TÓPICOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Paulo Agozzini Martin
&
Maria Lúcia Singer

APOSTILA
POLI– 2007

Sumário

CAPíTULO 1

Operadores Semisimples

1. Espaços Vetoriais Complexos

1.1. Os Números Complexos. Aprendemos desde muito cedo que no conjunto dos números reais não existe nenhum número cujo quadrado seja igual à -1. Uma explicação para isso está no fato de que existem algumas "regras" para a multiplicação de números reais, por exemplo: *menos com menos dá mais*! Vejamos como se prova essa "regra". Começamos com

$$\begin{aligned}(-x)\cdot y + x\cdot y &= [(-x)+x]\cdot y\\ &= 0\cdot y\\ &= 0\end{aligned}$$

ou seja, $(-x)\cdot y = -(x\cdot y)$. Usando essa propriedade deduzimos que:

$$\begin{aligned}(-x)\cdot(-y) + [-(x\cdot y)] &= (-x)\cdot(-y) + (-x)\cdot y\\ &= (-x)\cdot[(-y)+y]\\ &= (-x)\cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

e, portanto,

$$(-x)\cdot(-y) = x\cdot y.$$

De modo que $x>0$ e $y>0$ acarretam $(-x)\cdot(-y)>0$. Assim, em particular, se $x\in\mathbf{R}$ é um número real não nulo, então

$$(-x)\cdot(-x) = x\cdot x = x^2 > 0,$$

e portanto nenhum número negativo y pode ter raiz quadrada em $\mathbf{R}$, pois uma raiz quadrada de y é um número x tal que $x^2=y$. Assim, as equações polinomiais de grau dois:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ simplesmente não possuem solução real. Quando passamos para certas equações de grau 3, por exemplo as do tipo

$$x^3 = px + q, \tag{1}$$

a fórmula de Cardano para as raízes é:

$$x = \sqrt[3]{q/2 + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q/2 - \sqrt{\Delta}},$$

onde o discriminante (análogo ao discriminante da equação de grau 2) é

$$\Delta = (q/2)^2 - (p/3)^3.$$

Novamente temos a maldição do discriminante negativo: se $(p/3)^3 > (q/2)^2$ a fórmula não se aplica! Porém aqui há algo substancialmente diferente do caso de uma equação de grau 2 com discriminante negativo: pelo menos uma das raízes de uma equação do tipo (1) é *real!*

Vejamos um exemplo: a equação $x^3 = 15x + 4$ possui por raízes $x = 4$, $x = -2 - \sqrt{3}$ e $x = -2 + \sqrt{3}$. Se aplicarmos a fórmula de Cardano obteremos:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Será que essa fórmula não produz nenhuma das raízes acima? Chamando ao número imaginário $\sqrt{-1}$ de i, verificamos que

$$\begin{aligned} (2 + i)^3 &= 8 + 3 \cdot 4 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 \\ &= 8 + 12i - 6 - i \\ &= 2 + 11i \end{aligned}$$

e, analogamente, verificamos que $(2 - i)^3 = 2 - 11i$, ou seja

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1},$$

de onde a raiz x dada pela fórmula é:

$$x = (2 + i) + (2 - i) = 4.$$

Se considerarmos as raízes de $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) = 0$, a saber:

$$\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \qquad \zeta^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}, \qquad \zeta^3 = 1,$$

podemos extrair três raízes cúbicas de $2 \pm 11i$:

$$(2 \pm i), \qquad \zeta(2 \pm i), \qquad \zeta^2(2 \pm i),$$

pois cada uma dessas expressões, quando elevada ao cubo, fornece $2 \pm 11i$. Fazendo as contas, as três raízes cúbicas de $2 + 11i$ são:

$$(2+i), \qquad (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} + \sqrt{3})i, \qquad (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} - \sqrt{3})i,$$

e as três raízes cúbicas de $2 - 11i$ são:

$$(2-i), \qquad (-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})i, \qquad (-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2} - \sqrt{3})i.$$

Uma observação interessante é a seguinte: se somarmos a terceira raiz cúbica de $(2+11i)$ com a segunda raiz cúbica de $(2-11i)$ obteremos $-2+\sqrt{3}$, e se somarmos a segunda raiz cúbica de $2+11i$ com a terceira raiz cúbica de $2-11i$ obteremos $-2-\sqrt{3}$, ou seja, as outras raízes reais da equação. Embora as demais somas não produzam raízes, a manipulação dessa quantidade *imaginária* $i = \sqrt{-1}$ acabou produzindo as três raízes "verdadeiras" da equação em questão. O mesmo vale para muitos outros exemplos de equações de grau 3, e portanto é preciso ultrapassar o domínio dos reais, alargando o universo dos números, para abranger esses outros *números* estranhos.

Vamos dar uma definição (uma entre muitas possíveis) dos números impossíveis, ou imaginários, ou complexos: seja $\mathbb{C}$ o espaço vetorial $\mathbf{R}^2$ munido com a seguinte operação de multiplicação:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

É fácil verificar que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ satisfaz os axiomas definidores de um corpo. Esse corpo será chamado de o *corpo dos números complexos*. Se dermos um nome especial ao vetor $(0,1)$, a saber, $\mathbf{i} = (0,1)$, podemos verificar facilmente que

$$\mathbf{i}^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0).$$

Ora, vamos usar também uma notação especial para o vetor $(1,0)$ (o elemento identidade da multiplicação) a saber, $\mathbf{1}$, de modo que a equação acima se escreve

$$\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}.$$

O vetor $(x, 0)$ se escreve simplesmente como $x\mathbf{1}$. Então, como sabemos que $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base do $\mathbf{R}^2$, todo vetor (a, b) de $\mathbf{R}^2$ se escreve como

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a\mathbf{1} + b\mathbf{i}.$$

Além disso, a multiplicação fica

$$\begin{aligned}(a\mathbf{1} + b\mathbf{i})(c\mathbf{1} + d\mathbf{i}) &= (a, b) \cdot (c, d)\\ &= (ac - bd, ad + bc)\\ &= (ac - bd)\mathbf{1} + (ad + bc)\mathbf{i}.\end{aligned}$$

O leitor deve observar que o o subespaço vetorial de $\mathbb{C}$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{1} = \{a\mathbf{1} \ : \ a \in \mathbf{R}\} = \{(a, 0) \ : \ a \in \mathbf{R}\}$$

munido com a operação de multiplicação que definimos acima, funciona exatamente como o conjunto dos números reais. De fato,

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0),$$

ou seja, se identificarmos o conjunto dos números reais com $\mathbf{R}\cdot\mathbf{1}$, temos a inclusão $\mathbf{R} \subset \mathbb{C}$. Doravante, escreveremos um número complexo simplesmente como $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbf{R}$ e $i = \sqrt{-1}$.

As partes *real* e *imaginária* de $z = a+bi$ são definidas por $Re(z) = a$ e $Im(z) = b$. Como $\{1, i\}$ são linearmente independentes, dois números complexos z_1 e z_2 são iguais se e somente se as suas partes real e imaginária forem iguais:

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow Re(z_1) = Re(z_2) \ \ e \ \ Im(z_1) = Im(z_2).$$

Definição 1.1. *Se $z = a + bi$ é um número complexo, o seu conjugado é o número complexo*

$$\bar{z} = a - bi.$$

E definimos também o valor absoluto ou módulo de z por

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

LEMA 1.2. *Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Então valem as seguintes propriedades:*
1. $\bar{\bar{z}} = z$.
2. $\bar{z} = z \Longleftrightarrow z \in \mathbf{R}$.
3. $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ *e* $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.
4. $\overline{(-z)} = -\bar{z}$.
5. $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$, *se* $z \neq 0$.
6. $z\bar{z} = |z|^2$.
7. $|zw| = |z||w|$.
8. $Re(z) = (z+\bar{z})/2$ *e* $Im(z) = (z-\bar{z})/2i$.
9. $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Prova: As primeiras oito afirmações são de fácil verificação e serão deixadas a cargo do leitor. Vamos provar a última afirmação. Observamos que no espaço vetorial $\mathbb{C}$ existe um produto escalar natural definido por: se $w = u + iv$ e $z = x + iy \ \in \mathbb{C}$, então

$$< w, z >= Re(w\bar{z}) = ux + vy$$

Em relação a esse produto interno, o quadrado da norma de um número complexo z é $|z|^2 =< z, z >= x^2 + y^2$. Isso significa que o módulo do número complexo z coincide com a sua norma. Vimos que em um espaço vetorial com produto interno vale a desigualdade triangular, que neste caso é a afirmação 9. $\square$

Vamos terminar esta seção mostrando que não é possível *ordenar* os números complexos de modo semelhante ao do conjunto dos números reais.

TEOREMA 1.3. *É impossível definir uma relação $z > 0$ em $\mathbb{C}$ de modo que ela satisfaça as seguintes condições:*

1. Dado $z \in \mathbb{C}$, apenas uma das três possibilidades ocorre: ou $z > 0$ ou $z = 0$ ou $(-z) > 0$ (tricotomia). (Quando $(-z) > 0$ dizemos que $z < 0$).

2. Se $z > 0$ e $w > 0$ então $z + w > 0$ e $zw > 0$.

Prova: Suponhamos que exista uma tal relação. Então a condição 1, de tricotomia, acarreta a decomposição disjunta

$$\mathbb{C} = (-P) \cup \{0\} \cup P,$$

onde $P = \{x \in \mathbb{C} \ : \ x > 0\}$ (o conjunto dos *positivos*) e $(-P) = \{-x \ : \ x \in P\}$ (o conjunto dos *negativos*). Vimos no início desta seção que $(-x)(-y) = xy$ e, em particular, que $(-x)^2 = x^2$. Assim, se $z \in P$, a condição 2 implica que $z^2 \in P$ e a observação no início deste capítulo implica que $(-z)^2 = z^2 \in P$, de modo que todo quadrado de $\mathbb{C}$ tem que ser positivo. Ora $1 = 1^2 > 0$ e portanto $-1 \in (-P)$. Mas $i^2 = -1$ fornece uma contradição! □

Assim, a passagem de $\mathbf{R}$ para $\mathbb{C}$ nos permitiu a resolução de equações polinomiais que não possuíam raízes em $\mathbf{R}$; mas por outro lado perdemos a *ordem* dos números reais. É a vida!

Mas voltemos ao lado bom da coisa: vimos que em $\mathbf{R}$ não é possível extrair a raiz quadrada de um número real negativo. No corpo dos complexos vale o

Lema 1.4. *Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, com $a, b \in \mathbf{R}$ então*

$$w = \sqrt{\frac{|z| + a}{2}} + i\varepsilon\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}$$

onde $\varepsilon = \pm 1$, com o sinal escolhido de modo que $b = \varepsilon|b|$, verifica $w^2 = z$.

Prova: Seja $w = x + iy$ verificando $w^2 = z$. Então

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi.$$

Essa equação é equivalente ao sistema

$$x^2 - y^2 = a, \qquad 2xy = b.$$

Mas como $w^2 = z$, temos também $x^2 + y^2 = |z|$, de onde podemos concluir que

$$x^2 = \frac{|z| + a}{2}, \qquad y^2 = \frac{|z| - a}{2}.$$

Escolhendo as raízes quadradas positivas, podemos escrever

$$x = \sqrt{\frac{|z| + a}{2}}, \qquad y = \varepsilon\sqrt{\frac{|z| - a}{2}},$$

de modo que $2xy = b$ ou seja: $\varepsilon = 1$ se $b > 0$ e $\varepsilon = -1$ se $b < 0$. Isso termina a prova do lema. □

1.2. Coordenadas polares e Raízes n-ésimas. Como $\mathbb{C} = \mathbf{R}^2$, podemos descrever o número complexo $z \in \mathbb{C}$ através de coordenadas polares, isto é,

$$z = (r\cos\theta, r sen\theta),$$

onde $r = |z|$ e $0 \leq \theta < 2\pi$. Assim, todo número complexo $z \neq 0$ pode ser escrito na forma

$$z = |z| \left(cos\theta + isen\theta \right),$$

onde θ está determinado a menos de um múltiplo inteiro de 2π. Dizemos que θ é a *fase* ou *argumento* ou *ângulo* do número complexo z. Essa representação é muito útil e, entre outras coisas, vai nos permitir uma interpretação geométrica do produto de dois números complexos: sejam $z = r\,cos(\psi) + ir\,sen(\psi)$ e $w = s\,cos(\varphi) + is\,sen(\varphi)$ dois complexos não nulos. O seu produto fornece:

$$\begin{aligned} zw &= rs(cos(\psi) + isen(\psi))(cos(\varphi) + isen(\varphi)) \\ &= rs\left(cos(\psi)cos(\varphi) - sen(\psi)sen(\varphi)\right) + \\ &\quad + irs\left(cos(\psi)sen(\varphi) + sen(\psi)cos(\varphi)\right) \\ &= rs\left(cos(\psi + \varphi) + isen(\psi + \varphi)\right), \end{aligned}$$

ou seja: o módulo do produto é o produto dos módulos e o ângulo do produto é a soma dos ângulos.

