Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Geometria Analítica Básica

03/01/2013 - GGM - UFF
Dirce Uesu Pesco

CÔNICAS

- Equação geral do segundo grau a duas variáveis x e y

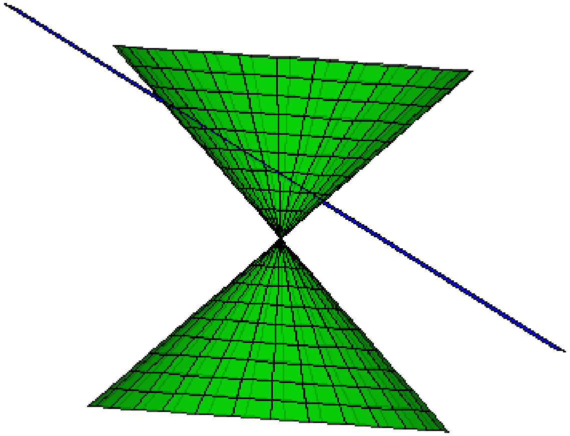
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (*)$$

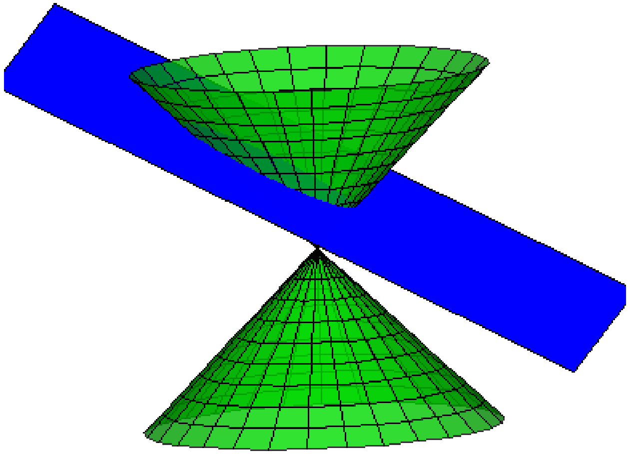
onde A, B e C não são simultaneamente nulos

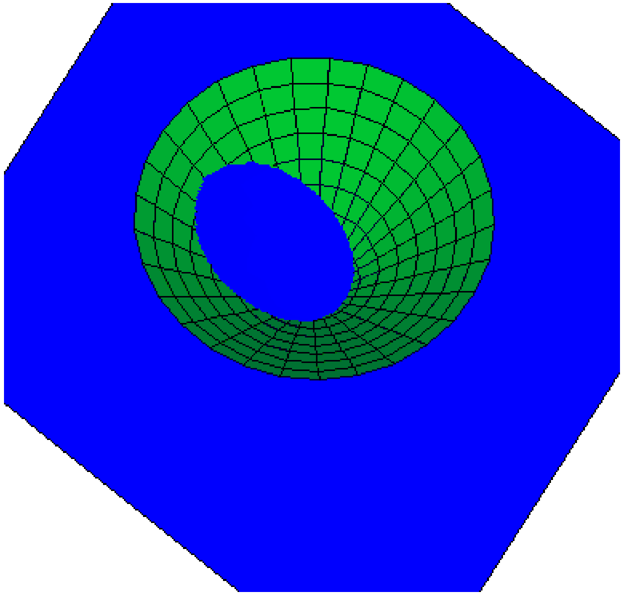
- Se A=B=C=0, então Dx + E y + F = 0 , equação da reta no plano.
- Caso I : *B=0*
- Caso II $B \neq 0$

CÔNICAS

ELIPSE







CÔNICAS

ELIPSE

Cônicas– Elipse

Definição:

Uma elipse é o conjunto dos pontos P(x,y) do planos tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos, F_1 e F_2 , situados no mesmo plano, é constante.

Cônicas– Elipse

Definição:

Uma elipse é o conjunto dos pontos P(x,y) do planos tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos, F_1 e F_2 , situados no mesmo plano, é constante.

Elipsedefinicao.ggb

CÔNICAS– ELIPSE

Definição:

Uma elipse é o conjunto dos pontos P(x,y) do planos tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos, F_1 e F_2 , situados no mesmo plano, é constante.

Seja 2c a distância entre F_1 e F_2 (distância focal)

Cônicas– Elipse

Definição:

Uma elipse é o conjunto dos pontos P(x,y) do planos tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos, F_1 e F_2 , situados no mesmo plano, é constante.

