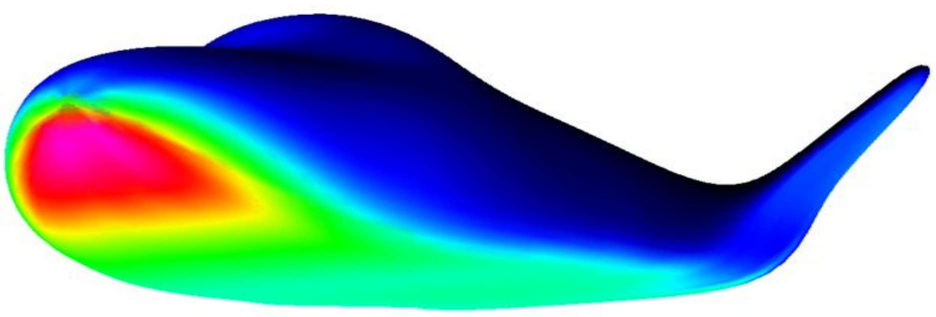
Formulação Conservativa X Não-Conservativa para Sistemas Hiperbólicos

Prof. Diomar Cesar Lobão

UFF - Volta Redonda, RJ

Nov 2008

Universidade Federal Fluminense

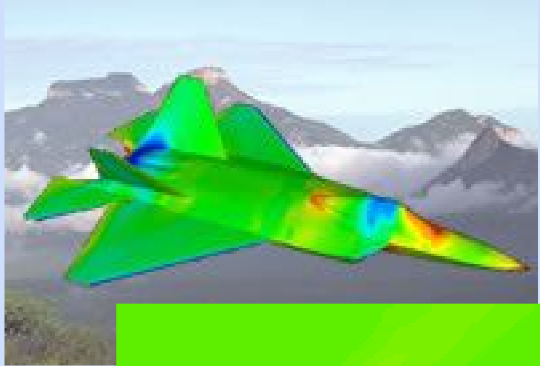


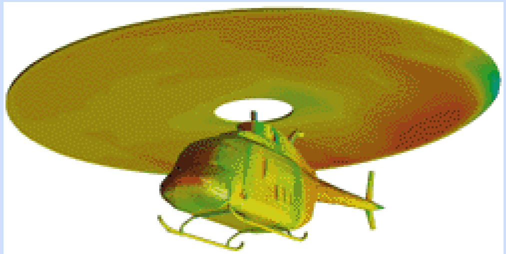
Índice

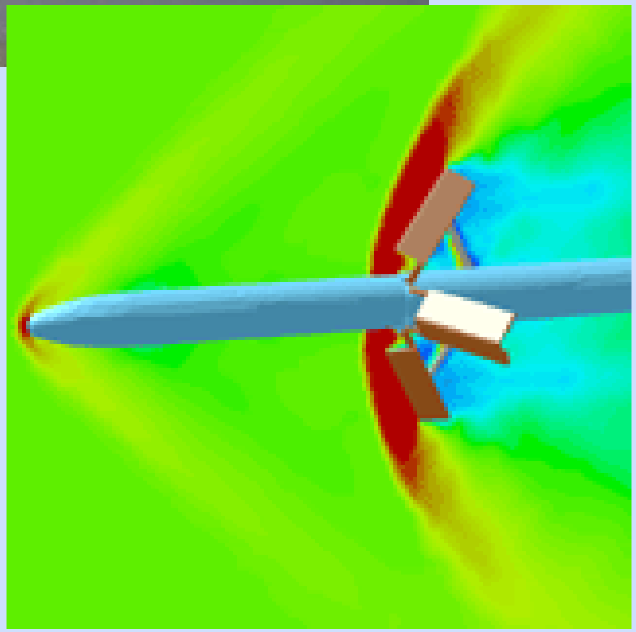
Motivação: Aplicações

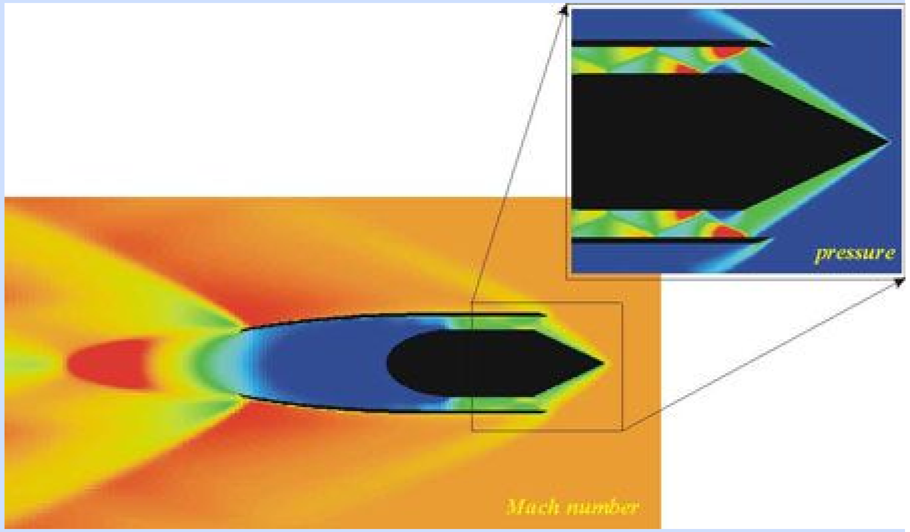
Motivação - Aplicações

- Aeroespacial



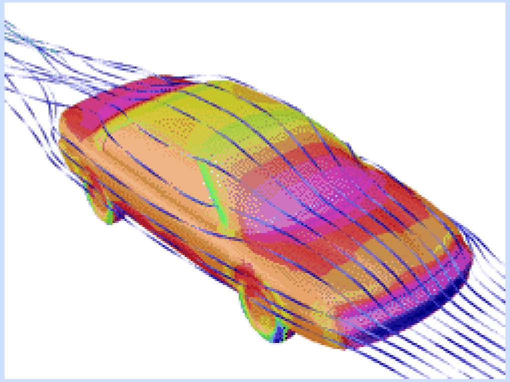


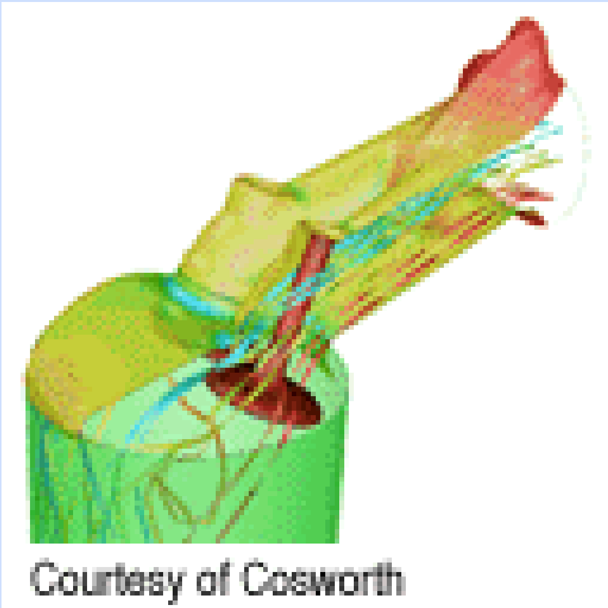


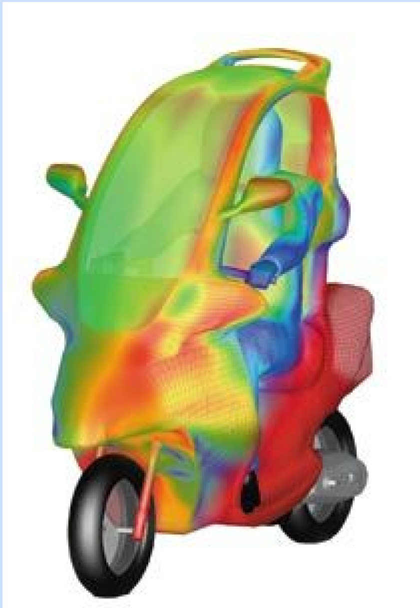


Motivação - Aplicações

- Automotiva e Motores
  - CFD é usada para melhorar o desempenho dos carros e caminhões modernos
  - Escoamento externo sobre carros, escoamento interno em motores

