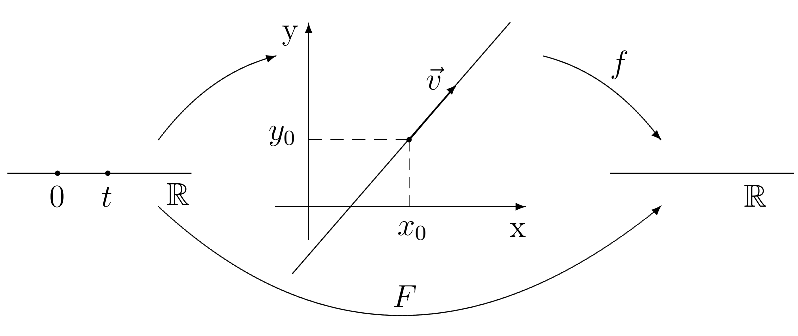
Teorema 2.7.8. *Consideremos $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ com A aberto e f diferenciável em $P_0\in A$. Para todo $\vec{v}\in\mathbb{R}^2$ com $\|\vec{v}\|=1$, existe a $D_{\vec{v}}\,f(P_0)$ e ainda:*

$$D_{\vec{v}}\,f(P_0)=<\nabla f(P_0),\vec{v}>$$

Prova:

Sejam $\vec{v}=(v_1,v_2)$ e $P_0=(x_0,y_0)$ fixos.

Consideremos a função $F(t)=f(x_0{+}tv_1\,,\,y_0{+}tv_2)$ onde t é tal que $(x_0{+}tv_1\,,\,y_0{+}tv_2)\in A\,.$



F pode ser vista como composta de funções e como tal ela é diferenciável no ponto $t=0\,.$

Usando a Regra da Cadeia obtemos:

$$F'(0)=f_x(x_0,y_0)v_1+f_y(x_0,y_0)v_2=<\nabla f(P_0)\,,\,\vec{v}>$$

mas

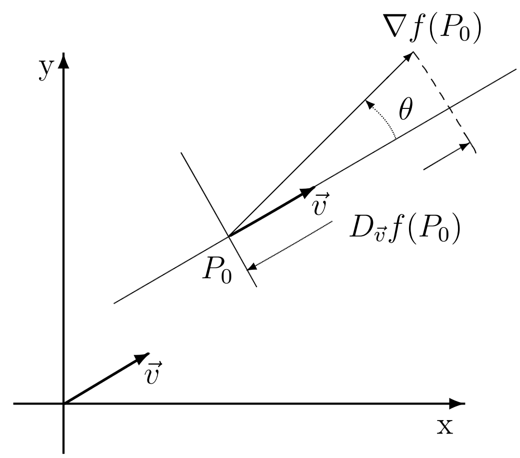
$$F'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv_1\,,\, y_0 + tv_2) - f(x_0, y_0)}{t} = D_{\vec{v}} f(P_0)$$

Assim

$$D_{\vec{v}}\, f(P_0) = \,<\nabla f(P_0)\,,\, \vec{v}>$$

Observação 1: Vemos que a derivada direcional $D_{\vec{v}}\, f(P_0)$ é a projeção escalar do $\nabla f(P_0)$ na direção $\vec{v}$.

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}\, f(P_0) &= \|\nabla f(P_0)\|\ \|\vec{v}\|\ \cos\theta\ = \\ &= \|\nabla f(P_0)\|\ \cos\theta \end{aligned}$$



Observação 2: O teorema afirma que se f é diferenciável em um ponto P_0, então f tem todas as derivadas direcionais em P_0. E a recíproca, é verdadeira?

Vejamos um exemplo em que f tem todas as derivadas direcionais em P_0, mas f não é diferenciável em P_0.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Seja $\vec{v} = (v_1, v_2)$ com $\|\vec{v}\| = 1$.

$$D_{\vec{v}}\, f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{tv_1\,|tv_2|}{t\sqrt{t^2(v_1^2 + v_2^2)}} = \frac{v_1\,|v_2|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = v_1\,|v_2|$$

Ainda se

$$\Delta f = f(x,y) - f(0,0) = 0 + \sqrt{x^2+y^2} \cdot \eta$$

então

$$\eta = \frac{x\,|y|}{x^2+y^2} \not\to 0 \ \text{ com } \ \begin{cases} x \to 0 \\ y \to 0 \end{cases}$$

Portanto f não é diferenciável em $(0,0)$.

De maneira análoga define-se derivada direcional para funções de 3 ou mais variáveis. Resultados análogos aos anteriores permanecem válidos.

Exercícios:

1. Supondo f diferenciável, quando a derivada direcional é máxima e quando é mínima?

   Resolução:

   Admitamos $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$

   $D_{\vec{v}}\, f(P_0) = \|\nabla f(P_0)\| \cos\theta$.

   Logo, é máxima quando $\cos\theta = 1 \Longleftrightarrow \theta = 0$.

   Portanto $D_{\vec{v}}\, f(P_0)$ é máxima quando $\vec{v}$ tem o mesmo sentido de $\nabla f(P_0)$.