1.3. Multiplicação por z_0 como transformação linear. Fixado um número complexo $z_0 = a + ib$, podemos definir uma transformação linear $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ assim:

$$P(w) = z_0 w.$$

É claro que P é um operador linear no espaço vetorial $\mathbb{C}$. Em termos da base $Can = \{1, i\}$ de $\mathbb{C}$, vejamos qual é a matriz de P. Aplicando P à essa base obtemos

$$P(1) = (a + ib)1 = a + ib, \qquad P(i) = (a + ib)i = -b + ia,$$

ou seja

$$[P]_{Can} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Interpretamos esse resultado da seguinte maneira: se trabalhamos com os complexos na forma usual, a operação de multiplicação de $w = x + iy \in \mathbb{C}$ por um complexo $z_0 = a + ib$ fixo se traduz, do ponto de vista da álgebra linear, no espaço $\mathbf{R}^2$, como a multiplicação da matriz $[P]_{Can}$ e do vetor $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Podemos resumir essas informações num diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{C} \\ \mathbf{R}^2 \arrow[r, "{[P]_{Can}}"'] & \mathbf{R}^2 \arrow[u, "\phi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Nesse diagrama $\phi(a + ib) = (a, b)$ é a representação em coordenadas relativamente à base canônica $\{1, i\}$. A comutatividade do diagrama significa que se $w \in \mathbb{C}$ então

$$P(w) = \phi^{-1}[P]_{Can}\phi(w).$$

Uma consequência interessante dessas observações é que acabamos por entender geometricamente a ação do operador

$$T = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

no $\mathbf{R}^2$: podemos passar para $\mathbb{C}$ e considerar o operador $P(z) = (a+bi)z$, que roda o ponto z de θ radianos ($0 \le \theta < 2\pi$) no sentido antihorário, onde $(a+bi) = r(cos\theta+isen\theta)$, e multiplica a sua norma por $\sqrt{a^2 + b^2} = |a + ib|$.

TEOREMA 1.5. **[Fórmula de de Moivre]** *Se $n \geq 0$ é um número natural então:*

$$(cos\theta + isen\theta)^n = cos(n\theta) + isen(n\theta).$$

Prova: Vamos provar por indução em n. Para $n = 0$ o resultado é claro. Seja $n \geq 1$ e suponhamos que o resultado seja válido para todo inteiro $m \leq (n - 1)$. Então aplicando a hipótese de indução e as fórmulas de adição de arcos da trigonometria obtemos:

$$\begin{aligned} (cos\theta + isen\theta)^n &= (cos\theta + isen\theta)(cos\theta + isen\theta)^{n-1} \\ &= (cos\theta + isen\theta)(cos((n-1)\theta) + isen((n-1)\theta)) \\ &= cos(\theta)cos((n-1)\theta) - sen(\theta)sen((n-1)\theta) \\ &+ i[cos(\theta)sen((n-1)\theta) + sen(\theta)cos((n-1)\theta)] \\ &= cos(n\theta) + isen(n\theta) \end{aligned}$$

1.4. Espaços vetoriais complexos. Até agora estudamos espaços vetoriais V sobre o corpo $\mathbf{R}$ dos números reais, isto é, estudamos um conjunto V munido de uma operação de soma de vetores e munido de uma multiplicação por *escalares reais*, com boas propriedades. Se permitirmos que esses escalares sejam números complexos, então temos a noção de espaço vetorial complexo ou, mais simplesmente, $\mathbb{C}$-espaço vetorial, para frisar que os escalares estão em $\mathbb{C}$.

DEFINIÇÃO 1.6. *Um $\mathbb{C}$-espaço vetorial é um conjunto V munido com uma soma que satisfaça os axiomas A1-A4, e de uma multiplicação por escalar complexo que satisfaça os axiomas M1-M4 definidos abaixo.*

$$
\begin{aligned}
&A_1 : u+v = v+u, \forall\ u,v \in V \ \ (\textit{comutativa})\\
&A_2 : u+(v+w) = (u+v)+w, \forall\ u,v,w \in V \ \ (\textit{associativa})\\
&A_3 : \text{existe em } V \text{ um vetor, } \mathbf{0}, \text{ tal que } \ v+\mathbf{0} = v, \ \ \forall v \in V\\
&\qquad (\textit{elemento neutro})\\
&A_4 : \text{para cada vetor } v \in V \text{ existe um vetor, } -v \in V, \text{ tal que}\\
&\qquad -v+v = \mathbf{0} \ \ (\textit{elemento oposto}).\\
&M_1 : \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{C} \ \ \forall u,v \in V \ \ (\textit{distributiva})\\
&M_2 : (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v, \ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C} \ \ \forall v \in V \ \ (\textit{distributiva})\\
&M_3 : (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \ \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C} \ \ \forall v \in V \ \ (\textit{associativa})\\
&M_4 : 1v = v, \ \ \forall v \in V.
\end{aligned}
$$

É claro que todos os conceitos fundamentais que estudamos para os $\mathbf{R}$-espaços vetoriais se aplicam igualmente aos $\mathbb{C}$-espaços vetoriais. Por vezes, para enfatizar qual o corpo a que estamos nos referindo, falaremos num $\mathbb{C}$-subespaço ou numa $\mathbb{C}$-base, em contraposição a um $\mathbf{R}$-subespaço ou a uma $\mathbf{R}$-base.

EXEMPLO 1.7. *Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos: $\mathbb{C} = \{a+bi \ : \ a,b \in \mathbf{R}\}$. Já vimos que $\mathbb{C}$ é um $\mathbf{R}$-espaço vetorial de dimensão 2. Uma base para $\mathbb{C}$ é $B = \{1,i\}$. Mas a multiplicação usual de números complexos pode ser usada para dar a $\mathbb{C}$ uma estrutura de $\mathbb{C}$-espaço vetorial: a soma de $\mathbb{C}$ continua a mesma e a multiplicação do escalar $\lambda = c+di \in \mathbb{C}$ pelo vetor $a+bi \in \mathbb{C}$ é a própria multiplicação dos números complexos:*

$$(c+di)\cdot(a+bi) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

É imediato verificar os axiomas A1-A4 e M1-M4. Uma base de $\mathbb{C}$ *como* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial é* $\{1\}$*. Assim,*

$$\dim_{\mathbf{R}} \mathbb{C} = 2, \qquad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1.$$

Exemplo 1.8. *O conjunto* $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C} = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_j \in \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, n\}$ *é um* $\mathbb{C}$*-espaço vetorial e também um* $\mathbf{R}$*- espaço vetorial. Observamos que* $\mathbf{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ *é um* $\mathbf{R}$*-subespaço vetorial de* $\mathbb{C}^n$*. Um fato interessante e que será usado adiante é que se um subconjunto de* $\mathbf{R}^n$*,* $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset \mathbf{R}^n$*, for linearmente independente sobre* $\mathbf{R}$ *então esse conjunto também será linearmente independente sobre* $\mathbb{C}$*. Vamos provar essa afirmação.*

Se $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$ *com* $\alpha_j \in \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, k$ *então tomando conjugados temos* $\overline{\alpha_1} v_1 + \cdots + \overline{\alpha_k} v_k = 0$ *e somado-se essas duas equações temos* $Re(\alpha_1)v_1 + \cdots + Re(\alpha_k)v_k = 0$*. Como* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *é l.i. sobre* $\mathbf{R}$ *concluímos que* $Re(\alpha_j) = 0\ \ j = 1, \ldots, k$*.*

Por outro lado, se subtrairmos as duas equações iniciais teremos $2i(Im(\alpha_1)v_1 + \cdots + Im(\alpha_k)v_k) = 0$*. Assim* $Im(\alpha_1)v_1 + \cdots + Im(\alpha_k)v_k = 0$ *e novamente pela independência linear de* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *sobre* $\mathbf{R}$ *concluímos que* $Im(\alpha_j) = 0 \quad j = 1, \ldots, k$*. Dessa forma* $\alpha_j = 0, \quad j = 1, \ldots, k$*, já que* $Re(\alpha_j) = 0,\ \ j = 1, \ldots, k$ *e* $Im(\alpha_j) = 0,\ \ j = 1, \ldots, k$*. Portanto* $\{v_1, \ldots, v_k\}$ *é l.i. sobre* $\mathbb{C}$*.*

2. O complexificado de um operador

Já sabemos que um $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ é diagonalizável se e somente se todas as raízes do polinômio característico de T são reais e as respectivas multiplicidades geométrica e algébrica são iguais. Se estivermos trabalhando com um operador linear $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, os conceitos de autovalor e autovetor se transportam sem problemas: um número complexo λ é dito um *autovalor* de T se existir um vetor não nulo $\phi \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$T(\phi) = \lambda\phi.$$

Analogamente ao caso real definimos também o polinômio característico de T:

$$p_T(\lambda) = \det\left([T]_B - \lambda I\right),$$

onde B é uma base qualquer de $\mathbb{C}^n$. A única diferença com o caso real é que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, todas as raízes de $p_T(\lambda)$ estão em $\mathbb{C}$ (ou seja, não precisamos de um corpo "maior" do que $\mathbb{C}$ para fatorar $p_T(\lambda)$).

Assim, o teorema de diagonalização se transporta para operadores $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ da seguinte maneira (a prova é idêntica ao caso real):

Teorema 2.1. *Seja $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear. Então*

$$p_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} (z_i - \lambda)^{n_i},$$

onde $z_1, \ldots, z_k$ são números complexos distintos e $n_i \geq 1$, e o operador T é diagonalizável (sobre $\mathbb{C}$) se e somente se, para todo autovalor z_i,

$$n_i = \dim V(z_i),$$

isto é, se e somente se as multiplicidades algébrica e geométrica forem iguais.

É claro que, como no caso real, se $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ for diagonalizável, então (com a notação do teorema acima)

$$\mathbb{C}^n = V(z_1) \oplus \cdots \oplus V(z_k).$$

Consideremos agora o caso em que temos um operador

$$T\colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n,$$

tal que o polinômio característico $p_T(\lambda)$ de T possui raízes complexas. Ele não será, portanto, diagonalizável; mas podemos imaginar o operador T *como um operador de* $\mathbb{C}^n$, e podemos nos perguntar se (sobre $\mathbb{C}$) ele será diagonalizável. Em caso afirmativo, será que isso não nos permitirá obter alguma representação matricial de T (real) que seja útil?

Consideremos um operador linear $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Se fixarmos uma base (por exemplo, a base canônica Can), T pode ser descrito pela matriz associada

$$[T]_{Can} = (a_{ij}).$$

Assim,

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \right), \tag{2}$$

e podemos associar ao operador T o seu *complexificado*: trata-se de fazer T agir não mais nas n-uplas reais, mas nas n-uplas complexas, pela mesma regra dada em (2). Vamos denotar o complexificado de T por $T^c\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,

$$T^c(z_1, \ldots, z_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} z_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} z_j \right).$$

Aparentemente não aconteceu nada; em relação à base canônica de $\mathbb{C}^n$, a matriz de T^c será $[T]_{Can} = (a_{ij})$, ou seja

$$[T^c]_{Can} = [T]_{Can}.$$

Mas vejamos um exemplo:

EXEMPLO 2.2. *Seja $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ o operador definido por*

$$T(x, y) = (x - y, x + y).$$

Então

$$[T]_{Can} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

e o complexificado de T fica o operador de $\mathbb{C}^2$ definido por

$$T^c(z_1, z_2) = (z_1 - z_2, z_1 + z_2).$$

O polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = (1 - \lambda)^2 + 1$, que não possui raízes reais. Assim, o operador (real) T não possui autovalores nem autovetores. Mas pensando T como operador complexo, isto é, tomando o seu complexificado T^c, vemos que o seu polinômio característico (que é o mesmo de T) admite duas raízes complexas distintas:

$$\lambda_1 = 1 + i, \qquad \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 1 - i,$$

e portanto o operador T^c do $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ é diagonalizável.