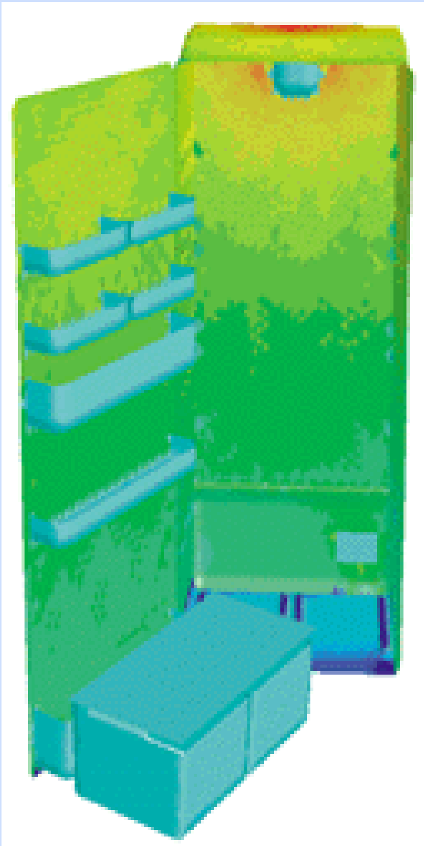


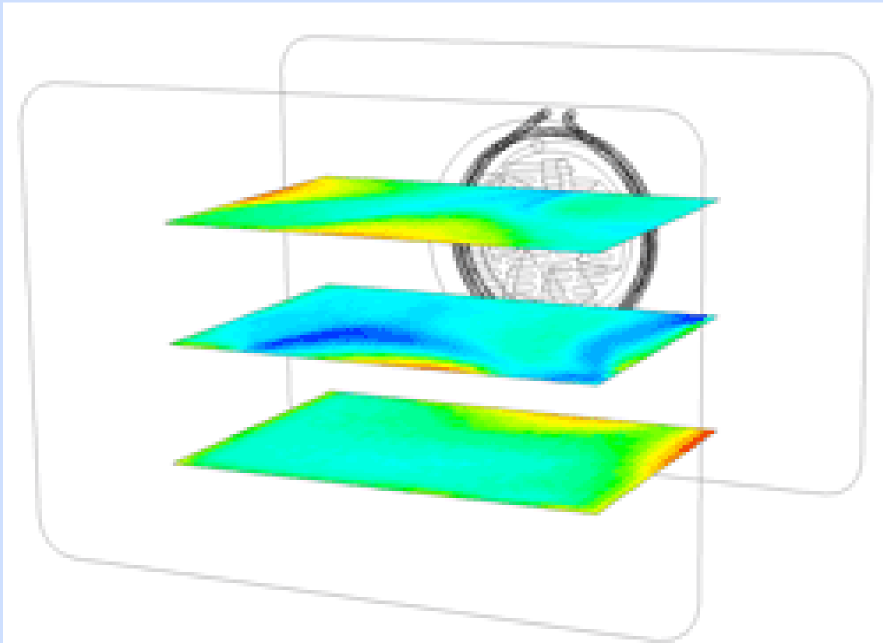




Motivação - Aplicações

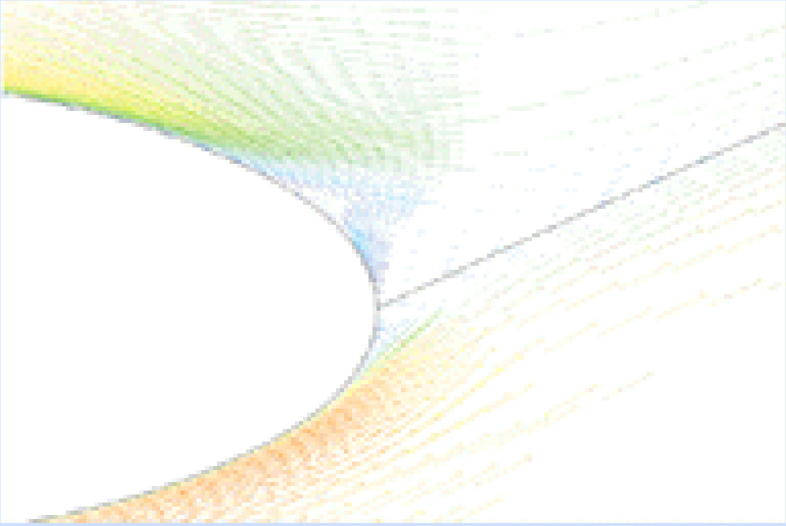
- Eletrodomésticos

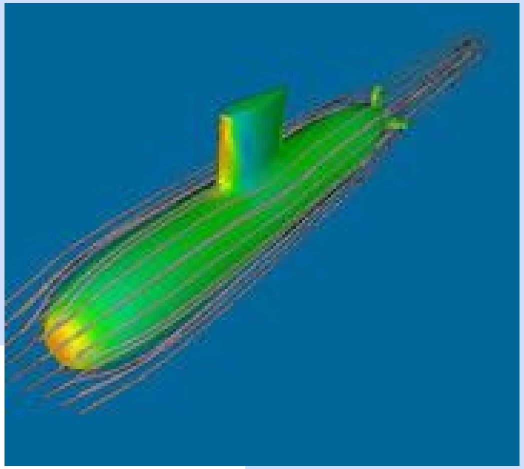


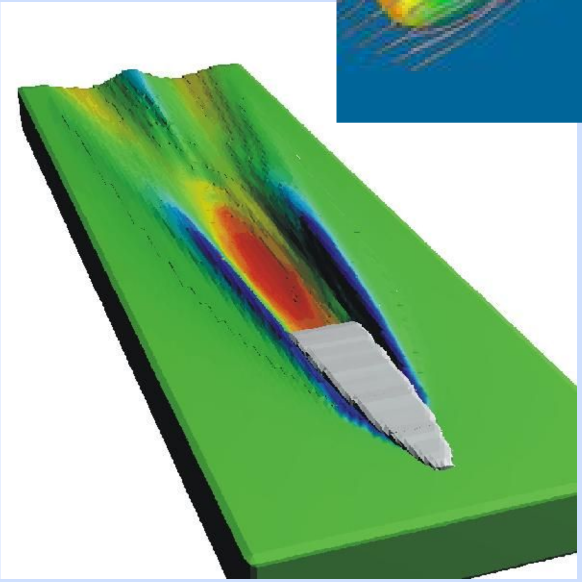


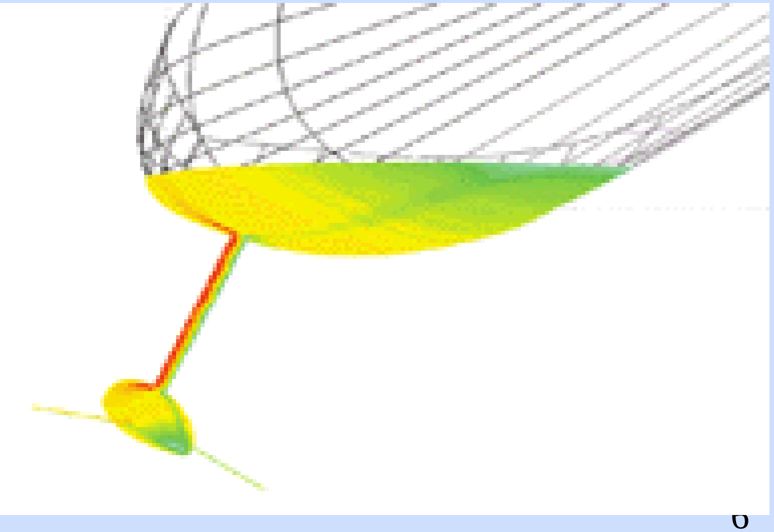
Motivação - Aplicações

- Projeto de Barcos









Método Não-Conservativo

$$\partial_t Q + Q \partial_x Q = 0, \quad Q = Q(x,t)$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} Q^n{}_i \left[Q^n{}_{i+1/2} - Q^n{}_{i-1/2} \right]$$

Fluxo Numérico

$$Q^n{}_{i+1/2} = \tilde{Q}(Q_{i-k}^n, \ldots, Q_i^n, Q_{i+1}^n, \ldots, Q_{i+r}^n)$$ Explícito

$$Q^{n+1}{}_{i+1/2} = \tilde{Q}(Q_{i-l}^n, \ldots, Q_i^n, Q_{i+1}^n, \ldots, Q_{i+r}^n, Q_{i-k}^{n+1}, \ldots, Q_i^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}, \ldots, Q_{i+s}^{n+1})$$ Implícito

Método Conservativo

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) = 0$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n{}_{i+1/2} - F^n{}_{i-1/2}\right], \quad \text{Sendo} : F = \frac{1}{2}Q^2$$

Fluxo Numérico

$$F^n{}_{i+1/2} = \tilde{F}(Q_{i-k}^n, \ldots, Q_i^n, Q_{i+1}^n, \ldots, Q_{i+r}^n)$$ Explícito

$$F^n{}_{i+1/2} = \tilde{F}(Q_{i-l}^n, \ldots, Q_i^n, Q_{i+1}^n, \ldots, Q_{i+r}^n, Q_{i-k}^{n+1}, \ldots, Q_i^{n+1}, Q_{i+1}^{n+1}, \ldots, Q_{i+s}^{n+1})$$ Implícito

Definição do Problema de Riemann

Considere o sistema *1D* de equações diferenciais escrito na lei da conservação da seguinte forma:

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) = 0$$

com $t > 0$, $x \in$ R, $Q(x, t) \in$ R², e F: R² → R² uma aplicação suave.

O mais básico problema de valor inicial do sistema acima é o ***problema de Riemann***, no qual os dados iniciais são discretos e constante com uma descontinuidade simples em $x=0$:

$$Q(x,0) = \begin{cases} Q_L \text{ para } x < 0 \\ Q_R \text{ para } x > 0 \end{cases}$$

Métodos de Diferenças-Finitas para Forma Não-Conservativa

$$\partial_t Q + Q\partial_x Q = 0$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} Q^n{}_i \left[Q^n{}_{i+1/2} - Q^n{}_{i-1/2} \right]$$

Esquema ***FTCS***: *F*orward *T*ime *C*entral *S*pace

Sendo; $Q_{i+1/2} = \frac{1}{2}(Q_i^n + Q_{i+1}^n)$ Substituindo na equação:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} Q_i^n \left[Q^n{}_{i+1/2} - Q^n{}_{i-1/2} \right]$$