   é mínima quando $\cos\theta = -1 \Longleftrightarrow \theta = \pi$.

   Portanto $D_{\vec{v}}\, f(P_0)$ é mínima quando $\vec{v}$ tem sentido oposto ao de $\nabla f(P_0)$.

2. Supondo f diferenciável, quando a derivada direcional é nula?

   Resolução:

   $D_{\vec{v}}\, f(P_0) = \|\nabla f(P_0)\| \cos\theta = 0$

   $\nabla f(P_0) = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \cos\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

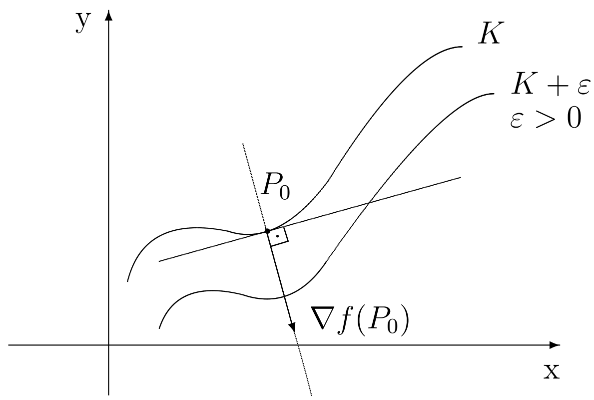


Ilustração para o caso $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Portanto se $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$ a derivada direcional é nula na direção normal ao $\nabla f(P_0)$, logo, na direção de uma curva ou de uma superfície, de nível.

3. Seja $w = f(x, y, z) = 2xy - z^2$.

   Calcular a derivada direcional de w no ponto $P_0 = (2, -1, 1)$, no sentido de $\vec{v} = (2, 2, 1)$.

   Resolução:

   Observemos que f é diferenciável em todo $\mathbb{R}^3$ e que $\|\vec{v}\| = 3$.

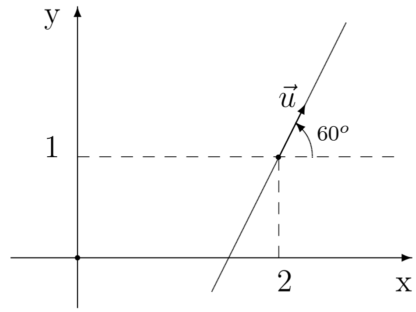
   Façamos $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{2}{3}\,,\, \frac{2}{3}\,,\, \frac{1}{3}\right)$

   $\nabla f(P_0) = -2\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$

   $D_{\vec{u}} f(P_o) = < \nabla f(P_0)\,,\, \vec{u} > = \dfrac{2}{3}$

4. A temperatura num ponto (x, y) do plano é dada por $T(x, y) = \dfrac{100xy}{x^2 + y^2}$.

   (a) Calcule a derivada direcional no ponto (2.1), no sentido que faz um ângulo de 60^o com o semi-eixo positivo dos x.



(b) Em que direção, a partir de (2.1), é máxima a derivada direcional?

(c) Qual o valor deste máximo?

Resolução:

(a) Consideremos $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ - vetor unitário na direção de interesse

$\nabla T(2,1) = \ldots = -12\vec{i} + 24\vec{j}$

$\dfrac{\partial T}{\partial u}(2,1) \; = < \nabla T(2,1)\,,\, \vec{u} > = -6 + 12\sqrt{3}$

(b) É máxima no sentido do gradiente, isto é, do vetor $-12\,\vec{i} + 24\,\vec{j}$

(c) O máximo é o módulo do gradiente $= \; 12\sqrt{5}\,.$

5. Achar a derivada direcional de $F(x,y,z) = x^2yz^3$ ao longo da curva $(e^{-t}\,,\, 2\text{sen } t + 1\,,\, t - \cos t)$, no ponto P_0, onde $t = 0$.

Resolução:

No instante $t = 0$ o ponto P_0 correspondente é $P_0 = (1, 1, -1)$.

Temos que $\nabla F(x,y,z) = (2xyz^3\,,\, x^2z^3\,,\, 3x^2yz^2)$.

Assim $\nabla F(P_0) = -2\,\vec{i} - \vec{j} + 3\,\vec{k}$

O vetor posição da curva é dado por $\vec{r}(t) = e^{-t}\,\vec{i} + (2\text{sen } t + 1)\vec{j} + (t - \cos t)\vec{k}$

Logo, o vetor tangente à curva é:

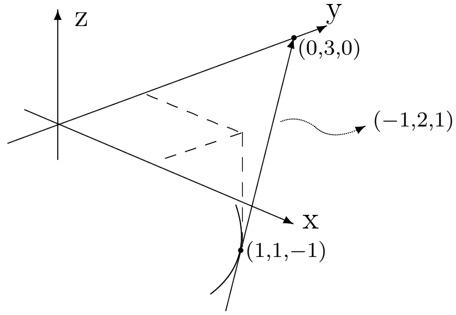
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = e^{-t}\,\vec{i} + 2\cos t\,\vec{j} + (1 + \text{sen } t)\vec{k}$$

Calculado no ponto correspondente a $t = 0$ temos $-1\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$.