DEFINIÇÃO 2.3. *Dizemos que um operador linear $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ é* **semisimples** *se o seu complexificado $T^c\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ for diagonalizável.*

Vimos acima que a matriz do complexificado T^c de um operador T na base canônica do $\mathbb{C}^n$ é a mesma matriz de T na base canônica do $\mathbf{R}^n$. Isso significa que o polinômio característico de T^c é igual ao polinômio característico de T e portanto tem coeficientes reais, de onde podemos deduzir que se T^c possui um autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ então o seu complexo conjugado $\bar{\lambda}$ também será autovalor de T^c. Isso acarreta que se $\varphi = (z_1, \ldots, z_n)$ é um autovetor de T^c associado à λ, então $\bar{\varphi} = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$ será autovetor de T^c, associado à $\bar{\lambda}$. De fato, se

$$T^c(\varphi) = \lambda\varphi, \qquad \varphi = (z_1, \ldots, z_n)$$

então, pela definição do complexificado,

$$T^c(z_1,\dots,z_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}z_j,\dots,\sum_{j=1}^{n} a_{nj}z_j\right) = \lambda(z_1,\dots,z_n),$$

e, se aplicarmos a conjugação complexa a ambos os lados da equação acima obteremos

$$T^c(\bar z_1,\dots,\bar z_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\bar z_j,\dots,\sum_{j=1}^{n} a_{nj}\bar z_j\right) = \bar\lambda(\bar z_1,\dots,\bar z_n),$$

pois $a_{ij}\in\mathbf{R}$, assim $T^c(\bar\varphi)=\bar\lambda\bar\varphi$.

Um caso particular do que foi visto acima é quando o autovalor, λ, de T^c for real. Nesse caso ele será autovalor de T e o autoespaço associado, $V(\lambda)$, será um subespaço de $\mathbf{R}^n$.

Uma observação simples é: se $T\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ já for diagonalizável, então T será semisimples, pois nesse caso todas as raízes do polinômio característico de T são reais e existe uma base $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ de $\mathbf{R}^n$ tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é diagonal. Observamos no Exemplo 1.8 que o conjunto $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ também é l.i. sobre $\mathbb{C}$ e portanto será uma base de $\mathbb{C}^n$ em relação a qual a matriz $[T^c]_{\mathcal{B}}$ será diagonal, ou seja T será semisimples.

Teorema 2.4. *Seja T um operador semisimples do $\mathbf{R}^n$. Suponhamos que o polinômio característico $p_T(\lambda)$ se fatore em $\mathbf{R}[\lambda]$ assim:*

$$p_T(\lambda)=\pm(\lambda-r_1)^{n_1}\cdots(\lambda-r_k)^{n_k}(\lambda^2+d_1\lambda+c_1)^{m_1}\cdots(\lambda^2+d_t\lambda+c_t)^{m_t},$$

onde $r_i\in\mathbf{R}$, $r_i\neq r_j$ se $i\neq j$ e os fatores quadráticos sejam irredutíveis e distintos, com raízes $\lambda_j=a_j+ib_j$ e $\bar\lambda_j$. Então existe uma base

$$\begin{aligned} B=\{&w_1^1,\dots,w_{n_1}^1,w_1^2,\dots,w_{n_2}^2,\dots w_1^k,\dots,w_{n_k}^k,\\ &u_1^1,v_1^1,\dots,u_{m_1}^1,v_{m_1}^1,\dots\dots u_1^t,v_1^t,\dots,u_{m_t}^t,v_{m_t}^t\}\end{aligned}$$

tal que $T(w_j^k)=r_kw_j^k$ e $T(u_i^j)=a_ju_i^j+b_jv_i^j$ e $T(v_i^j)=-b_ju_i^j+a_jv_i^j$.

Antes de provar o teorema, vejamos como fica a matriz de T nessa base:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} r_1 & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & r_k & & & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} & & & \\ & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & \begin{bmatrix} a_t & -b_t \\ b_t & a_t \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

Note-se que r_j aparece n_j vezes, e cada bloco

$$\begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}$$

aparece m_j vezes.

Prova do teorema 2.4: Como T é semisimples, o seu complexificado T^c é diagonalizável. Mas o polinômio característico de T^c é o mesmo de T. Assim, temos a decomposição de $\mathbb{C}^n$ na soma direta de autoespaços:

$$\mathbb{C}^n = V(r_1) \oplus \cdots \oplus V(r_k) \oplus V(\lambda_1) \oplus V(\bar{\lambda}_1) \oplus \cdots V(\lambda_t) \oplus V(\bar{\lambda}_t).$$

Ora, como $r_j \in \mathbf{R}$, podemos encontrar uma $\mathbb{C}$-base de $V(r_j)$ formada de vetores que estão em $\mathbf{R}^n$, pois como $r_j \in \mathbf{R}$ então r_j é autovalor de T e assim o autoespaço associado, $V(r_j) = [v_1^j, \ldots, v_{k_j}^j] \subset \mathbf{R}^n$ e o conjunto $\{v_1^j, \ldots, v_{k_j}^j\}$ é l.i. sobre $\mathbf{R}$. Pelo Exemplo 1.8 temos que $\{v_1^j, \ldots, v_{k_j}^j\}$ é l.i. sobre $\mathbb{C}$.

Chamando de $E^j = V(\lambda_j) \oplus V(\bar{\lambda}_j)$ podemos escolher uma base para E^j assim: tomamos $\{\phi_1^j, \ldots, \phi_{m_j}^j\}$ base de $V(\lambda_j)$ e completamos com os conjugados:

$$\{\phi_1^j, \ldots, \phi_{m_j}^j, \bar{\phi}_1^j, \ldots, \bar{\phi}_{m_j}^j\}.$$

É muito simples mostrar que esse conjunto é linearmente independente sobre $\mathbb{C}$. Vamos associar esses vetores da seguinte maneira:

$$E^j = [\phi_1^j, \bar{\phi}_1^j] \oplus \cdots \oplus [\phi_{m_j}^j, \bar{\phi}_{m_j}^j].$$

Chamando cada $[\phi_i^j, \bar{\phi}_i^j]$ de E_i^j, a decomposição de $\mathbb{C}^n$ acima pode ser escrita como

$$\mathbb{C}^n = V(r_1) \oplus \cdots \oplus V(r_k) \bigoplus_{i,j} E_i^j. \tag{3}$$

Já sabemos que cada $V(r_j)$ possui uma base com vetores em $\mathbf{R}^n$; se pudermos encontrar bases de E_i^j com vetores em $\mathbf{R}^n$, obteremos uma decomposição do $\mathbf{R}^n$ como uma soma direta de subespaços no máximo bidimensionais, onde a ação de T fica simples. O próximo lema garante que podemos escolher uma base $\{u_i^j, v_i^j\}$ para E_i^j com vetores no $\mathbf{R}^n$. Vamos assumir esse resultado e terminar a prova do teorema. Se cada somando direto da decomposição (3) possui uma base cujos vetores estão em $\mathbf{R}^n$, independentes sobre $\mathbb{C}$, com muito mais razão eles serão independentes sobre $\mathbf{R}$. Isso decompõe o $\mathbf{R}^n$ assim:

$$\mathbf{R}^n = V(r_1) \oplus \cdots V(r_k) \oplus \bigoplus_{i,j} [u_i^j, v_i^j].$$

O próximo lema mostra que cada subespaço $[u_i^j, v_i^j]$ é invariante sob T, com a ação de T especificada no enunciado. □

LEMA 2.5. *Se $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ é um operador cujo complexificado T^c possui um autovalor não real $\lambda = a + bi$ e se φ é um autovetor associado a λ, então o subespaço $E = [\varphi, \bar{\varphi}]$ de $\mathbb{C}^n$ possui uma base $\{u, v\}$ de vetores que estão em $\mathbf{R}^n$ e tais que*

$$T(u) = au + bv \qquad e \qquad T(v) = -bu + av.$$

Prova: Escrevemos $\varphi = u + iv$ (onde $u, v \in \mathbf{R}^n$) para o autovetor associado ao autovalor $\lambda = a + bi$. Então:

$$\begin{aligned} T^c(\varphi) &= T^c(u + iv) = T^c(u) + iT^c(v) = (a + bi)(u + iv) \\ &= (au - bv) + i(bu + av) \end{aligned}$$

donde $T^c(u) = au - bv$ e $T^c(v) = bu + av$. Como $u, v \in \mathbf{R}^n$ então $T^c(u) = T(u)$ e $T^c(v) = T(v)$. Se pusermos

$$u' = u, \qquad v' = -v,$$

teremos

$$\begin{aligned} T(u') &= T(u) = au - bv = au' + bv', \\ T(v') &= T(-v) = -bu - av = -bu' + av', \end{aligned}$$

ou seja, $\{u', v'\}$ tem a propriedade do enunciado.

Resta provar que $\{u, v\}$ (e portanto $\{u', v'\}$) é um conjunto linearmente independente. Se existirem escalares α, β não todos nulos, tais que

$$\alpha u + \beta v = 0,$$

então

$$\alpha\left(\frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}\right) + \beta\left(\frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2i}\right) = 0,$$

ou seja,

$$(\alpha - \beta i)\varphi + (\alpha + \beta i)\bar{\varphi} = 0.$$

Como φ e $\bar{\varphi}$ são autovetores associados a autovalores distintos, λ e $\bar{\lambda}$, eles são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$, donde $\alpha = \beta i$ e $\alpha = -\beta i$, e portanto $\alpha = \beta = 0$. Isso prova o lema. $\square$

3. Tres exemplos

Inicialmente consideremos o operador $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz na base canônica do $\mathbf{R}^3$ é:

$$[T]_{Can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2$, e suas raízes são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$ e $\lambda_3 = 1 - i$. Como essas raízes são distintas, o complexificado $T^c\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ é um operador diagonalizável. Vamos encontrar uma base $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ de $\mathbb{C}^3$ tal que

$$T^c(\phi_1) = \phi_1, \qquad T^c(\phi_2) = (1+i)\phi_2, \qquad T^c(\phi_3) = (1-i)\phi_3.$$

Vamos tomar ϕ_j um gerador conveniente de $\ker(T^c - \lambda_j I)$. Fazendo as contas:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (1, 1, 0) \\ \phi_2 &= (-i, 0, 1) = (0, 0, 1) + i(-1, 0, 0) \\ \phi_3 &= (i, 0, 1) = (0, 0, 1) - i(-1, 0, 0) \end{aligned}$$

Assim, $\mathbb{C}^3 = V(1) \oplus V(1+i) \oplus V(1-i)$. Vamos decompor $\mathbf{R}^3$ em subespaços invariantes sob T: $\mathbf{R}^3 = V(1) \oplus E_1^1$, conforme o teorema. Tomamos $V(1) = [\phi_1]$, (o colchete indica o subespaço *real* gerado por ϕ_1) e

$$E_1^1 = [(0,0,1), -(-1,0,0)].$$

Tomamos a base do $\mathbf{R}^3$ $D = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$. Nessa base temos

$$[T]_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos agora o operador $T\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$ cuja matriz na base canônica do $\mathbf{R}^3$ é:

$$[T]_{Can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)^2$, e suas raízes são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+i$ e $\lambda_3 = 1-i$, com

$$p_T(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-(1+i))^2(\lambda-(1-i))^2.$$