$$= Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} Q_i^n \left[\tfrac{1}{2}((Q_i^n) + (Q_{i+1}^n)) - \tfrac{1}{2}((Q_{i-1}^n) + (Q_i^n)) \right]$$

$$= Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} Q_i^n \left[(Q_{i+1}^n) - (Q_{i-1}^n) \right]$$

Equação Linear de Advecção:

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \lambda \left[q_{i+1}^n - q_{i-1}^n \right]$$

Métodos de Diferenças-Finitas para Forma Conservativa

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) = 0$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n{}_{i+1/2} - F^n{}_{i-1/2}\right]$$

Esquema ***FTCS***

Sendo;

$$F_{i+1/2} = \tfrac{1}{2}\left(F\left(Q_i^n\right) + F\left(Q_{i+1}^n\right)\right)$$ Substituindo na equação:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n{}_{i+1/2} - F^n{}_{i-1/2}\right]$$

$$= Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\tfrac{1}{2}\left(F(Q_i^n) + F(Q_{i+1}^n)\right) - \tfrac{1}{2}\left(F(Q_{i-1}^n) + F(Q_i^n)\right)\right]$$

$$= Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[F(Q_{i+1}^n) - F(Q_{i-1}^n)\right]$$

Equação Linear de Advecção:***FTCS***

$$q_i^{n+1} = q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\lambda\left[q_{i+1}^n - q_{i-1}^n\right]$$

Métodos de Diferenças-Finitas para Forma Conservativa

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) = 0$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n{}_{i+1/2} - F^n{}_{i-1/2}\right]$$

Esquema de ***Lax-Friedrichs -LF***

$$F^n{}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F(Q_i^n) + F(Q_{i+1}^n)) - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(Q_{i+1}^n + Q_i^n)$$

Equação Linear de Advecção:***LF***

$$q_i^{n+1} = \tfrac{1}{2}(1+\lambda)q_{i-1}^n + \tfrac{1}{2}(1-\lambda)q_{i+1}^n$$

Esquema *Upwind de Godunov* P/ Sistema Linear com Matriz de Coeficientes Constantes ***A***

$$\partial_t Q + A\partial_x Q = 0 \quad \partial_t Q + \partial_x F(Q) = 0, \quad \text{sendo}: \quad F(Q) = AQ$$

Conservativa

Não-Conservativa

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n{}_{i+1/2} - F^n{}_{i-1/2}\right]$$

$$F^n{}_{i+1/2}(Q) = AQ(x,t)$$ *Fluxo Numérico*

Esquema ***upwind de Godunov 1° Ordem***

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t Q + \partial_x F(Q) = 0 \\ F_{i+1/2}^n(Q) = \begin{cases} \min(Q_i^n \le Q \le Q_{i+1}^n), F(Q)\,, & \text{se } Q_i^n < Q_{i+1}^n \\ \max(Q_i^n \ge Q \ge Q_{i+1}^n), F(Q)\,, & \text{se } Q_i^n > Q_{i+1}^n \end{cases} \end{array}\right\}$$