Seja $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$ - vetor unitário na direção de interesse

Como F é diferenciável em P_0, pelo Teorema 5.3.8 temos

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(P_0) = < \nabla F(P_0)\,,\, \vec{u} > = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



Exercícios:

1. Ache o valor absoluto da derivada direcional em (1,0,1) da função $f(x,y,z) = 4x^2y + y^2z$ na direção normal em (1,1,1) à superfície $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

2. Se a temperatura em um ponto (x,y,z) de uma bola sólida de raio 3 centrada em (0,0,0) é dada por $T(x,y,z) = yz + zx + xy$ ache a direção, a partir de (1,1,2), na qual a temperatura cresce mais rapidamente.

3. Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}^2$, qual o significado geométrico para o fato de $\nabla f(x,y) = 0$
   (a) em um ponto;
   (b) em todos os pontos.

4. Se $f(x,y) = x^2 - y^2$, calcule a derivada direcional de f na direção $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ no ponto $(1,1)$.

5. Se $f(x,y) = e^{x+y}$, calcule a derivada direcional de f no ponto $(1,1)$ na direção da curva definida por $g(t) = (t^2, t^3)$ em $g(2)$ para t crescendo.

6. A temperatura num ponto (x,y) do plano xy é dada por $T = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

   (a) Calcule a derivada direcional no ponto (1,2) no sentido que faz um ângulo de 45^o com o semi-eixo positivo dos x.

   (b) No sentido de P para Q onde $P = (x,y)$ e $Q = (0,0)$, no ponto P.

7. Suponha que você esteja sentado no ponto $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}\right)$ de uma superfície que tem por equação $z = -x - 2y$. Qual é a direção em que você deve começar a escorregar para atingir o plano xy o mais depressa possível?

8. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Observe que $\nabla f(0,0) = \vec{0}$, o que deixa de indicar qual a direção em que temos o máximo crescimento de $f(x,y)$ a partir de $(0,0)$. Isto é razoável? O que acontece em uma vizinhança de $(0,0)$?

9. A interseção do gráfico da função diferenciável $z = f(x,y)$ com o plano $x = 1$ é uma reta. O gráfico, a seguir, representa curvas de nível de f.

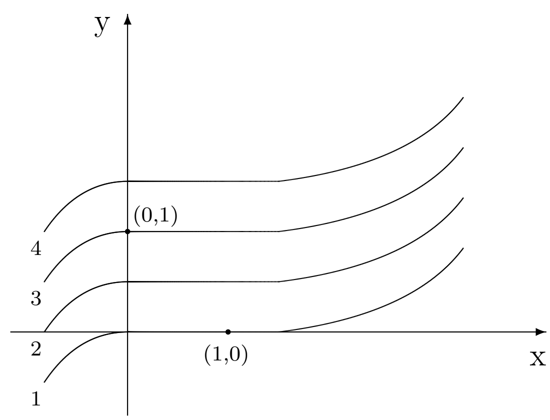
   Calcule:

(i) $f_x(1,0)$

(ii) $f_y(1,0)$

(iii) $D_{\vec{v}}f(1,0)$ onde $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$

(iv) Levando em conta direção, sentido e módulo, desenhe o vetor gradiente de f no ponto $(1,0)$.



10. A interseção do gráfico da função diferenciável $z = f(x,y)$ com o plano $y = 1$ é uma reta.

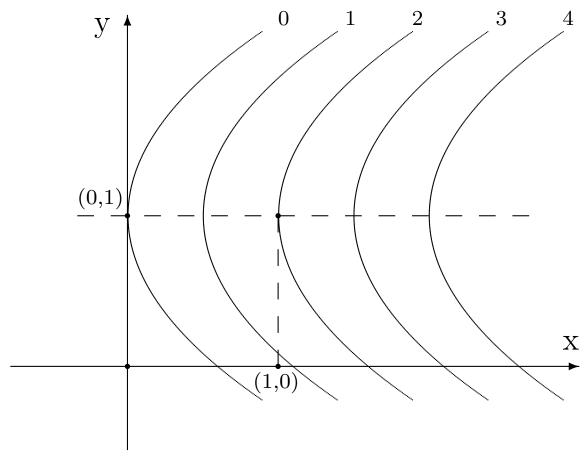
O gráfico a seguir representa curvas de nível de f. Calcule:

(a) $f_x(1,1)$

(b) $f_y(1,1)$

(c) $D_{\vec{v}}f(1,1)$ onde $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

(d) Levando em conta direção, sentido e módulo, desenhe o vetor gradiente de f em $(1,1)$.



11. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    Mostre que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ mas que o gráfico de f não tem plano tangente em $(0,0)$.

12. Considere $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    (a) Mostre que f tem derivada direcional, em qualquer direção, em $(0,0)$.

    (b) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

13. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    (a) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

    (b) Considere $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = (0,0)$. Mostre que $f \circ \gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}$ é diferenciável em todos os pontos de $(-1,1)$.

    (c) Compare com o resultado enunciado na Regra da Cadeia.