Seja 2c a distância entre F_1 e F_2 (distância focal)

Se P é um ponto qualquer, então:

$$\left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\|$$ (desigualdade triangular)

CÔNICAS– ELIPSE

<u>Definição:</u>

Uma elipse é o conjunto dos pontos P(x,y) do planos tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos, F_1 e F_2 , situados no mesmo plano, é constante.

Seja 2c a distância entre F_1 e F_2 (distância focal)

Se P é um ponto qualquer, então:

$$\left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\|$$ (desigualdade triangular)

Se 2a > 2c >0 , ou seja, a>c, a equação de uma elipse de focos F_1 e F_2 é:

Cônicas– Elipse

Definição:

Uma elipse é o conjunto dos pontos P(x,y) do planos tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos, F_1 e F_2 , situados no mesmo plano, é constante.

Seja 2c a distância entre F_1 e F_2 (distância focal)

Se P é um ponto qualquer, então:

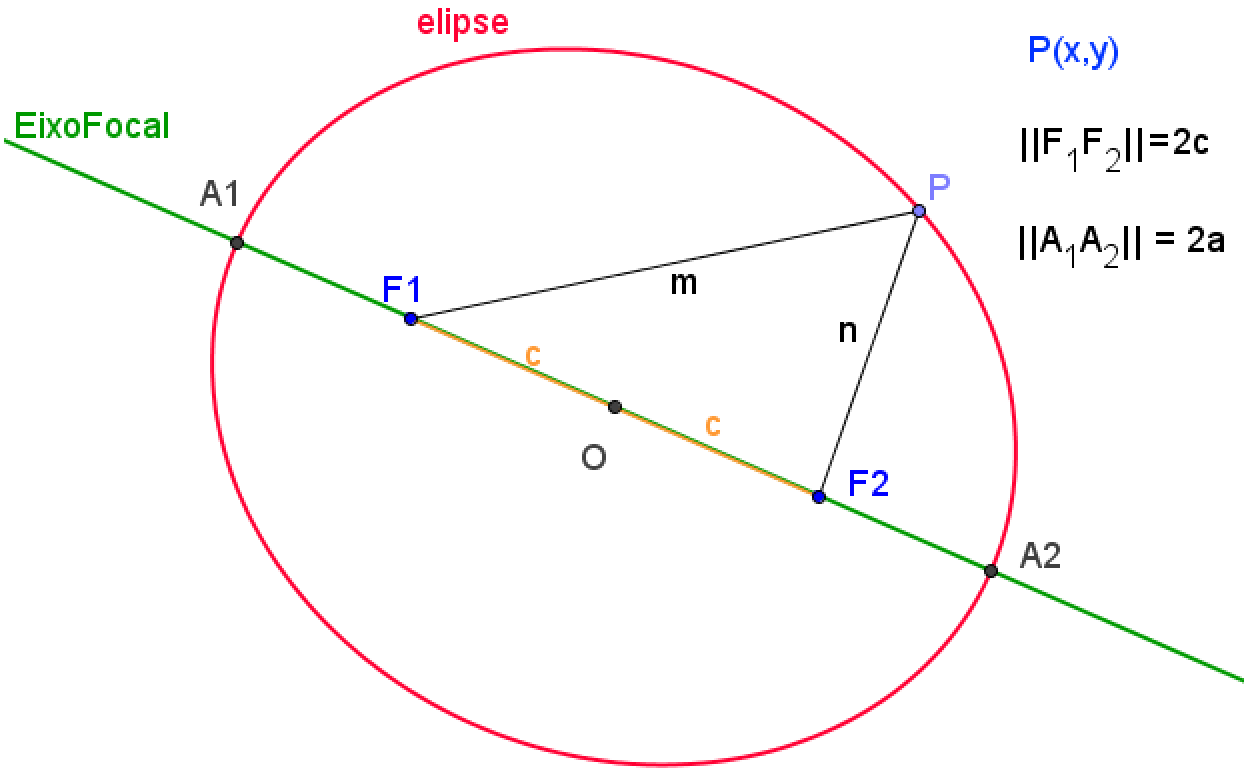
$$\left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\|$$ (desigualdade triangular)

Se 2a > 2c >0 , ou seja, a>c, a equação de uma elipse de focos F_1 e F_2 é:

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 2a \quad (1)$$

Cônicas– Elipse

O ponto médio do segmento F_1F_2 é o *centro* da elipse



$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 2a \quad (1)$$

Cônicas– Elipse

Para determinar a equação da elipse, considere a elipse no sistema de coordenadas cartesiano.