Métodos de Diferenças-Finitas para Forma Conservativa

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) = 0$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n{}_{i+1/2} - F^n{}_{i-1/2}\right]$$

Esquema ***centrado de Godunov 1° Ordem***

$$F^*{}_{i+1/2} = F[Q_i^n / 2; Q_{i+1/2}^n]$$

$$se\begin{cases} Q_i^n < Q_{i+1}^n \Rightarrow F_{i+1/2}^n = \min(F_{i+1/2}^*) \\ Q_i^n > Q_{i+1}^n \Rightarrow F_{i+1/2}^n = \max(F_{i+1/2}^*) \\ Q_i^n = Q_{i+1}^n \Rightarrow F_{i+1/2}^n = Q_i^n / 2 \end{cases}$$

Métodos de Diferenças-Finitas para Forma Conservativa

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) = 0$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n{}_{i+1/2} - F^n{}_{i-1/2}\right]$$

Esquema ***centrado de Godunov 2° Ordem***

$$F^n{}_{i+1/2} = F(Q_{i+1/2}^{GodC})$$

$$Q_{i+1/2}^{GodC} = \frac{1}{2}(Q_i^n + Q_{i+1}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F(Q_{i+1}^n) - F(Q_i^n))$$

Métodos de Diferenças-Finitas para Forma Conservativa

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) = 0$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n{}_{i+1/2} - F^n{}_{i-1/2}\right]$$

Esquema ***de Dois passos de Lax-Wendroff:LW2***

$$\begin{cases} Q_i^* = Q_i^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\left[F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n\right] \\ Q_i^{n+1} = Q_i^* - \dfrac{\Delta t}{\Delta x}\left[F_{1+1/2}^* - F_{i-1/2}^*\right] \end{cases}$$

$$F^n{}_{i+1/2} = F(Q_{i+1/2}^{LW2})$$

$$Q_{i+1/2}^{LW2} = \frac{1}{2}(Q_i^n + Q_{i+1}^n) - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}(F(Q_{i+1}^n) - F(Q_i^n))$$

Teoremas Relacionados aos Métodos Conservativos

Teorema de Lax-Wendroff (1960)

Se um método na forma conservativa converge, então ele converge para a *solução fraca "weak solution"* da lei de conservação.

Teorema de Lax-Wendroff e condição de Entropia de Harten (1983)

Se o esquema conservativo satisfaz a *condição de entropia e converge*, então converge para a única solução física satisfazendo a entropia, "*weak solution*".

Teorema de Hou-LeFloch (1994)

Se um método na forma não-conservativa converge, então na presença de uma onda de choque, converge para a ***solução errada***.

Lei Escalar da Conservação

Seja *Q=Q(x,t)* uma quantidade conservada e o fluxo *F=F(Q).*

Para uma região [a,b]Є R durante um intervalo de tempo $[t^1,t^2]$. A *lei escalar de conservação* permite escrever:

$$\int_a^b \left[Q(x,t^2) - Q(x,t^1)\right]dx = -\int_{t^1}^{t^2} [F(Q(b,t)) - F(Q(a,t))]dt$$

Que representa a *forma integral da lei escalar de conservação da quantidade Q. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,* pode-se escrever:

$$Q(x,t^2) - Q(x,t^1) = \int_{t^1}^{t^2} \frac{\partial Q}{\partial t} dt \qquad \text{e}$$

$$F(Q(b,t)) - F(Q(a,t)) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x} dx$$

Levando isto na equação que define a *Lei de Conservação*, vem:

Lei Escalar da Conservação

$$\int_a^b \int_{t^1}^{t^2} \frac{\partial Q}{\partial t} dtdx = -\int_{t^1}^{t^2} \int_a^b \frac{\partial F(Q)}{\partial x} dxdt$$

$$\int_{t^1}^{t^2} \int_a^b \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F(Q)}{\partial x} \right] dxdt = 0 \qquad \text{ou}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F(Q)}{\partial x} = 0$$

Esta é a *Forma Conservativa da Lei Escalar de Conservação*. *Soluções descontinuas da forma integral são chamadas de soluções fraca "weak solutions" da forma diferencial.*

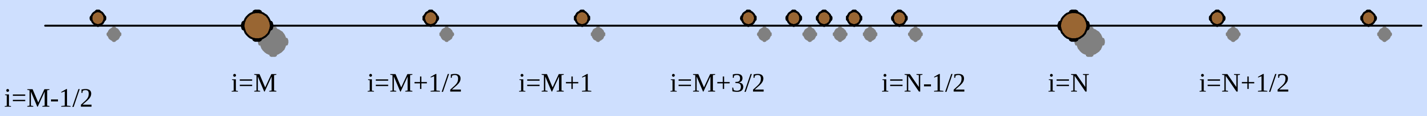
Lei Escalar da Conservação: Forma Conservativa

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F(Q)}{\partial x} = 0$$

Discretizando no espaço e tempo, vem:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n\right)$$

Considerando no domínio dois nodos quaisquer *M* e *N* Є [a,b]



$$\sum_{i=M}^{N} Q_i^{n+1} = \sum_{i=M}^{N} Q_i^n - \sum_{i=M}^{N} \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n\right)$$

$$\sum_{i=M}^{N} Q_i^{n+1} = \sum_{i=M}^{N} Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{M+1/2}^n - F_{M-1/2}^n + F_{M+3/2}^n - F_{M+1/2}^n + F_{M+5/2}^n\right.$$

$$\left. - F_{M+3/2}^n + \ldots + F_{N+1/2}^n - F_{N-1/2}^n + F_{N-1/2}^n - F_{N-3/2}^n + \ldots\right)$$

Lei Escalar da Conservação: Forma Conservativa

$$\sum_{i=M}^{N} Q_i^{n+1} = \sum_{i=M}^{N} Q_i^{n} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{N+1/2}^{n} - F_{M-1/2}^{n}\right)$$

Mostra que houve conservação do fluxo em todo domínio, mostrando que: *o que entra, assim como o que sai de cada interface dos volumes (i+1/2 e i-1/2) é conservado.*

Para *M=N=i reconstituímos a equação geral do método.*

Lei Escalar da Conservação: Forma Não-Conservativa

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} Q^n{}_i \left[Q^n{}_{i+1/2} - Q^n{}_{i-1/2} \right]$$

$$\sum_{i=M}^{N} Q_i^{n+1} = \sum_{i=M}^{N} Q_i^n - \sum_{i=M}^{N} \frac{\Delta t}{2\Delta x} Q_i^n (Q_{i+1/2}^n - Q_{i-1/2}^n)$$

$$\sum_{i=M}^{N} Q_i^{n+1} = \sum_{i=M}^{N} Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \{ \; Q_M^n (Q_{M+1/2}^n - Q_{M-1/2}^n) + Q_{M+1}^n (Q_{M+3/2}^n - Q_{M+1/2}^n) + Q_{M+2}^n (Q_{M+5/2}^n$$

$$- Q_{M+3/2}^n) + \ldots + Q_N^n (Q_{N+1/2}^n - Q_{N-1/2}^n) + Q_{N-1}^n (Q_{N-1/2}^n - Q_{N-3/2}^n) + \ldots) \; \}$$

Observe que devido os termos dos coeficientes ***Q*** os termos interiores não se cancelam. Logo a equação escrita nesta forma ***não é Conservativa***

Propriedade Telescópica dos Métodos Conservativos

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F^n{}_{i+1/2} - F^n{}_{i-1/2}\right]$$

$$\sum_{i=i_{Left}}^{i=i_{Right}} \Delta x Q_i^{n+1} = \sum_{i=i_{Left}}^{i=i_{Right}} \Delta x Q_i^n - \Delta t\left[F_{i_{Right}-1/2} - F_{i_{Left}+1/2}\right]$$

Também válido em 2 e 3 dimensões.