Dessa forma a multiplicidade algébrica de λ_2 e de λ_3 é 2. Vamos verificar se o complexificado $T^c\colon \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ é um operador diagonalizável. Calculamos:

$$V_{\mathbb{C}}(1) = ker(T^c - I) = [(1,1,0,0,1)],$$

$$V_{\mathbb{C}}(1+i) = ker(T^c-(1+i)I) = [(0,1,1+i,0,0),(0,0,0,1,i)]$$

e

$$V_{\mathbb{C}}(1-i) = ker(T^c-(1-i)I) = [(0,1,1-i,0,0),(0,0,0,1,-i)].$$

Concluímos assim que $\dim V_{\mathbb{C}}(1-i) = \dim V_{\mathbb{C}}(1+i) = 2$ e portanto T^c é diagonalizável, e então T é semisimples e assim,

$$\mathbb{C}^5 = V_{\mathbb{C}}(1) \oplus V_{\mathbb{C}}(1+i) \oplus V_{\mathbb{C}}(1-i).$$

Escrevendo:

$$\phi_1 = (1,1,0,0,1)$$
$$\phi_2 = (0,1,1+i,0,0) = (0,1,1,0,0) + i(0,0,1,0,0)$$
$$\phi_3 = (0,0,0,1,i) = (0,0,0,1,0) + i(0,0,0,0,1)$$

temos pelo teorema $E_1^2 = [\phi_2, \overline{\phi_2}]$ e $E_2^2 = [\phi_3, \overline{\phi_3}]$ então podemos decompor $\mathbf{R}^5$ em subespaços invariantes sob T:

$$\mathbf{R}^5 = V_{\mathbb{C}}(1) \oplus E_1^2 \oplus E_2^2,$$

conforme o teorema, onde tomamos $V_{\mathbb{C}}(1) = [(1,1,0,0,1)]$,
$E_1^2 = [(0,1,1,0,0), -(0,0,1,0,0)]$ e $E_2^2 = [(0,0,0,1,0), -(0,0,0,0,1)]$.
Construímos a base do $\mathbf{R}^5$:
$\mathcal{D} = \{(1,1,0,0,1), (0,1,1,0,0), (0,0,-1,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,-1)\}$.
Nessa base temos

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O próximo exemplo, um pouco mais complicado, foi elaborado com a ajuda do computador e ilustra como pode ser simplificada a representação de um operador linear semisimples. Consideremos o operador $T\colon \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^6$ cuja matriz na base canônica é:

$$[T]_{Can} = \begin{pmatrix} -103/21 & -327 & -103/21 & -36 & 142/7 & 206/21 \\ 221/21 & 83/7 & 137/21 & 86 & -332/7 & -442/21 \\ 76/21 & 23/7 & 76/21 & 24 & -92/7 & -152/21 \\ 17/21 & 1/7 & 17/21 & 1 & -4/7 & -13/21 \\ 2/3 & 1 & -1/3 & 7 & -4 & -4/3 \\ 9/7 & 9/7 & 9/7 & 9 & -29/7 & -18/7 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico desse operador é:

$$p_T(\lambda) = \lambda^6 - 5\lambda^5 + 11\lambda^4 - 15\lambda^3 + 14\lambda^2 - 10\lambda + 4.$$

Por inspeção peercebemos que $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$ são raízes. Assim, podemos escrever:

$$p_T(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda + 2).$$

O polinômio de grau 4 acima, por sua vez, pode ser fatorado como

$$(\lambda^2+1)(\lambda^2-2\lambda+2)$$

de onde temos a lista completa das raízes de $p_T(\lambda)$:

$$r_1=1,\quad r_2=2,\quad \lambda_1=i,\quad \bar{\lambda}_1,\quad \lambda_2=1+i,\quad \bar{\lambda}_2.$$

Como são raízes distintas, T é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$. Vamos encontrar os autoespaços. Sabemos que são todos unidimensionais, e podem ser encontrados resolvendo-se o sistema linear homogêneo

$$([T]_{Can}-\lambda I))=0.$$

Eis os resultados:

1. $\lambda=1$:

$$V(1)=[(-2,21/4,7/4,-3/8,-1/8,1)].$$

2. $\lambda=2$:

$$V(2)=[(-11/5,6,9/5,-1/5,1/5,1)]$$

3. $\lambda=i$:

$$V(i)=\left[\left(\frac{-144}{185}-\frac{172i}{185},\frac{103}{37}+\frac{85i}{37},\frac{211}{185}+\frac{103i}{185},\frac{-73}{370}+\frac{31i}{370},\frac{-27}{370}-\frac{199i}{370},1\right)\right].$$

4. $\lambda=1+i$:

$$V(1+i)=\left[(-109-40i,317+71i,96+19i,-16+7i,7+16i,61)\right].$$

Usando o lema 2.5, podemos montar a base real de $V(i)\oplus V(-i)$, tomando a parte real e o oposto da parte imaginária do autovetor complexo:

$$u^1=\left(\frac{-144}{185},\frac{103}{37},\frac{211}{185},\frac{-73}{370},\frac{-27}{370},1\right)$$
$$v^1=\left(\frac{172}{185},-\frac{85}{37},-\frac{103}{185},-\frac{31}{370},\frac{199}{370},0\right).$$

Fazendo a mesma coisa para $V(1+i)\oplus V(1-i)$ obtemos:

$$u^2=(-109,317,96,-16,7,61)$$
$$v^2=(40,-71,-19,-7,-16,0).$$

Podemos montar a base do $\mathbf{R}^6$ onde teremos a forma canônica de T:

$$
\begin{aligned}
w^1 &= (-2, 21/4, 7/4, -3/8, -1/8, 1)\\
w^2 &= (-11/5, 6, 9/5, -1/5, 1/5, 1)\\
u^1 &= \left(\frac{-144}{185}, \frac{103}{37}, \frac{211}{185}, \frac{-73}{370}, \frac{-27}{370}, 1\right)\\
v^1 &= \left(\frac{172}{185}, -\frac{85}{37}, -\frac{103}{185}, -\frac{31}{370}, \frac{199}{370}, 0\right)\\
u^2 &= (-109, 317, 96, -16, 7, 61)\\
v^2 &= (40, -71, -19, -7, -16, 0)
\end{aligned}
$$

Nessa base B a matriz do operador T fica:

$$
[T]_B = \begin{pmatrix}
1 & & & \\
 & 2 & & \\
 & & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \\
 & & & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{pmatrix}
$$

CAPíTULO 2

Equações Diferenciais Lineares

1. A equação mais simples

Todo estudande de cálculo já se deparou com o seguinte problema: dada uma função contínua $\varphi(x)\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, será que ela é a derivada de alguma função? Em outras palavras, será que existe uma função $f(x)$ tal que para todo $x \in \mathbf{R}$ tenhamos

$$f'(x) = \varphi(x) \ ? \tag{4}$$

Um caso particular importante é aquele em que φ é a função identicamente nula; a equação fica simplesmente

$$f'(x) = 0, \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

É claro que todas as funções constantes são solução dessa equação. Havería outras? O teorema do valor médio garante que não; se $f(x)$ é uma função derivável com derivada nula em todo ponto e se $a \in \mathbf{R}$, com $a \neq 0$, então

$$\frac{f(0) - f(a)}{0 - a} = f'(\bar{x})$$

para algum $\bar{x}$. Mas, por hipótese, $f'(\bar{x}) = 0$, ou seja, $f(0) = f(a)$. Como a percorre todos os reais não nulos podemos concluir que $f(x)$ tem que ser constante em $\mathbf{R}$.

No caso geral, o teorema fundamental do cálculo fornece a resposta: dada φ, a equação (4) possui como solução

$$f(x) = \int_c^x \varphi(\lambda) d\lambda,$$

onde c é um número real qualquer. O caso particular que fizemos acima permite afirmar que duas soluções quaisquer de (4) diferem por uma constante, ou seja, podemos fixar um $c \in \mathbf{R}$ e expressar o conjunto de todas as soluções como

$$f(x) = k + \int_c^x \varphi(\lambda) d\lambda \qquad k \in \mathbf{R}.$$

Assim, os teoremas básicos do cálculo diferencial nos permitiram resolver a mais simples das equações diferenciais:

TEOREMA 1.1. *Dada uma função contínua qualquer* $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$*, o conjunto de todas as soluções da equação*

$$f'(x) = \varphi(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R} \tag{5}$$

é dado por

$$f(x) = k + \int_a^x \varphi(\lambda)d\lambda,$$

onde k *percorre* $\mathbf{R}$ *(e* a *é um ponto qualquer de* $\mathbf{R}$ *fixado). Além disso, existe uma única função* $f(x)$ *que satisfaz (5) e verifica a condição incial* $f(x_0) = A$*, que é*

$$f(x) = A + \int_{x_0}^x \varphi(\lambda)d\lambda.$$

Prova: A única coisa que falta provar é a afirmação final. Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções que satisfazem (5) com $f(x_0) = g(x_0) = A$, então a diferença $h = f - g$ verifica: $h' = 0$. Isso significa que $h(x)$ é uma função constante. Como $h(x_0) = 0$, concluímos que h é a função nula. Assim, $f = g$ e temos o resultado. $\square$

2. A equação geral de ordem um

Podemos aumentar a complexidade da equação (4) da seguinte maneira:

$$f'(x) + af(x) = \varphi(x) \tag{6}$$

onde, como acima, procuramos uma $f(x)$ definida em toda a reta real, $a \in \mathbf{R}$ é uma constante fixada e $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é uma função contínua dada. Multiplicando a equação acima pela função e^{ax} obtemos:

$$f'(x)e^{ax} + af(x)e^{ax} = \varphi(x)e^{ax}, \tag{7}$$

e percebemos imediatamente que o lado esquerdo da igualdade acima pode ser escrito como

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)e^{ax}\right) = \varphi(x)e^{ax}.$$

Chamando $f(x)e^{ax}$ de $f_1(x)$, a equação acima fica

$$f_1'(x) = \varphi(x)e^{ax}.$$

Mas dessa equação nós já conhecemos todas as soluções:

$$f_1(x) = f(x)e^{ax} = k + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)e^{at}dt,$$

de onde concluímos:

$$f(x) = ke^{-ax} + e^{-ax}\int_{x_0}^{x} \varphi(t)e^{at}dt. \tag{8}$$

TEOREMA 2.1. *Se $a \in \mathbf{R}$ é uma constante fixada e $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é uma função contínua dada, então*

$$\begin{cases} f'(x) + af(x) = \varphi(x) \\ f(x_0) = A \end{cases}$$

tem uma única solução.

Prova: Vimos acima que $f(x)$ tem que ser da forma (8) para algum k. Então,

$$A = ke^{-ax_0},$$

de onde

$$f(x) = Ae^{-a(x-x_0)} + e^{-ax}\int_{x_0}^{x} \varphi(t)e^{at}dt.$$

Isso termina a prova do teorema. $\square$

Como ficam essas equações em termos de álgebra linear? O operador natural que deve ser considerado primeiro é o operador derivação:

$$D = \frac{d}{dx}.$$

Mas quais os espaços vetoriais devem ser considerados? Se $\varphi(x)$ for uma função infinitamente derivável, então existe um espaço natural: o de todas as funções $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que admitem derivadas de todas as ordens, $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$, pois nesse caso se $f(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$ então também $D(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$. Uma equação do tipo $f'(x)+af(x) = \varphi(x)$ podería ser escrita como

$$(D + aI)(f) = \varphi,$$

onde $(D + aI)\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R})$ é o operador linear

$$f(x) \mapsto f'(x) + af(x),$$

que é a soma dos operadores lineares D e aI, onde I é o operador identidade, $I(f) = f$.

Se φ for a função nula, resolver a equação é encontrar o núcleo do operador $(D+aI)$. Caso contrário, a equação terá solução caso φ esteja na imagem de $(D+aI)$.