Cônicas– Elipse

Para determinar a equação da elipse, considere a elipse no sistema de coordenadas cartesiano.

Se a>c > 0 , P(x,y) ponto da elipse e os focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, então o centro da elipse é C(0,0) e substituindo em

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 2a$$

Cônicas– Elipse

Para determinar a equação da elipse, considere a elipse no sistema de coordenadas cartesiano.

Se a>c > 0 , P(x,y) ponto da elipse e os focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, então o centro da elipse é C(0,0) e substituindo em

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Cônicas– Elipse

Para determinar a equação da elipse, considere a elipse no sistema de coordenadas cartesiano.

Se a>c > 0 , P(x,y) ponto da elipse e os focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, então o centro da elipse é C(0,0) e substituindo em

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Cônicas – Elipse

Para determinar a equação da elipse, considere a elipse no sistema de coordenadas cartesiano.

Se a>c > 0 , P(x,y) ponto da elipse e os focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, então o centro da elipse é C(0,0) e substituindo em

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

Cônicas– Elipse

Para determinar a equação da elipse, considere a elipse no sistema de coordenadas cartesiano.

Se a>c > 0 , P(x,y) ponto da elipse e os focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, então o centro da elipse é C(0,0) e substituindo em

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\Rightarrow$$

Cônicas– Elipse

Para determinar a equação da elipse, considere a elipse no sistema de coordenadas cartesiano.

Se a>c > 0 , P(x,y) ponto da elipse e os focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, então o centro da elipse é C(0,0) e substituindo em

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Cônicas– Elipse

Para determinar a equação da elipse, considere a elipse no sistema de coordenadas cartesiano.

Se a>c > 0 , P(x,y) ponto da elipse e os focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, então o centro da elipse é C(0,0) e substituindo em

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(cx-a^2)^2 = (-a\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 \Rightarrow$$

CÔNICAS– ELIPSE

$$(cx - a^2)^2 = (-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2$$

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$(a^2 - c^2)a^2 = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2$$

Como a > c > 0 $\Rightarrow$ $a^2 - c^2 > 0$ existe um número real b, tal que

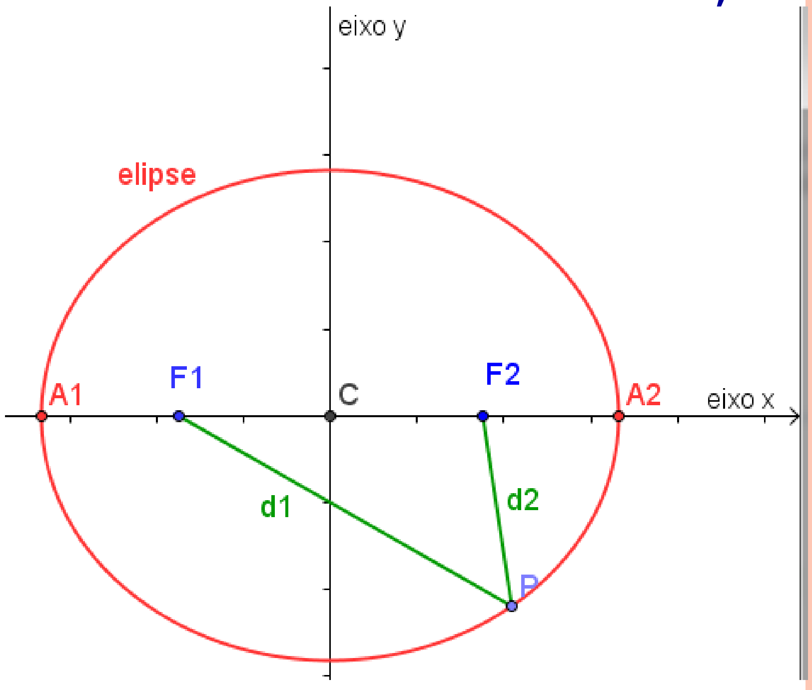
$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 = a^2$$