Formulação de Volume Finitos com termo Fonte

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) = S(Q)$$

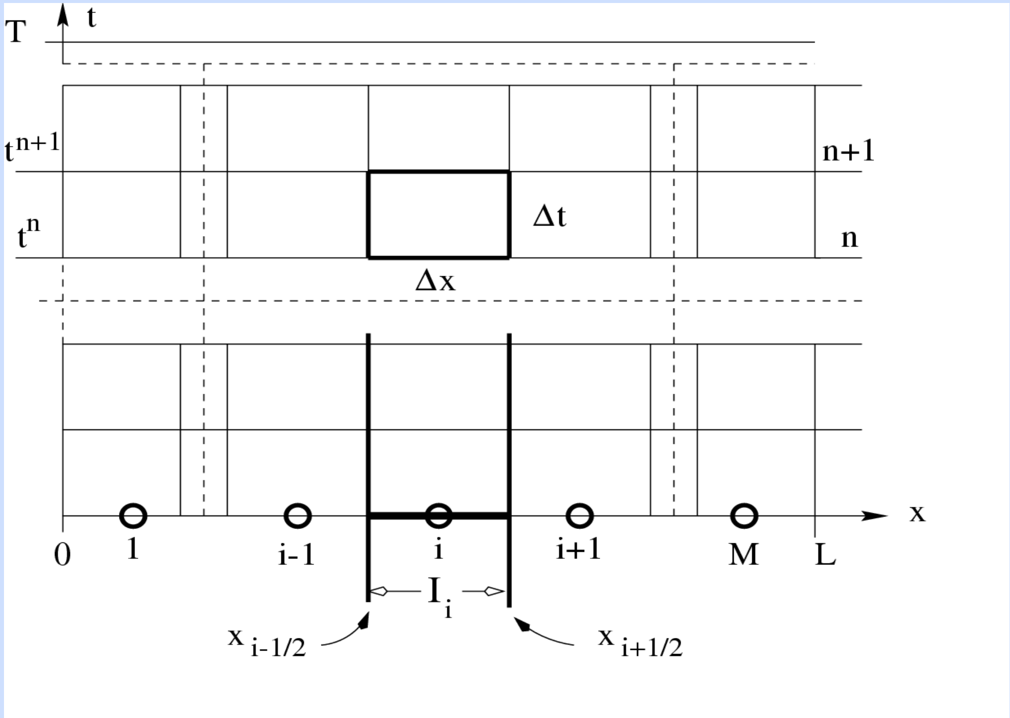
$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right] + \Delta t\, S_i$$

$$Q_i^n = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} Q(x,t^n)dx \qquad F_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(Q(x_{i+1/2},t))dt$$

$$S_i = \frac{1}{\Delta t}.\frac{1}{\Delta x}\iint_{I_i} S(Q(x,t))dxdt$$

Volume Finitos com termo Fonte

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) = S(Q)$$



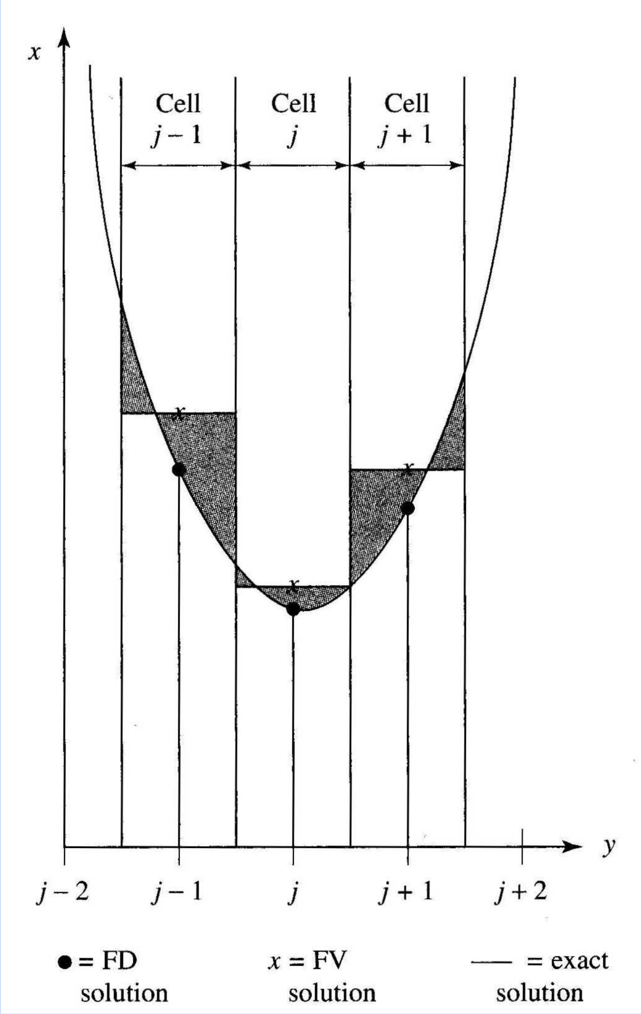
$$I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$$

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} Q(x,t^{n+1})dx = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} Q(x,t^n)dx - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(Q(x_{i+1/2},t))dt - \frac{1}{\Delta t}\int_{t^n}^{t^{n+1}} F(Q(x_{i-1/2},t))dt\right] + \frac{1}{\Delta x}\iint_{I_i} S(Q(x,t))dxdt$$

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F_{i+1/2} - F_{i-1/2}\right] + \Delta t\, S_i$$

Volume Finitos com termo Fonte

- ***A principal diferença entre DF e VF*** é a interpretação da solução nos pontos da malha (veja figura ao lado).
  - No VF a solução $\boldsymbol{Q_j^n}$ é vista como a média de Q na célula.
  - Em DF a solução $\boldsymbol{Q_j^n}$ é vista como uma função de ponto (isto é, a solução no ponto $\boldsymbol{y_j}$ e tempo $\boldsymbol{t^n}$. Isto implica que $\boldsymbol{Q}$ em qualquer ponto pode ser interpolado de $\boldsymbol{Q}$ em diferente pontos de malha e em diferentes níveis de tempo.