A coisa complica um pouco caso φ não seja infinitamente derivável. Por exemplo, se quisermos resolver

$$f'(x) + 2f(x) = |x|,$$

já sabemos como fazê-lo: as soluções serão

$$f(x) = ce^{-2x} + e^{-2x}\int_0^x |t|e^{2t}dt,$$

de modo que $f(x)$ é derivável, mas sua derivada f' não é derivável na origem. Introduzimos os espaços: $\mathcal{C}^k(\mathbf{R};\mathbf{R})$ de todas as funções $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ que são deriváveis até ordem k, e cuja k-ésima derivada é contínua em $\mathbf{R}$. Se $k = 0$ trata-se apenas do espaço vetorial de todas as funções contínuas. Temos a cadeia de subespaços:

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R};\mathbf{R}) \subset \cdots \subset \mathcal{C}^2(\mathbf{R};\mathbf{R}) \subset \mathcal{C}^1(\mathbf{R};\mathbf{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathbf{R};\mathbf{R}),$$

que se relacionam com o operador $D = d/dx$ da seguinte maneira:

$$D\colon \mathcal{C}^k(\mathbf{R};\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^{k-1}(\mathbf{R};\mathbf{R}).$$

De fato, D aplicado a uma função de $\mathcal{C}^k(\mathbf{R};\mathbf{R})$ produz uma função $D(f)$ que pode não estar mais nesse espaço. Porém certamente $D(f)$ estará em $\mathcal{C}^{k-1}(\mathbf{R};\mathbf{R})$, que é um espaço maior. Assim, uma equação $f'(x) + af(x) = \varphi(x)$ com $\varphi \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R};\mathbf{R})$ tem solução se φ estiver na imagem do operador linear

$$(D + aI)\colon \mathcal{C}^{k+1}(\mathbf{R};\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^k(\mathbf{R};\mathbf{R}).$$

Os nossos resultados anteriores podem ser resumidos no seguinte teorema:

TEOREMA 2.2. *Se $a \in \mathbf{R}$ então a transformação linear*

$$(D + aI)\colon \mathcal{C}^{k+1}(\mathbf{R};\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^k(\mathbf{R};\mathbf{R}),$$

é sobrejetora e seu núcleo tem e^{ax} por base.

3. Funções a valores complexos

Vamos fazer uma pequena ampliação nas nossas equações, permitindo que a constante a acima seja um número complexo – e consequentemente, a função $f(x)$ que satisfaz o problema $f'(x) + af(x) = \varphi(x)$

será uma função de variável *real* x que assume valores complexos: $f\colon \mathbf{R} \to \mathbb{C}$.

Como todo número complexo $z = u + iv$ possui uma parte real u e uma parte imaginária v, toda função $f(x)$ que assume valores complexos pode ser escrita como

$$f(x) = u(x) + iv(x),$$

onde $u, v\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ são duas funções de variável real a valores *reais.* As funções $u(x)$ e $v(x)$ são chamadas, respectivamente, de a *parte real* e a *parte imaginária* de $f(x)$. Dizemos que $f(x)$ é derivável se a sua parte real e a sua parte imaginária forem deriváveis e, nesse caso, escrevemos

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

Da mesma maneira, dizemos que $f(x)$ é integrável se $u(x)$ e $v(x)$ forem integráveis, e escrevemos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

Uma outra observação preliminar muito simples concerne à derivada do produto de duas funções a valores complexos:

Lema 3.1. *Se $f = u + iv$ e $g = s + it$ então:*

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Prova: Escrevemos o produto

$$fg = (u + iv)(s + it) = us - vt + i(ut + vs),$$

de onde, por definição,

$$\begin{aligned}(fg)' &= (us - vt)' + i(ut + vs)' \\ &= u's + us' - (v't + vt') + i(u't + ut' + v's + vs') \\ &= (u' + iv')(s + it) + (u + iv)(s' + it') \\ &= f'g + fg'.\end{aligned}$$

Isso termina a prova do lema. □

Se $f(x)$ é uma função que assume valores complexos, podemos inicialmente considerar a equação mais simples

$$f'(x) = 0.$$

Em termos das partes real e imaginária de $f(x)$, essa equação se escreve como $u'(x) = 0$ e $v'(x) = 0$. Pelo nosso estudo do caso real, sabemos que as únicas soluções dessas duas equações reais são as soluções constantes. Isso acarreta que $f(x) = k_1 + ik_2$, ou seja: $f(x)$ tem que ser uma função constante.

Do mesmo modo a equação

$$f'(x) = \varphi(x),$$

onde $\varphi(x)\colon \mathbf{R} \to \mathbb{C}$ é uma função contínua dada, $\varphi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$, se traduz em

$$u'(x) = \phi_1(x), \qquad v'(x) = \phi_2(x),$$

de onde deduzimos que

$$f(x) = k + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt,$$

para $k \in \mathbb{C}$.

Até aqui foi tudo muito fácil: o caso complexo não apresentou ne nhuma diferença notável com o caso real! Apenas separamos o pro blema complexo em dois problemas reais independentes (considerando as partes real e imaginária) cujas soluções conhecíamos.

Vejamos como fica o próximo caso mais simples, o da equação

$$f'(x) = \lambda f(x), \tag{9}$$

com $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $f(x) = u(x) + iv(x)$ e $\lambda = a + ib$ então a equação acima se escreve:

$$u'(x) + iv'(x) = au(x) - bv(x) + i(av(x) + bu(x)),$$

de onde obtemos o *sistema* de equações reais:

$$\begin{aligned} u'(x) &= au(x) - bv(x) \\ v'(x) &= bu(x) + av(x) \end{aligned}$$

que não sabemos (por enquanto) resolver. Parece que a situação se complicou demais!

Por outro lado, em completa analogia com o caso real, uma solução $f(x)$ da equação (9) devería ser do tipo

$$f(x) = ke^{\lambda x} = ke^{(a+ib)x} \qquad k \in \mathbb{C}.$$

Como definir uma *exponencial complexa*? Uma exigência fundamental para uma tal exponencial é que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\right) = \lambda e^{\lambda x}. \tag{10}$$

Ora, quando λ é *real*, uma propriedade crucial para a validade dessa exigência é a equação funcional

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

Vamos então nos guiar por essa equação funcional e buscar uma definição de exponencial complexa que a respeite. Assim, para definir e^{a+ib}, basta definir e^{bi}, pois queremos

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib}.$$

Repare o leitor que estamos também exigindo implicitamente que, na nossa nova definição de exponencial, quando o argumento for real, então a nova função deve coincidir com a exponencial usual.

Escrevendo as partes real e imaginária: $e^{ib} = c(b) + is(b)$, vejamos o que acarreta a equação funcional

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$$

em termos das funções c e s:

$$c(a+b) + is(a+b) = \left(c(a) + is(a)\right)\left(c(b) + is(b)\right),$$

ou seja:

$$\begin{aligned} c(a+b) &= c(a)c(b) - s(a)s(b) \\ s(a+b) &= c(a)s(b) + s(a)c(b) \end{aligned}$$

Mas nós conhecemos – desde muito tempo – um par de funções que verificam as equações acima: $c(x) = cos(x)$ e $s(x) = sen(x)$. As equações acima nada mais são que as fórmulas de adição de arcos da trigonometria!

Com isso podemos arriscar uma definição de exponencial complexa:

$$e^{a+ib} = e^a cos(b) + ie^a sen(b). \tag{11}$$

É claro que o leitor tem o direito de se perguntar se as fórmulas de adição de arcos vão se traduzir na condição de derivabilidade (10). A resposta é muito simples: com a exponencial (11), construímos a função

$$f(x) = (c_1 + ic_2)e^{(a+ib)x}$$

com $x \in \mathbf{R}$, onde $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$. Então

$$\begin{aligned} f(x) &= (c_1 + ic_2)e^{ax}\,(cos(bx) + isen(bx)) \\ &= c_1e^{ax}cos(bx) - c_2e^{ax}sen(bx) \\ &\quad + i\,(c_2e^{ax}cos(bx) + c_1e^{ax}sen(bx)) \end{aligned}$$

e, como as partes real e imaginária são deriváveis, temos que $f(x)$ é derivável e que (verifique!) $f'(x) = (a + ib)f(x)$. Pondo $f(x) = u(x) + iv(x)$, então

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1e^{ax}cos(bx) - c_2e^{at}sen(bx) \\ v(x) &= c_2e^{ax}cos(bx) + c_1e^{at}sen(bx) \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, são soluções reais do sistema:

$$\begin{aligned} u'(x) &= au(x) - bv(x) \\ v'(x) &= bu(x) + av(x). \end{aligned}$$

Podemos então resumir a nossa discussão:

LEMA 3.2. *Seja $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ e consideremos a equação $f'(x) = \lambda f(x)$. Então as únicas soluções dessa equação são:*

$$f(x) = ke^{\lambda x},$$

onde $k \in \mathbb{C}$.

Prova: Só falta provar a unicidade. Seja $\psi(x)$ uma solução qualquer dessa equação, isto é: $\psi'(x) = \lambda\psi(x)$. Considerando $g(x) = \psi(x)e^{-\lambda x}$ vemos que $g(x)$ é derivável e que, pelo lema 3.1

$$g'(x) = \psi'(x)e^{-\lambda x} + \psi(x)(-\lambda)e^{\lambda x},$$

ou seja, $g'(x) = 0$, de onde $g(x) = k$ e o lema está provado! $\square$

CAPíTULO 3

Sistemas de Equações Diferenciais

Neste capítulo vamos estudar a resolução do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$
(12) \qquad \begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t)\\
x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t)
\end{aligned}
$$

onde a_{ij} são números reais fixados e as incógnitas são n funções

$$x_j(t) \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

que satisfazem (12). É conveniente escrever o sistema acima na forma matricial, pondo $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^t$ e $A = (a_{ij})$:

$$(13) \qquad X'(t) = AX(t).$$

1. Sistemas diagonais

Se tivermos um sistema de equações do tipo

$$
\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}
$$

com condição inicial $(y_1(t_0), \ldots, y_n(t_0)) = (k_1, \ldots, k_n)$ então cada linha do sistema é independente das demais e podemos resolver sem problemas:

$$y_j(t) = k_j e^{a_j(t-t_0)}.$$

Se no sistema $X'(t) = AX(t)$ a matriz A for diagonalizável, então existe uma base $\mathcal{B}$ do $\mathbf{R}^n$ e uma matriz $M = [I]_{\mathcal{B},Can}$ tais que

$$D = Diag(a_1, \ldots, a_n) = M^{-1}AM,$$

o que nos dá esperança de passar o vetor de incógnitas para a base $\mathcal{B}$, resolver o sistema na forma diagonal e voltar para a base canônica. Pomos

$$Y(t) = [I]_{Can,\mathcal{B}}\, X(t) = M^{-1}X(t).$$

Então,

$$Y'(t) = M^{-1}X'(t) = M^{-1}AX(t) = M^{-1}AMY(t)$$

ou seja, o sistema inicial

$$X'(t) = AX(t), \qquad X(t_0) = X_0$$

se transforma no sistema (na base $\mathcal{B}$)

$$Y'(t) = DX(t), \qquad Y(t_0) = Y_0$$

onde $D = M^{-1}AM$ e $Y_0 = M^{-1}X_0$.