$$b^2a^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

ou

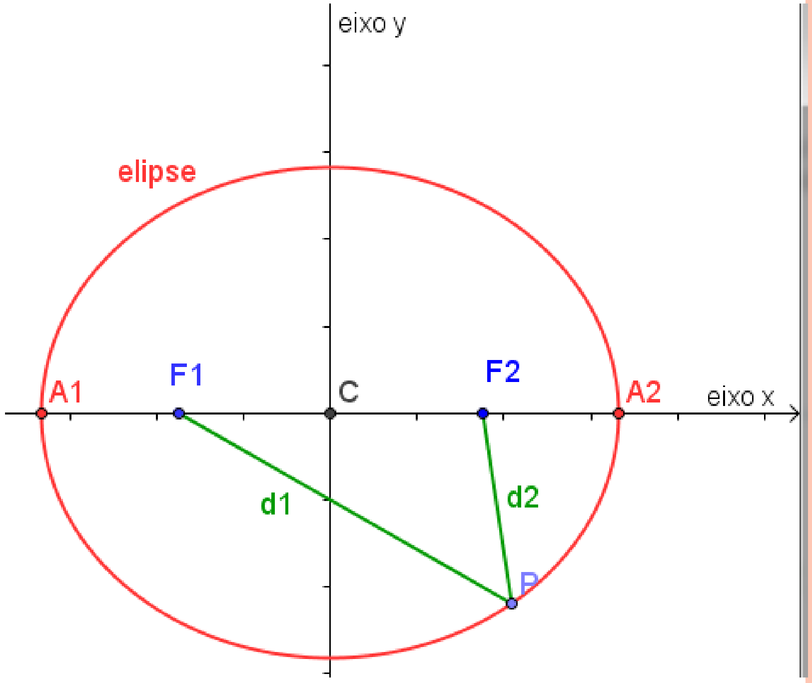
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

forma canônica ou reduzida



Cônicas– Elipse

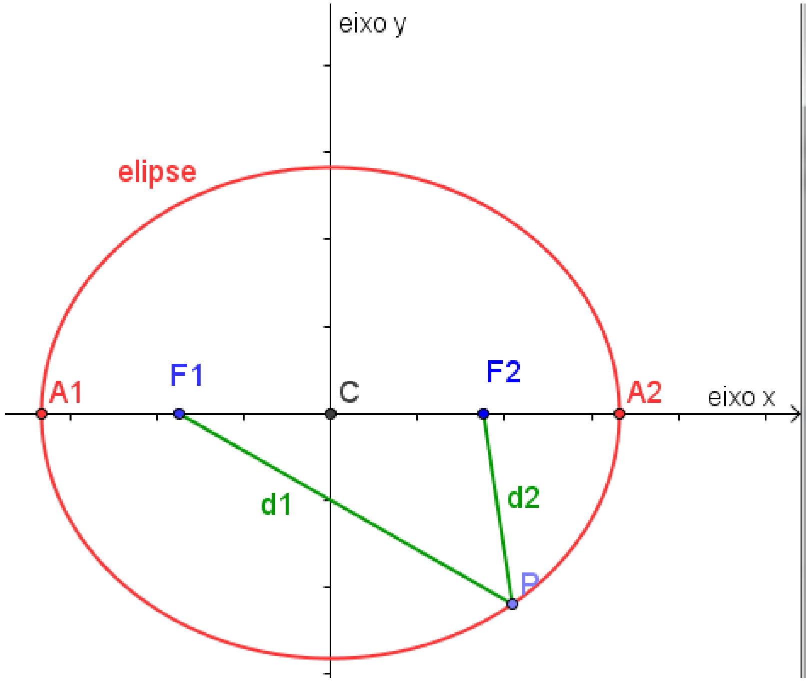
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$, forma canônica ou reduzida da elipse



CÔNICAS– ELIPSE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$, forma canônica ou reduzida da elipse

Elipse de centro C(0,0)