Sistema Linear Hiperbólico

$$Q_t + AQ_x = 0$$ ***A é uma matriz constante***

Os autovalores e autovetores direitos de ***A*** são

$$\lambda^{(1)} \quad \lambda^{(2)} \quad \ldots \quad \lambda^{(m)}$$

$$R^{(1)} \quad R^{(2)} \quad \ldots \quad R^{(m)}$$

$$R^{(k)} = \left[r_1^{(k)} \quad r_2^{(k)} \quad \ldots \quad r_m^{(k)} \right]^T$$

Define-se as matrizes:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{(m)} \end{bmatrix} \; ; \; R = \begin{bmatrix} r_1^{(1)} & r_1^{(2)} & \ldots & r_1^{(m)} \\ r_2^{(1)} & r_m^{(2)} & \ldots & r_2^{(m)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_m^{(1)} & r_m^{(2)} & \ldots & r_m^{(m)} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = R\Lambda R^{-1} \leftrightarrow \Lambda = R^{-1}AR}$$

Sistema Não-Linear Hperbólico

$$\partial_t Q + A(Q)\partial_x Q = 0$$

Dado a matriz ***A*** pode-se definir autovalores e autovetores de ***A***.

Os autovalores de ***A*** são as raízes do chamado *polinômio característico*

$$\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \lambda^{(1)}, \ldots., \lambda^{(m)}$$

*Os autovetores esquerdo de **A*** correspondente aos autovalores que satisfaz:

$$L^{(k)}\mathrm{A} = \lambda^{(k)} L^{(k)}$$

*Os autovetores direitos de **A*** correspondente aos autovalores que satisfaz:

$$\mathrm{A}R^{(k)} = \lambda^{(k)} R^{(k)}$$

Definição de sistema de Equações Hiperbólicas

Seja um sistema de ***m*** equações

$$\partial_t Q + A(Q)\partial_x Q = 0$$

É ***hiperbólico*** *se*:

- ***A*** tem ***m*** *autovalores reais*
- ***A*** tem um conjunto completo correspondente de ***m*** *autovetores linearmente independentes*

Exemplo: As equações “shallow water” são hiperbólicas

$$\partial_t Q + \partial_x F(Q) = 0$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, \quad F(Q) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2} g h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ \frac{q_2^2}{q_1} + \frac{1}{2} g q_1^2 \end{bmatrix}$$

Definição de sistema de Equações Hiperbólicas

$$A(Q) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial q_2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial q_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_1} = \frac{-q_2^2}{q_1^2} + g q_1 = -u^2 + gh \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial q_2} = \frac{2q_2}{q_1} = 2u$$

$$A(Q) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix}$$ onde $$a = \sqrt{gh}$$

a é chamada de *celeridade* (análogo a velocidade do som nos gases)

Verifique que os autovalores de ***A*** são:

$$\lambda_1 = u - a \quad ; \quad \lambda_2 = u + a$$

$$|A - \lambda I| = \left\| \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u - \lambda \end{bmatrix} \right\| = 0 \Rightarrow -\lambda(2u - \lambda) - \left(a^2 - u^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = u - a \quad ; \quad \lambda_2 = u + a$$

Condição de Estabilidade

Seja a equação escalar:

$$\partial_t q + \lambda \partial_x q = 0 \qquad \lambda \Rightarrow \quad \text{constant}$$

$$c = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \qquad 0 \le |c| \le 1$$

$$0 \le \frac{|\lambda| \Delta t}{\Delta x} \le 1 \qquad \Delta t \le 1 \times \frac{\Delta x}{|\lambda|}$$

$$\Delta t = C_{CFL} \times \frac{\Delta x}{|\lambda|} \qquad 0 < C_{CFL} \le 1$$

Para sistema Linear:

$$\Delta t = C_{CFL} \times \frac{\Delta x}{S^n_{\max}} \qquad S^n_{\max} = \max\{|\lambda_j|\} \qquad 1 \le j \le n$$

C_{CFL} ***Número de Courant-Friedrich-Lewy***

Equação de Burgers

Seja a equação escalar:

Difusão

$$\partial_t q + \lambda \, \partial_x q = \kappa \partial_x^2 q \qquad \lambda, \kappa \Rightarrow \quad \text{constant}$$

$$c = \frac{\lambda \Delta t}{\Delta x} \qquad\qquad 0 \le |c| \le 1$$

$$0 \le \frac{|\lambda| \Delta t}{\Delta x} \le 1 \qquad\qquad \Delta t \le 1 \times \frac{\Delta x}{|\lambda|}$$

$$\Delta t = C_{CFL} \times \frac{\Delta x}{|\lambda|} \qquad\qquad 0 < C_{CFL} \le 1$$

Para sistema Linear de Burgers:

$$\Delta t = C_{CFL} \times \frac{\Delta x}{S_{\max}^n} \qquad S_{\max}^n = \max\left\{ \left| q^n{}_i \right| \right\} \qquad 1 \le i \le n$$

Equação de Burgers

Observações:

• Para sistemas hiperbólicos lineares com coeficientes constantes a velocidade característica são os autovalores do sistema e são idênticas as velocidades de onda no *problema de Riemann*.

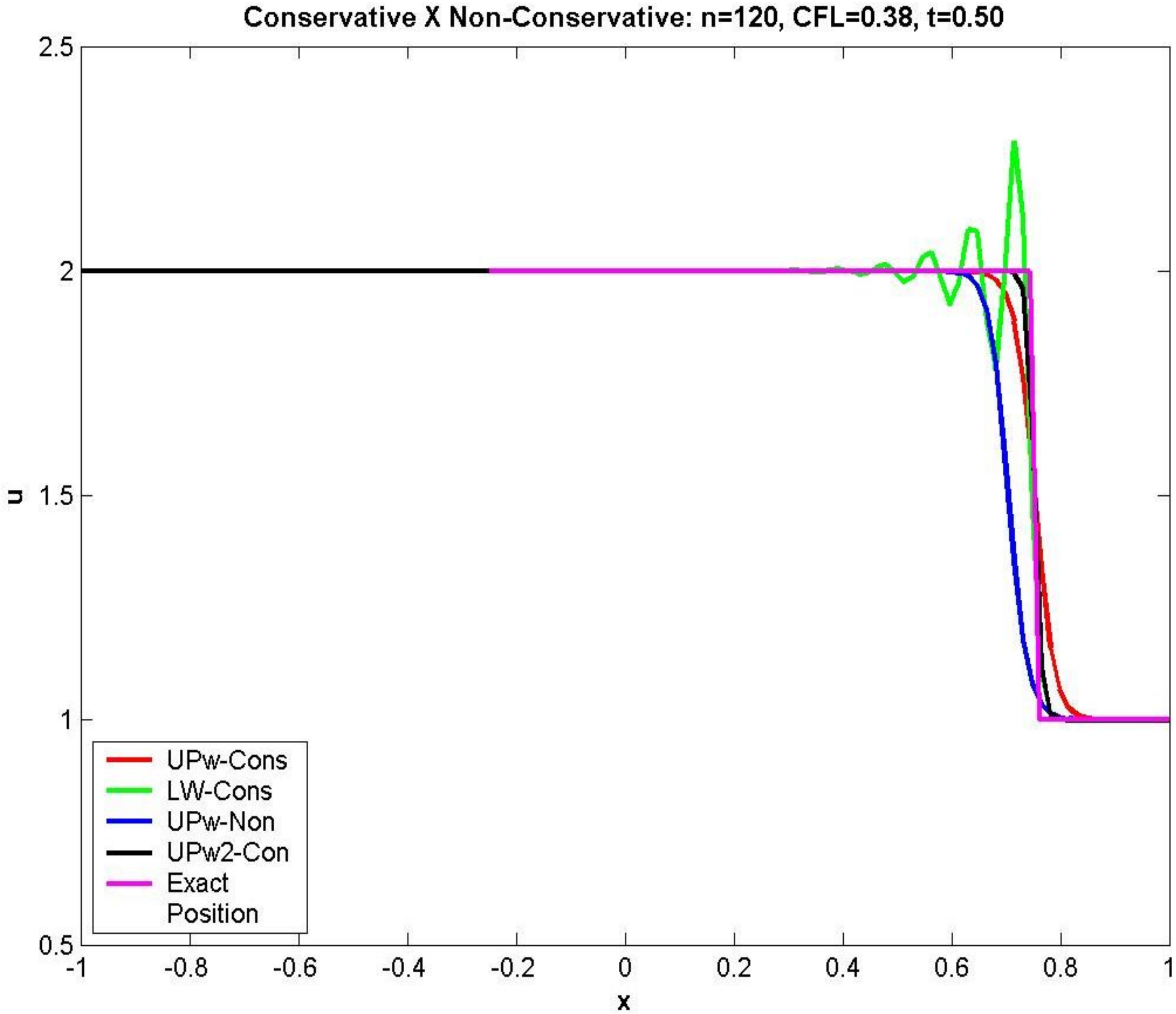
• Para sistemas não-lineares a velocidade características são distintas das velocidades de onda.