Vejamos o seguinte exemplo. Consideramos o sistema:
$X'(t) = AX(t)$, onde $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^t$ e

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

com a condição inicial $X(0) = (1, 0, 3)^t$.
O polinômio característico de A é $p_A(\lambda) = -\lambda^3 - 13\lambda^2\lambda - 27$, e suas raízes são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ e $\lambda_3 = 9$. Como essas raízes são distintas, a matriz A é diagonalizável.
A base de $\mathbf{R}^3, \mathcal{B} = \{(7, 1, 2), (3, 3, -2), (1, 1, 2)\}$ e a matriz:

$$M = [I]_{\mathcal{B},Can} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

são tais que $D = M^{-1}AM$ onde

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

A mudança de coordenadas:

$$X(t) = MY(t)$$

resulta no sistema: $Y' = DY$, ou seja,

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 3y_1(t) \\ y_2'(t) &= y_2(t) \\ y_3'(t) &= 9y_3(t) \end{aligned}$$

que sabemos resolver:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{3t} \\ y_2(t) &= c_2 e^{t} \\ y_3(t) &= c_3 e^{9t} \end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$. A solução geral do sistema dado é $X(t) = MY(t)$ onde $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ e

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 7c_1 e^{3t} + 3c_2 e^{t} + c_3 e^{9t} \\ x_2(t) &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{9t} \\ x_3(t) &= c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{t} + 2c_3 e^{9t} \end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$. A solução que satisfaz a condição inicial é:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{7}{8} e^{3t} - \frac{9}{8} e^{t} - e^{9t} \\ x_2(t) &= \frac{1}{8} e^{3t} - \frac{3}{8} e^{t} - e^{9t} \\ x_3(t) &= \frac{1}{8} e^{3t} + \frac{3}{4} e^{t} - 2e^{9t} \end{aligned}$$

2. Sistemas semisimples

Consideremos agora um sistema do tipo (12) onde a matriz $A = (a_{ij})$ é uma matriz semisimples. Sabemos que existe uma matriz inversível P tal que $S = P^{-1}AP$, onde S é uma matriz da forma

$$S = \begin{pmatrix} r_1 & & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & r_k & & & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} & & & \\ & & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & \begin{bmatrix} a_t & -b_t \\ b_t & a_t \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

O sistema original $X'(t) = AX(t)$ se transforma no sistema $Y'(t) = SY(t)$ por meio da mudança de variáveis $X(t) = PY(t)$, da seguinte maneira:

$$X'(t) = AX(t) = S(P^{-1}X(t)),$$

chamando de $Y(t) = P^{-1}X(t)$ vemos que

$$Y'(t) = P^{-1}X'(t)$$

e assim temos o sistema $Y'(t) = SY(t)$. Ora, os blocos 2×2 da matriz S acima fornecerão sistemas bidimensionais do tipo

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= ay_1(t) - by_2(t) \\ y_2'(t) &= by_1(t) + ay_2(t) \end{aligned}$$

onde $b \neq 0$, cuja solução, que foi vista no final do capítulo 2, é:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1e^{at}cos(bt) - c_2e^{at}sen(bt), \\ y_2(t) &= c_2e^{at}cos(bt) + c_1e^{at}sen(bt), \end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Vejamos um exemplo em dimensão 5. Consideramos o sistema $X'(t) = AX(t)$ onde $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_5(t))^t$ e

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 & -8 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 3 & -2 & -8 & 4 \\ -7 & -1 & -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico dessa matriz é

$$p_A(\lambda) = -\lambda^5 + 5\lambda^4 - 15\lambda^3 + 25\lambda^2 - 24\lambda + 10$$

e verificamos facilmente que $\lambda = 1$ é solução. Não é difícil verificar que essa é a única solução real. Isso significa que $p_A(\lambda)$ é o produto de $(\lambda - 1)$ por dois fatores de grau 2 irredutíveis sobre $\mathbf{R}$. De fato

$$p_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 5),$$

e portanto as raízes são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$, $\lambda_4 = 1 + 2i$, $\lambda_5 = 1 - 2i$. Como as raízes são distintas, o complexificado de A é diagonalizável sobre os complexos, ou seja, A define um operador real semisimples. Sabemos que existe uma base de $\mathbf{R}^5$ onde a matriz do operador $T\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$ definido por A via $T(v) = Av$, é

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em termos matriciais existe uma matriz inversível P tal que $S = P^{-1}AP$. Achemos P. Encontramos uma base de $\mathbb{C}^5$, como $\mathbb{C}$-espaço vetorial, formada por autovetores do complexificado do operador T: $Av_1 = v_1$, $Av_2 = (1 - i)v_2$, $Av_3 = (1 + i)v_3$, $Av_4 = (1 - 2i)v_4$, $Av_5 = (1 + 2i)v_5$

$$\begin{aligned} &v_1 = (1, 0, 1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 1 - i, -1 - i, 1, 1) \\ &v_3 = (0, 1 + i, -1 + i, 1, 1), \quad v_4 = (-1 + i, 0, 0, -1 + i, 1) \\ &v_5 = (-1 - i, 0, 0, -1 - i, 1). \end{aligned}$$

Podemos então encontrar a base $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ de $\mathbf{R}^5$ em relação a qual o operador T tem a forma matricial S:

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1 = (1,0,1,1,0),\\
w_2 &= Re(v_3) = (0,1,-1,1,1),\\
w_3 &= -Im(v_3) = (0,-1,-1,0,0),\\
w_4 &= Re(v_5) = (-1,0,0,-1,1),\\
w_5 &= -Im(v_5) = (1,0,0,1,0).
\end{aligned}$$

Montamos agora a matriz de mudança de base dessa nova base $\mathcal{B}$ para a base canônica, Can, do $\mathbf{R}^5$:

$$P = [I]_{\mathcal{B},Can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A inversa de P é:

$$P^{-1} = [I]_{Can,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos $[T]_{\mathcal{B}} = [I]_{Can,\mathcal{B}}[T]_{Can}[I]_{Can,\mathcal{B}}$, ou seja: $S = P^{-1}AP$. A mudança de coordenadas

$$X(t) = PY(t),$$

vai resultar no sistema $Y'(t) = SY(t)$, ou seja:

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= y_1(t)\\
y_2'(t) &= y_2(t) - y_3(t)\\
y_3'(t) &= y_2(t) + y_3(t)\\
y_4'(t) &= y_4(t) - 2y_5(t)\\
y_5'(t) &= 2y_4(t) + y_5(t)
\end{aligned}$$

Note-se que a primeira equação é independente das demais, a segunda e a terceira equações formam um subsistema independente, e as duas últimas também. Sabemos como resolvê-los:

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= c_1 e^t, \\
y_2(t) &= c_2 e^t cos(t) - c_3 e^t sen(t), \\
y_3(t) &= c_3 e^t cos(t) + c_2 e^t sen(t), \\
y_4(t) &= c_4 e^t cos(2t) - c_5 e^t sen(2t), \\
y_5(t) &= c_5 e^t cos(2t) + c_4 e^t sen(2t),
\end{aligned}
$$

com $c_1, c_2, c_3\, c_4, c_5 \in \mathbf{R}$. A solução geral do sistema original é dada por $X(t) = PY(t)$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= e^t[c_1 + c_4(sen(2t) - cos(2t)) + c_5(sen(2t) + cos(2t))], \\
x_2(t) &= e^t[c_2(cos(t) - sen(t)) - c_3(sen(t) + cos(t))], \\
x_3(t) &= e^t[c_1 - c_2(cos(t) + sen(t)) + c_3(sen(t) - cos(t))], \\
y_4(t) &= e^t[c_1 + c_2 cos(t) - c_3 sen(t) + c_4(sen(2t) - cos(2t)) + c_5(cos(2t) - sen(2t))], \\
y_5(t) &= e^t[c_2 cos(t) - c_3 sen(t) + c_4 cos(2t) - c_5 sen(2t)],
\end{aligned}
$$

com $c_1, c_2, c_3\, c_4, c_5 \in \mathbf{R}$.

Exercício 2.1. *Resolva o sistema $X' = AX$, onde A é a mesma matriz acima, com a condição inicial $X(0) = (1, 1, 0, 1, 0)^t$.*

Vejamos mais um exemplo em dimensão 5. Consideramos o sistema $X'(t) = AX(t)$ onde $X(t) = (x_1(t), \dots, x_5(t))^t$ e

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Vimos no parágrafo **3.** do capítulo 1 que a matriz A é semisimples e que a matriz:

$$
P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
$$

é tal que $S = P^{-1}AP$ onde

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A mudança de coordenadas

$$X(t) = PY(t),$$

vai resultar no sistema $Y' = SY$, ou seja:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) \\ y_2'(t) &= y_2(t) - y_3(t) \\ y_3'(t) &= y_2(t) + y_3(t) \\ y_4'(t) &= y_4(t) - y_5(t) \\ y_5'(t) &= y_4(t) + y_5(t) \end{aligned}$$

Note-se que a primeira equação é independente das demais, a segunda e a terceira equações formam um subsistema independente. Sabemos como resolvê-los:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1e^t, \\ y_2(t) &= c_2e^tcos(t) - c_3e^tsen(t), \\ y_3(t) &= c_3e^tcos(t) + c_2e^tsen(t), \\ y_4(t) &= c_4e^tcos(t) - c_5e^tsen(t), \\ y_5(t) &= c_5e^tcos(t) + c_4e^tsen(t). \end{aligned}$$

com $c_1, c_2, c_3\, c_4, c_5 \in \mathbf{R}$. A solução geral do sistema original é dada por $X(t) = PY(t)$.

Exercício 2.2. *Resolva o sistema $X' = AX$, onde A é a mesma matriz acima, com a condição inicial $X(0) = (1, 1, 1, 1, 1)^t$.*

3. Sistemas Dinâmicos Discretos

A conhecida sequência $\{x_n\}$ de Fibonacci:

$$1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 5,\ \ 8,\ \ 13,\ \ 21, \ldots$$

obedece a seguinte equação de recorrência:

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1},$$

onde $n \geq 1$ e $x_0 = x_1 = 1$. Vamos usar a teoria das formas canônicas de operadores para mostrar que vale a fórmula:

$$x_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Observamos inicialmente que se fizermos a mudança de variáveis $y_n = x_{n-1}$ obteremos o sistema:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

onde temos a condição inicial: $x_1 = y_1 = 1$. Matricialmente temos

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

de modo que se introduzirmos o operador $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (x + y, x),$$

cuja matriz na base canônica é a matriz acima, o sistema pode ser reescrito como

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = T(x_n, y_n).$$

Começando em $(1, 1)$, vamos aplicando T sucessivamente, de modo que

$$(x_n, y_n) = \underbrace{(T \circ T \circ \cdots \circ T)}_{(n-1) vezes}(1, 1).$$

Matricialmente temos

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, para compreender a trajetória do ponto $(1, 1)$ sob a ação do operador T, precisamos calcular as potências, A^m, da matriz A. Vamos fazer algumas observações gerais: suponhamos que A é uma matriz de ordem n. Se M é uma matriz inversível tal que $B = M^{-1}AM$ então

$$\begin{aligned} B^m &= (M^{-1}AM)(M^{-1}AM)\cdots(M^{-1}AM) \\ &= M^{-1}A(MM^{-1})A(MM^{-1})A(M\cdots M^{-1})A(MM^{-1})AM \\ &= M^{-1}A^mM, \end{aligned}$$

ou seja, se $B = M^{-1}AM$ então $A^m = MB^mM^{-1}$. No caso em que A é diagonalizável existe M inversível tal que

$$B = M^{-1}AM = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

e assim, $A^m = MDiag(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m)M^{-1}$.

Para o sistema de Fibonacci acima, o polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é: $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$, cujas raízes são

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Como essas raízes são reais e distintas, A é diagonalizável. Vamos achar a base $\{v_1, v_2\}$ do $\mathbf{R}^2$, formada por autovetores de A.

É fácil verificar que o autoespaço de λ_1 é gerado por $(\lambda_1, 1)$, e o autoespaço de λ_2 é gerado por $(\lambda_2, 1)$. Assim,

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (\lambda_1, 1), \ \ v_2 = (\lambda_2, 1)\}.$$

Definindo o operador $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ por $T(v) = Av$, temos que na base canônica, Can, do $\mathbf{R}^2$ a matriz de T é a própria A e na base $\mathcal{B}$ a matriz de T é $Diag(\lambda_1, \lambda_2)$, ou seja

$$Diag(\lambda_1, \lambda_2) = [I]_{Can,\mathcal{B}}A[I]_{\mathcal{B},Can}.$$

Se pusermos

$$M = [I]_{\mathcal{B},Can} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$M^{-1} = [I]_{Can,\mathcal{B}} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

de modo que para todo natural $m \geq 1$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 \\ 0 & \lambda_2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{m+1} & \lambda_2^{m+1} \\ \lambda_1^m & \lambda_2^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^{m+1} - \lambda_2^{m+1} & -\lambda_1^{m+1}\lambda_2 + \lambda_2^{m+1}\lambda_1 \\ \lambda_1^m - \lambda_2^m & -\lambda_1^m\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^m \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e, em particular,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^n - \lambda_2^n & -\lambda_1^n\lambda_2 + \lambda_2^n\lambda_1 \\ \lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1} & -\lambda_1^{n-1}\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e portanto

$$x_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n - \lambda_2\lambda_1^n + \lambda_1\lambda_2^n}{\sqrt{5}},$$

de onde tiramos, lembrando que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\lambda_1^n(1-\lambda_2) - \lambda_2^n(1-\lambda_1)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

que é a fórmula que queríamos demonstrar.