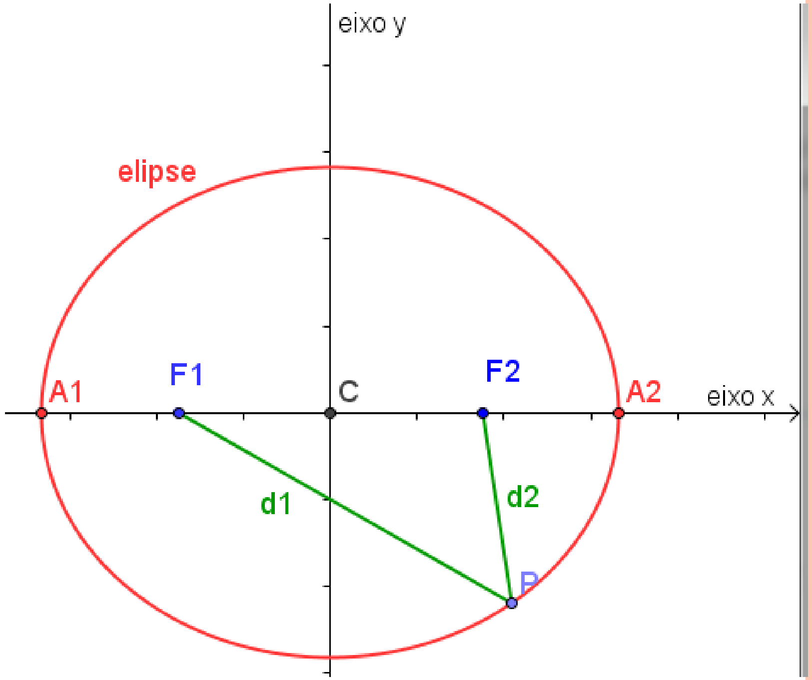


CÔNICAS– ELIPSE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$, forma canônica ou reduzida da elipse

Elipse de centro C(0,0)

focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$



CÔNICAS– ELIPSE

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$, forma canônica ou reduzida da elipse

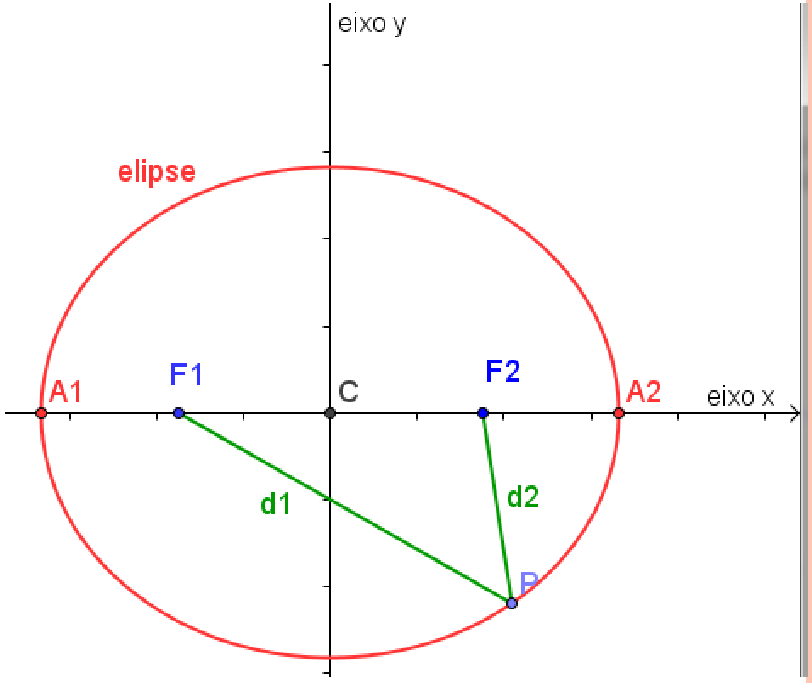
Elipse de centro C(0,0)

focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$

Vértices :

$A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$

$B_1(0, -b), B_2(0, b)$

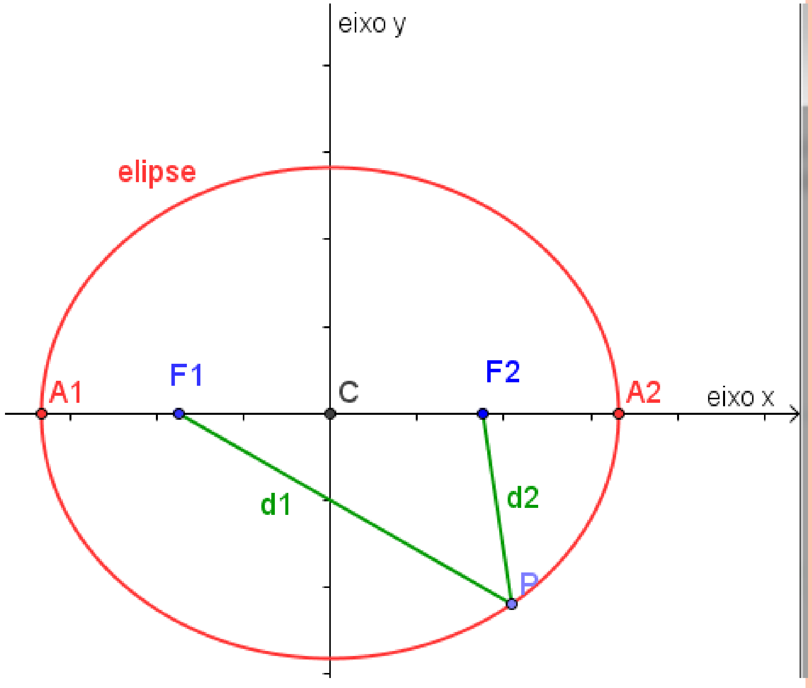


CÔNICAS– ELIPSE

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, forma canônica ou reduzida da elipse