• Cuidado especial na escolha da velocidade de onda máxima para a condição de CFL é requerido.

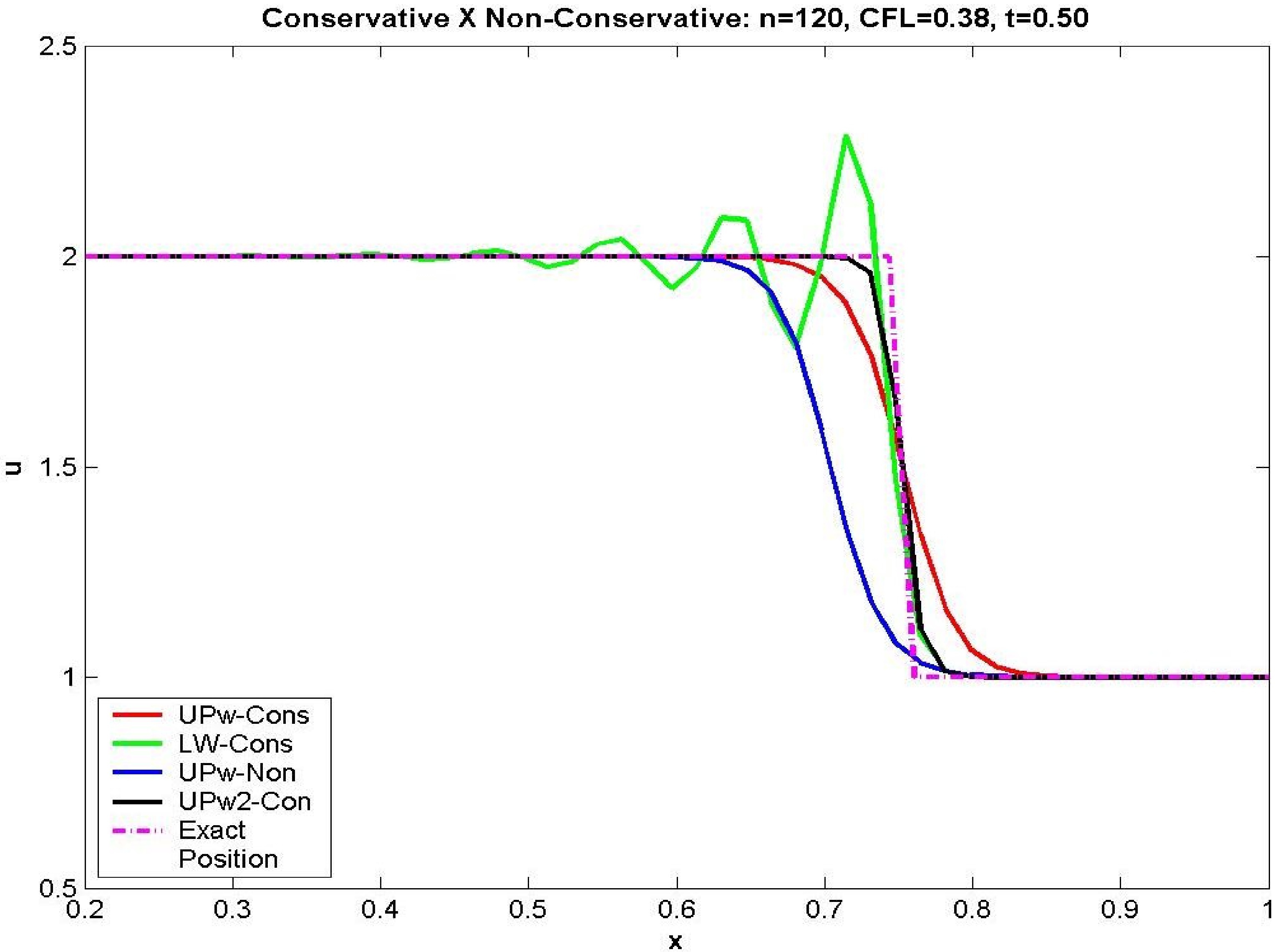
Simulações

- Formulação Não-Conservativa
- Formulação Conservativa

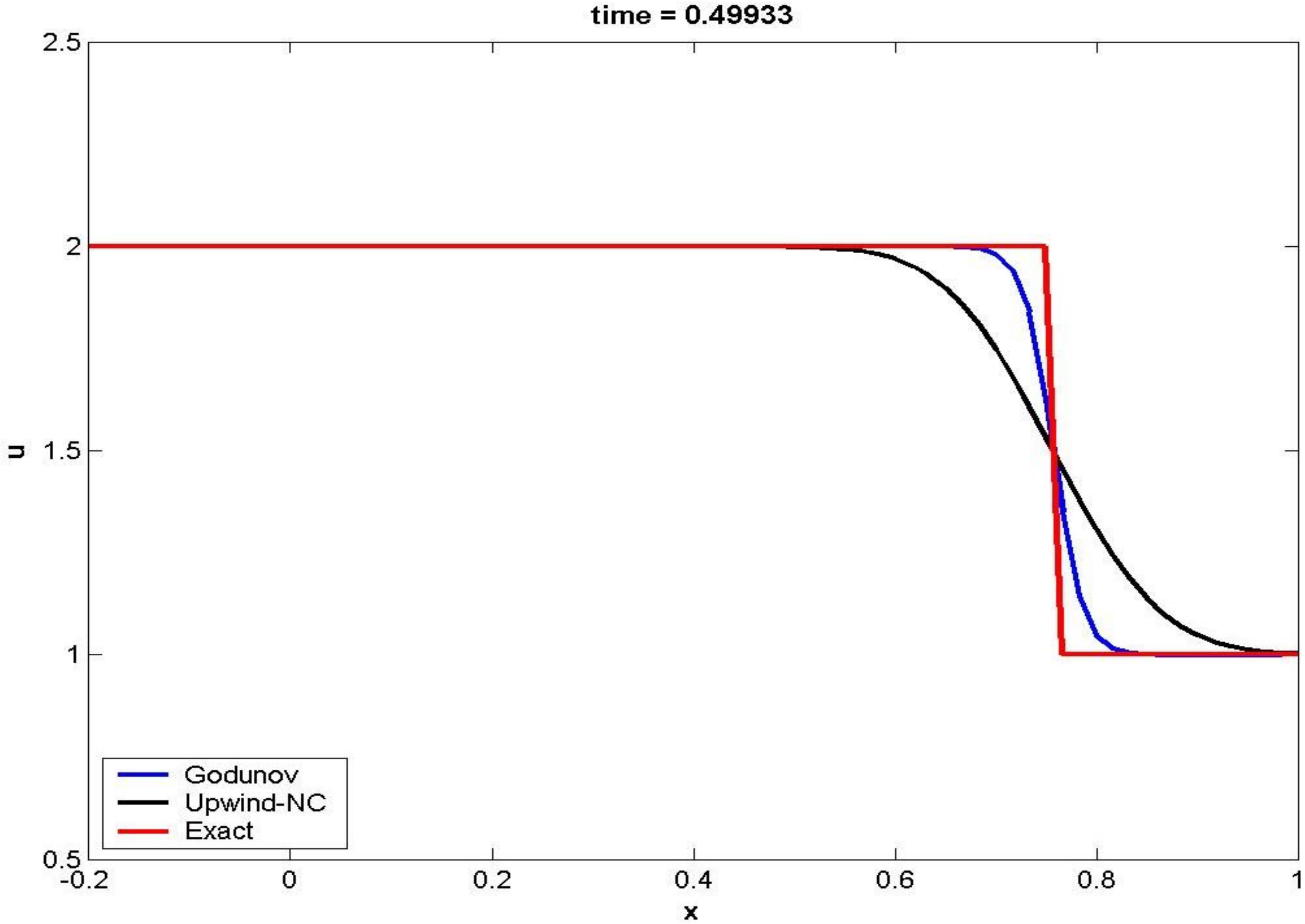
Simulação: Resultados



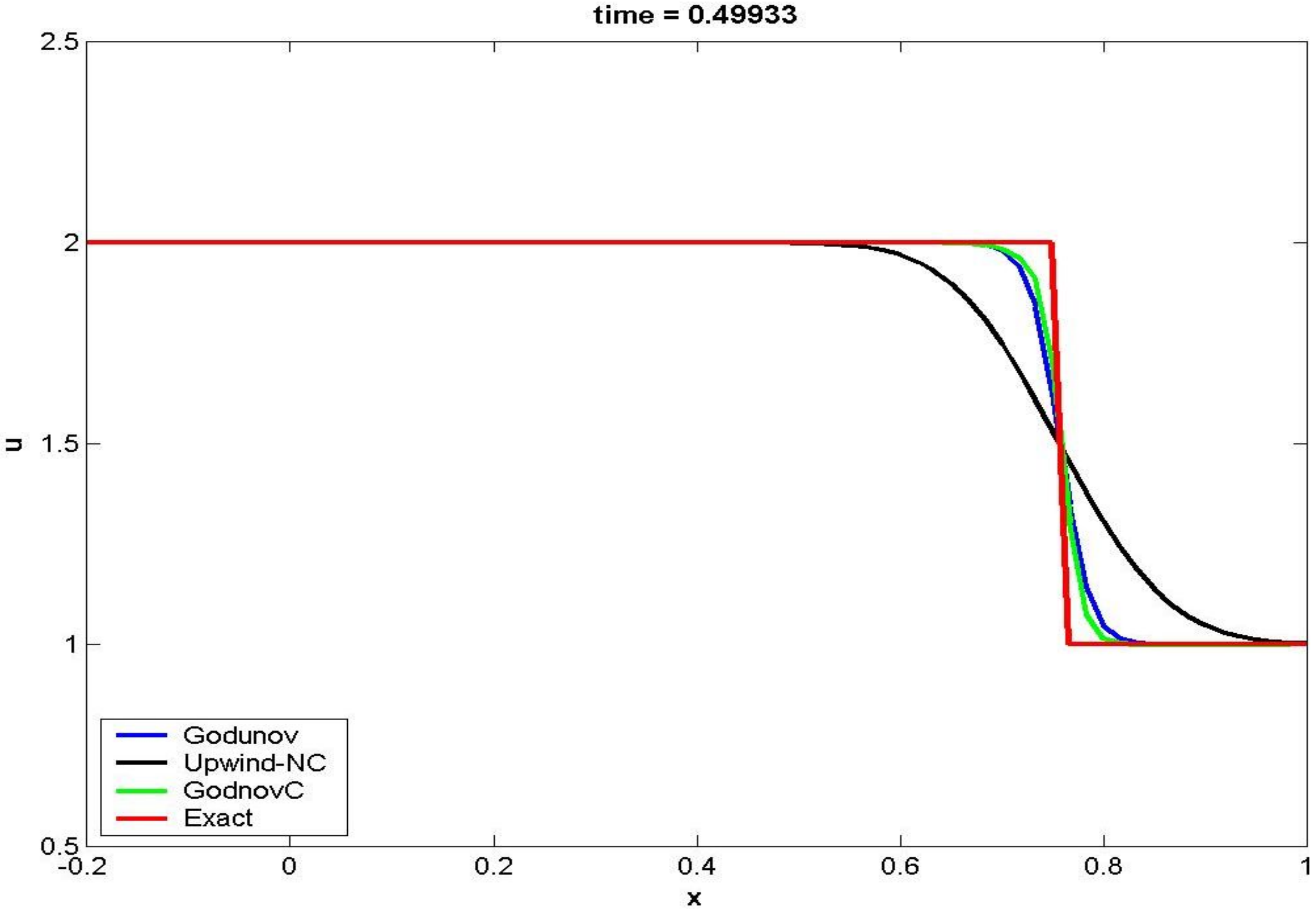
Simulação: Resultados



Simulação: Resultados



Simulação: Resultados



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

•P.D. LAX AND B. WENDROFF, ***Systems of conservation laws***, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol 13, 217-237, 1960.

•Harten, A., ***High resolution schemes for hyperbolic conservation laws***. J. Comp. Phys., 49, 357, 1983.

•T. Y. HOU AND P. G. LEFLOCH, ***Why nonconservative schemes converge to wrong solutions: error analysis***, *Math. of Comp.*, Vol 62, No 206, 497-530, 1994.

•J. D. ANDERSON, ***Modern Compressible Flow***, McGraw-Hill 2004, 3rd revised edition, ISBN 0071241361.

•***ConNonHyperbolic.m***

•***GodunovDioUP.m***

www.professores.uff.br/diomar_cesar_lobao