A sequência de Fibonacci $\{x_n\}$ possui uma propriedade muito interessante: a sequência

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_n}{y_n}$$

dos quocientes sucessivos, é uma sequência convergente para λ_1. Vejamos alguns valores

$$\begin{gathered} \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{3}{2} = 1,5, \quad \frac{5}{3} = 1.666, \quad \frac{8}{5} = 1.6 \\ \frac{13}{8} = 1.625, \quad \frac{21}{13} = 1.615, \quad \frac{34}{21} = 1,619, \quad \frac{55}{34} = 1.617. \end{gathered}$$

Para entendermos bem o que está ocorrendo, começamos com uma observação muito simples: se ao invés da condição inicial $(1,1)$ começássemos com v_j $(j=1,2)$ então a nova sequência (x_n, y_n) seria:

$$v_j, \;\; \lambda_j v_j, \;\; \lambda_j^2 v_j, \;\; \lambda_j^3 v_j, \ldots.$$

Como

$$\lambda_1 = 1.6180..., \qquad \lambda_2 = -0.6180...$$

ou seja, $|\lambda_1| > 1$ e $|\lambda_2| < 1$, o autoespaço $V(\lambda_1) = [v_1]$ é *repulsor*, no sentido de que qualquer condição inicial não nula que esteja em $V(\lambda_1)$ tende a se afastar da origem, indo para infinito; o autoespaço $V(\lambda_2) = [v_2]$ é *atrator*, pois o sistema tende para a origem, quando a condição inicial está em $V(\lambda_2)$. Como $\{v_1, v_2\}$ é base do $\mathbf{R}^2$, a condição inicial $(1,1)$ se decompõe em $\alpha v_1 + \beta v_2$, de modo que

$$(x_n, y_n) = \alpha \lambda_1^{n-1} v_1 + \beta \lambda_2^{n-1} v_2,$$

e, como λ_2^{n-1} tende à zero quando n tende à infinito, o ponto (x_n, y_n) vai ficando cada vez mais próximo da reta $[v_1]$, que tem por equação $y = (1/\lambda_1)x$. Assim, x_n/y_n vai se aproximando cada vez mais de λ_1.

Isso significa que a sequência de Fibonacci $\{x_n\}$ vai se tornando cada vez mais parecida com uma progressão geométrica de razão λ_1 (o número áureo!), quando n vai crescendo.

Podemos tratar da mesma maneira equações de recorrência mais gerais:

$$x(n+1) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_k x(n-k),$$

onde $x(n)$ é um número real, $b_1, \ldots, b_k$ são constantes, e é dada a condição inicial: $x_0 = a_0, \ldots, x_k = a_k$. A mudança de variáveis fica:

$$\begin{aligned} &y_1(n) = x(n), \\ &y_2(n) = x(n-1), \\ &y_3(n) = x(n-2), \\ &\vdots \\ &y_{k+1}(n) = x(n-k) \end{aligned}$$

e o sistema discreto associado:

$$
\begin{aligned}
&y_1(n+1) = b_0 y_1(n) + b_1 y_2(n) + \cdots + b_k y_{k+1}(n) \\
&y_2(n+1) = y_1(n) \\
&y_3(n+1) = y_2(n) \\
&\vdots \\
&y_{k+1}(n+1) = y_k(n).
\end{aligned}
$$

Observação. 3.1. *No caso de um sistema $X_{n+1} = AX_n$, onde A é uma matriz de ordem k com coeficientes reais e $X_n = (x_n^1, \ldots, x_n^k)^t$, se A for diagonalizável com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, então, como os autovalores são reais, podemos dividí-los em grupos:*

$$
\begin{aligned}
\Lambda_a &= \{\lambda_j \ : \ |\lambda_j| < 1\} \\
\Lambda_r &= \{\lambda_j \ : \ |\lambda_j| > 1\} \\
\Lambda_1 &= \{\lambda_j \ : \ \lambda_j = 1\} \\
\Lambda_{-1} &= \{\lambda_j \ : \ \lambda_j = -1\}
\end{aligned}
$$

Se E_a é o subespaço gerado por autovetores associados aos autovalores de Λ_e então E_a é o subespaço atrator do sistema, no sentido de que toda condição inicial em E_a tende ao vetor nulo de $\mathbf{R}^k$. Se E_r é o subespaço gerado por autovetores associados aos autovalores de Λ_r então E_r é o subespaço repulsor do sistema, no sentido de que toda condição inicial em E_r tende ao infinito em norma.

Denotando por E_1 o subespaço gerado por autovetores associados aos autovalores de Λ_1, temos que todo ponto de E_1 fica fixo. Denotando por E_{-1} o subespaço gerado por autovetores associados aos autovalores de Λ_{-1} temos que se $u \in E_{-1}$, é a condição inicial do sistema, então sua trajetória sob o sistema acima será: $u, -u, u, -u, \ldots$, ou seja, o sistema ficará oscilando.

O que acontece se A não for diagonalizável? Responderemos essa pergunta pelo menos no caso em que A é semisimples. Basta observar que se B é a forma canônica semisimples então B é diagonal por blocos,

$$B = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, B_1, \ldots, B_s),$$

onde $\lambda_j \in \mathbf{R}$ e

$$B_j = \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{bmatrix},$$

e portanto (prove como exercício!) temos

$$B^m = Diag(\lambda_1^m, \dots, \lambda_r^m, B_1^m, \dots, B_s^m).$$

Assim, para entender o sistema $X_n = AX_{n-1}$ basta entender o sistema bidimensional

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n - by_n \\ y_{n+1} &= bx_n + ay_n. \end{aligned}$$

Se escrevermos o ponto (a, b) em coordenadas polares

$$a = rcos(\theta), \qquad b = rsen(\theta),$$

onde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ a matriz desse sistema fica:

$$B = r \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix},$$

de onde, como já provamos no capítulo 1,

$$B^m = r^m \begin{bmatrix} cos(m\theta) & -sen(m\theta) \\ sen(m\theta) & cos(m\theta) \end{bmatrix}$$

e aplicar B^m a uma condição inicial (x, y) corresponde a multiplicar o número complexo $x + iy$ pelo número complexo $(a + ib)^m$. Assim, se $|a + ib| < 1$, o sistema tende à zero, espiralando em torno da origem. Se $|a + ib| > 1$ o sistema vai espiralando para infinito. Se $|a + ib| = 1$ temos duas possibilidades: 1) $\lambda = a + ib$ é uma raiz da unidade, ou seja, $\lambda^k = 1$ para algum k natural. Nesse caso o sistema vai produzir uma órbita periódica de período k, qualquer que seja a condição inicial não nula e 2) $\lambda = a + ib$ não é uma raiz da unidade e a órbita será densa na circunferência cuja raio é a norma da condição inicial.

4. Matrizes Estocásticas

Consideremos a seguinte (hipotética) situação de migração entre as regiões nordeste, sul e sudeste: anualmente 10% e 20% da população do nordeste migram, respectivamente, para o sul e para o sudeste; 5% e 10% da população do sudeste migram, respectivamente, para o sul e para o nordeste. E também, 6% e 2% da população do sul migram, respectivamente, para o sudeste e para o nordeste. Se essas taxas migratórias se mantiverem assim ao longo dos anos, o que acontecerá com as populações das três regiões? Podemos prever o desaparecimento do Nordeste? Existirá algum comportamento periódico?

Vamos denotar por $x(k)$, $y(k)$ e $z(k)$, respectivamente, as populações do nordeste, do sudeste e do sul, no ano $k \geq 0$. Então as populações no ano $k+1$ dependem das populações no ano k segundo o sistema:

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= 0.7x(k) + 0.10y(k) + 0.02z(k) \\
y(k+1) &= 0.20x(k) + 0.85y(k) + 0.06z(k) \\
z(k+1) &= 0.10x(k) + 0.05y(k) + 0.92z(k)
\end{aligned}$$

Se denotarmos por $p(k+1)$ o vetor $(x(k+1), y(k+1), z(k+1))^t$ e por T a matriz do sistema,

$$T = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.10 & 0.02 \\ 0.20 & 0.85 & 0.06 \\ 0.10 & 0.05 & 0.92 \end{pmatrix},$$

o sistema acima se escreve simplesmente como $p(k+1) = Tp(k)$, e, claramente

$$p(n) = T^n p(0).$$

O polinômio característico de T é

$$p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 2.47\lambda^2 - 1.996\lambda + 0.526,$$

e suas raízes são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.8542$ e $\lambda_3 = 0.6157$. Como as raízes são reais e distintas, T é diagonalizável, e os autoespaços de T são

$$\begin{aligned}
V(\lambda_1) &= [(0.26, 0.63, 0.72)] \\
V(\lambda_2) &= [(-0.25, -0.54, 0.79)] \\
V(\lambda_3) &= [(-0.77, 0.61, 0.15)]
\end{aligned}$$

Assim, $\mathbf{R}^3 = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus V(\lambda_3)$ e podemos escrever a matriz de mudança de bases:

$$M = \begin{pmatrix} 0.26 & -0.25 & -0.77 \\ 0.63 & -0.54 & 0.61 \\ 0.72 & 0.79 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

Temos $T = MDM^{-1}$, onde

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8542 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6157 \end{pmatrix}$$

e, portanto, $T^n = MD^nM^{-1}$. Como queremos descobrir o comportamento a longo prazo (supondo que as taxas migratórias não se alteram), podemos escrever:

$$\begin{aligned} p(\infty) &= \lim_{n\to\infty} T^n p(0) = \lim_{n\to\infty}(MD^nM^{-1})p(0) \\ &= M(\lim_{n\to\infty} D^n)M^{-1}p(0) \\ &= M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M^{-1}p(0) \\ &= \begin{pmatrix} 0.16 & 0.16 & 0.16 \\ 0.39 & 0.39 & 0.39 \\ 0.45 & 0.45 & 0.45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como interpretar o resultado? Se N denotar a soma das três populações no ano inicial $k = 0$, então a população do nordeste será 16% de N, a do sudeste será 39% de N e a do sul será 45% de N.

Observações: 1) O leitor atento deve ter percebido que a soma das três populações é constante; as únicas variações populacionais se devem às migrações.

2) A matriz T do sistema é uma matriz cujas entradas são não negativas e a soma dos elementos de cada coluna é 1. Uma matriz com essas duas propriedades é chamada uma **matriz estocástica**.

3) Se A é uma matriz estocástica, então $\lambda = 1$ é um autovalor de M. De fato, como cada coluna tem soma unitária, o vetor $\mathbf{u} = (1, 1, ..., 1)^t$ verifica $A^t\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Ou seja, 1 é autovalor de A^t, e, portanto, de A.

CAPíTULO 4

Exercícios

1. Usando a fórmula de Moivre calcule:

(a) $(1+i)^{2006}$
(b) $(cos(\pi/3) + isen(\pi/3))^{315}$

2. Calcule $e^{2+\pi i}$, $e^{-\pi i}$, e^{3+i}.

3. Determine todos os números complexos z com $|z| = 1$ tais que $z^2 + (1+i)z$ seja puramente imaginário.

4. Seja $a = r(cos\theta + isen\theta)$ um número complexo não nulo. Mostre que os números

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta + 2k\pi}{n})\right]$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, são os únicos números complexos tais que $z_k^n = a$.

5. Será verdade que

$$\left(e^{a+bi}\right)^{1/2} = e^{(a+bi)/2}?$$

6. Determine as raízes n-ésimas da unidade, isto é, os complexos z tais que $z^n = 1$.

7. Seja $\zeta = cos(2\pi/n) + isen(2\pi/n)$, onde $n \geq 1$ é um natural fixado.
(a) Mostre que $\{1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}\}$ é o conjunto de todas as raízes n-ésimas da unidade.
(b) Mostre que $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$.

8. Descreva geometricamente o conjunto de todos os números complexos z tais que

$$|z| \leq 1 - \mathrm{Re}(z),$$

onde $\mathrm{Re}(z)$ denota a parte real de z.

9. Ache as soluções (na forma $a + bi$) das seguintes equações:
(a) $x^2 + ix + 1 = 0$
(b) $x^4 + x^2 + 1 = 0$

10. Seja $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o operador linear tal que

$$[P]_{Can} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix},$$

onde $Can = \{1, i\}$.
(a) Ache uma expressão para $P(z)$.
(b) Interprete geometricamente a ação de P.
(c) Calcule $P^{1000}(z)$, onde P^n denota a composta de P com P n vezes, $P^n = \underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{n\ vezes}$.

11. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.
(a) Se $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ é um operador linear cujo polinômio característico tem raízes não reais então T é semisimples.
(b) O operador linear $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ cuja matriz na base canônica de $\mathbf{R}^2$ é

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

é um operador semisimples.
(c) O conjunto $\{a + bi \in \mathbb{C} \ : \ e^{a+bi} = i\}$ é um conjunto finito.

12. Considere o operador $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que o operador T é semisimples.
(b) Ache uma base $\mathcal{B}$ do $\mathbf{R}^3$ na qual a matriz de T esteja na forma semisimples.
(c) Exiba $[T]_{\mathcal{B}}$ e ache uma matriz N tal que $NAN^{-1} = [T]_{\mathcal{B}}$.
(d) Calcule A^{102}.

13. Considere o operador linear $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^5$ cuja matriz na base canônica é:

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e cujo polinômio característico é

$$p_T(\lambda) = -(1+\lambda^2)(1+\lambda)(\lambda-1)^2$$

(a) Mostre que T é um operador semisimples.
(b) Ache uma base $\mathcal{B}$ do $\mathbf{R}^5$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ esteja na forma semisimples.
(c) Exiba uma matriz M tal que $[T]_{\mathcal{B}} = M^{-1}[T]_{can}M$.
(d) Calcule $[T]_{can}^{2006}$.

14. Considere o operador $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

e cujo polinômio característico é $p_T(\lambda) = (\lambda^2+1)^2$.
(a) Mostre que o operador T é semisimples.
(b) Ache uma base $\mathcal{B}$ do $\mathbf{R}^4$ na qual a matriz de T esteja na forma semisimples e exiba $[T]_{\mathcal{B}}$.
(c) Calcule A^{500}.

15. Determine os valores de $a \in \mathbf{R}$ para os quais o operador linear $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz na base canônica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

é diagonalizável; é semisimples.

16. Resolva o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 2x_1(t) + 5x_2(t) \\ x_2'(t) &= -x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned}$$

satisfazendo às condições iniciais $x_1(0) = 2$ e $x_2(0) = 2$.

17. Resolva o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_2(t) \\ x_2'(t) &= 13x_1(t) + 4x_2(t) \end{aligned}$$

satisfazendo às condições iniciais $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 1$.

18. Exiba todas as funções $x_j : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $j = 1, 2, 3$ que verificam o sistema: (Ache a solução geral do sistema:)

$$\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_2(t) + x_3(t) \end{cases}$$

19. Resolva o sistema $X'(t) = AX(t)$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

sabendo que $p_A(t) = -(t-1)(t^2 - 2t + 2)^2$.

20. Considere o operador linear $T\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ cuja matriz na base canônica é:

$$[T]_{Can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Dê a expressão de $T^c(z_1, \ldots, z_4)$, onde T^c é o complexificado de T.
(b) Mostre que T é um operador semisimples.
(c) Exiba uma base $\mathcal{B}$ do $\mathbf{R}^4$ onde $[T]_{\mathcal{B}}$ esteja na forma semisimples.
(d) Exiba uma matriz M tal que $[T]_{\mathcal{B}} = M[T]_{Can}M^{-1}$.
(e) Resolva o sistema $X' = [T]_{Can}X$ com $X(0) = (1, 1, 1, 1)^t$.

21. Considere o operador linear $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz na base canônica é:

$$[T]_{Can} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que T é um operador semisimples.
(b) Exiba uma base $\mathcal{B}$ do $\mathbf{R}^3$ onde $[T]_{\mathcal{B}}$ esteja na forma semisimples.
(d) Exiba uma matriz M tal que $[T]_{\mathcal{B}} = M[T]_{Can}M^{-1}$.
(e) Resolva o sistema $X' = [T]_{Can}X$ com $X(0) = (1,1,1)^t$.

22. Considere o operador linear $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz na base canônica é:

$$[T]_{Can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que T é um operador semisimples.
(b) Exiba uma base B do $\mathbf{R}^3$ onde $[T]_B$ esteja na forma semisimples.
(c) Exiba uma matriz M tal que $[T]_B = M[T]_{Can}M^{-1}$.
(d) Resolva o sistema $X' = [T]_{Can}X$ com $X(0) = (1,1,1)^t$.

23. Dê um exemplo de um operador $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ que não é semisimples.

24. Existe algum exemplo de operador $T\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ que não seja semisimples e $p_T(\lambda)$ tenha raízes não reais?

25. Dê um exemplo de um operador $T\colon \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ que não seja semisimples e tal que $p_T(\lambda)$ não possua nenhuma raiz real.

26. Resolva a equação diferencial complexa $x'(t) = (1+i)x(t)$, com $x(0) = i$. Ache todas as soluções do sistema de equações *reais*:

$$u'(t) = u(t) - v(t)$$
$$v'(t) = u(t) + v(t)$$

27. Resolva o sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -2x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \end{aligned}$$

com condição inicial $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = 2$.

28. Resolva o sistema de equações diferenciais:

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} X(t),$$

onde $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^t$, com a condição inicial $X(0) = (10, 1, 1)^t$.

29. Um sistema físico pode ser descrito pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X(t),$$

onde $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^t$, onde ε é um parâmetro real.
(a) Como se comportam as soluções quando $\varepsilon < -2\sqrt{2}$? Mostre que existe um plano π do $\mathbf{R}^3$ tal que se $X(0) \in \pi$ as soluções do sistema tendem à zero quando t tende à infinito.
(b) Quando $\varepsilon = \sqrt{8}$ o sistema é diagonalizável?
(c) Encontre as soluções do sistema para $\varepsilon = \sqrt{8}$.
(d) Como são as soluções quando $-\sqrt{8} < \varepsilon < 0$? Existe algum plano π como no item (a)?
(e) Ache as soluções para $\varepsilon = 0$.
(f) Ache as soluções para $0 < \varepsilon < \sqrt{8}$.
(g) Ache as soluções para $\varepsilon > \sqrt{8}$.

30. Considere o sistema dinâmico discreto

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= -3x_1(n) - 2x_2(n) \\ x_2(n+1) &= 5x_1(n) + 3x_2(n) \end{aligned}$$

(a) Encontre a solução geral, $X(n) = (x_1(n), x_2(n))^t$ em função da condição inicial $X(0) = (a, b)^t$.
(b) Se $X(0) = (1, 1)$ então $X(1) = (-5, 8)$, $X(2) = (-1, -1)$, $X(3) = (5, -8)$ e $X(4) = (1, 1)$, de modo que a trajetória é periódica. O que ocorre com uma condição inicial qualquer $X(0) = (a, b)$?

31. [**École Polytechnique**] Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) A é diagonalizável?
(b) Calcule A^n para todo natural $n \geq 1$.
(c) Calcule A^n para $n \in \mathbf{Z}$.

1. Soluções e/ou sugestões dos exercícios anteriores

1. $(1+i)^{2006} = 2^{1003}i$, $(cos(\pi/3) + isen(\pi/3))^{315} = -1$

2. $e^{2+\pi i} = -e^2 i$, $e^{-\pi i} = -i$, $e^{3+i} = e^3(cos1 + isen1)$.

3. $z = \pm i$ ou $z = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i)$.

5. Faça as contas com $a + bi = -\pi i$ e veja o que acontece.

8. Se $z = x + iy$, a parábola $2x = 1 - y^2$ divide o plano complexo em duas componentes. A solução é a componente que contém $z = 0$, incluindo a parábola.

10. $P(z) = (1 + i\sqrt{3})z$, $P^{1000}(z) = -2^{999}(1 + i\sqrt{3})z$.

11. (a)verdadeira, (b)falsa, (c)falsa.

12. Autovalores de T^c: $-1, i, -i$. Autovetores correspondentes: $(1, 0, 0), (2i, -1-i, 1), (-2i, -1+i, 1)$.$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1), (-2, 1, 0)\}$.

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = [I]_{Can,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$[T]_{\mathcal{B}}^{102} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{102} = N^{-1}[T]_{\mathcal{B}}^{102}N.$$

13. Autovalores de T^c: $1, i, -i, -1$ Autovetores correspondentes: $(1,0,0,0,0), (0,1,1,1,1), (0,-1,i,-i,1), (0,-1,-i,i,1)(0,1,-1,1,1)$.
$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0,0), (0,1,1,1,1), (0,-1,0,0,1), (0,0,-1,1,0)(0,1,-1,1,1)\}$.

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M = [I]_{\mathcal{B},can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[T]_{\mathcal{B}}^{2006} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T]_{can}^{2006} = M^{-1}[T]_{\mathcal{B}}^{2006}M.$$

14. Autovalores de T^c: $i, -i$, ambos com mutiplicidade algébrica 2. $V(i) = [(0, 1+i, 0, 2), (-i, 1-i, 1, 0)]$.
$\mathcal{B} = \{(0,1,0,2), (0,-1,0,0), (0,1,1,0), (1,1,0,0)\}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{500} = Id.$$

15. Se $a > 3$ ou $a < -1$, T é diagonalizável. Se $-1 < a < 3$, T é semisimples. Se $a = -1$ ou $a = 3$, T não é diagonalizável nem é semisimples.

16. $x_1(t) = e^{3t}(2cos2t + 4sen2t) \quad x_2(t) = 2e^{3t}cos2t.$

17. $x_1(t) = e^{2t}(cos3t - sen3t) \quad x_2(t) = e^{2t}(cos3t + 5sen3t).$

18. $x_1(t) = ke^{3t} - e^t((4c_1 + 3c_2)cost + (3c_1 - 4c_2)sent),$
$x_2(t) = -5e^t(c_2cost + c_1sent), \;\; x_3(t) = 5e^t(c_1cost - c_2sent).$

19. $x_1(t) = ke^t,$
$x_2(t) = e^t(k + (c_1 + c_3 + c_4)cost + (c_2 + c_4 + c_3)sent),$
$x_3(t) = e^t(c_3cost - c_4sent),$
$x_4(t) = e^t(c_2cost + c_1sent),$

$x_5(t) = e^t(k + c_1 cost - c_2 sent)$.

20. $T^c(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1, z_2 - 2z_3, z_1 + 2z_2 + z_3, 3z_4)$.
Autovalores de T^c: $1, 1 + 2i, 1 - 2i$ e 3.
Autovetores correspondentes: $(-2, 1, 0, 0), (0, -i, 1, 0), (0, i, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$.
$\mathcal{B} = \{(-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad M = [I]_{Can,\mathcal{B}}.$$

$x_1(t) = e^t, \;\; x_2(t) = e^t + (\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}cos2t + sen2t)$,
$x_3(t) = e^t(cos2t - \frac{3}{2}sen2t), \;\; x_4 = e^{3t}$.

21. $p_T(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 17\lambda + 15$. Autovalores de T^c: $2 + i, 2 - i, 3$. Autovetores correspondentes: $(6 + 3i, -5 - i, 1), (6 - 3i, -5 + i, 1), (5, -4, 1)$.

22. $p_T(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Autovalores de T^c: $1, -i\sqrt{2}, i\sqrt{2}$.
Autovetores correspondentes: $(1, 0, 0), (-1/3 + i\sqrt{2}/3, -i\sqrt{2}, 1), (-1/3 - i\sqrt{2}/3, -i\sqrt{2}, 1)$.

26. $x(t) = e^t(-sent + icost)$,
$u(t) = e^t(c_1 cost - c_2 sent), \;\; v(t) = e^t(c_2 cost + c_2 sent)$.

27. $x_1(t) = e^t(cost - 4sent), \;\; x_2(t) = e^t(2cost + 3sent)$.

28. $x_1(t) = 10e^t, \;\; x_2(t) = -3e^t + e^{2t}(4cos3t - 2sent)$,
$x_3(t) = -e^t + e^{2t}(2cos3t + 4sen3t)$.

31. Depois que os métodos habituais falharem, observe que $A = I + N$ onde I é a matriz identidade e $N^3 = 0$. Observe também que $IN = NI$. Para o item final note que

$$(I + N)(I - N + N^2) = I - N^3 = I.$$