Elipse de centro C(0,0)

focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$



Vértices :

$A_1(-a,0), A_2(a,0)$

$B_1(0,-b), B_2(0,b)$

$b^2 + c^2 = a^2$

CÔNICAS– ELIPSE

De maneira análoga, determine a equação da elipse cujos focos são $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$ e a soma dos raios focais é 2a .

Se 2a > 2c >0 , ou seja, a>c,

a equação de uma elipse de

focos F_1 e F_2 é:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (2)$$

$A_1(0,-a), A_2(0,a)$

$B_1(-b,0), B_2(b,0)$

Faça figura no Geogebra

CÔNICAS– ELIPSE

De maneira análoga, determine a equação da elipse cujos focos são $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$ e a soma dos raios focais é 2a .

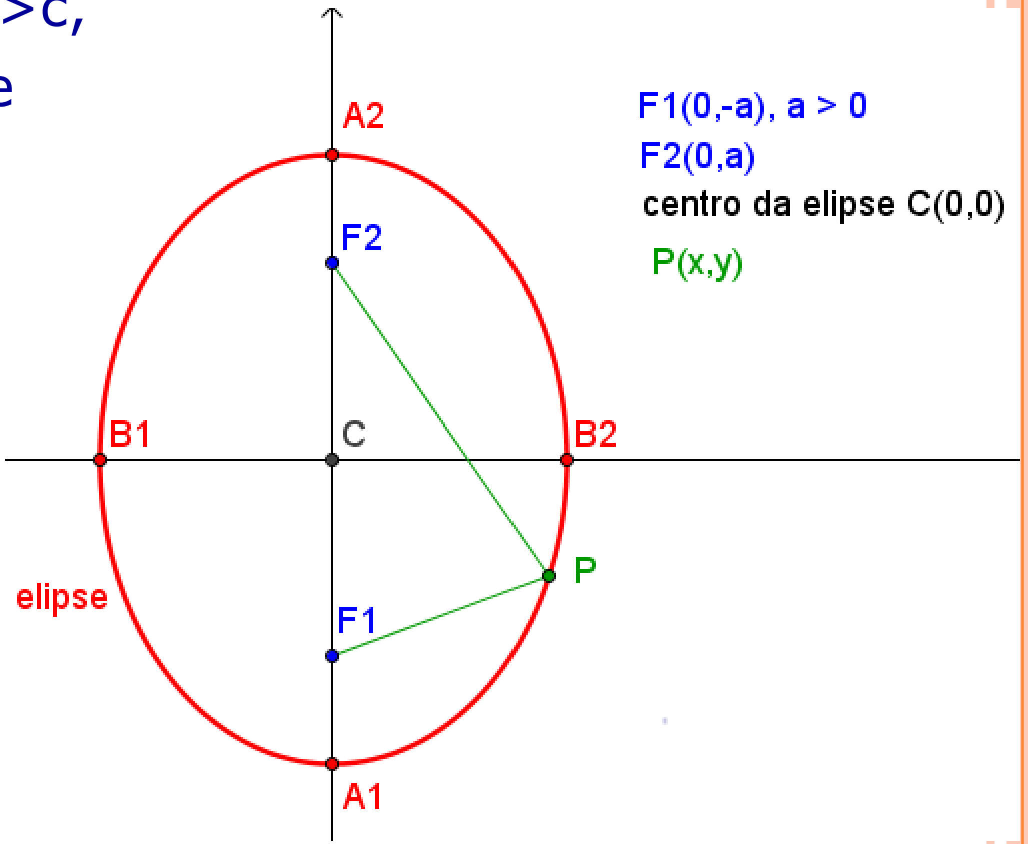
Se 2a > 2c >0 , ou seja, a>c, a equação de uma elipse de focos F_1 e F_2 é:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (2)$$

$A_1(0,-a), A_2(0,a)$

$B_1(-b,0), B_2(b,0)$

Faça figura no Geogebra



CÔNICAS– ELIPSE

De maneira análoga, determine a equação da elipse cujos focos são $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$ e a soma dos raios focais é 2a .

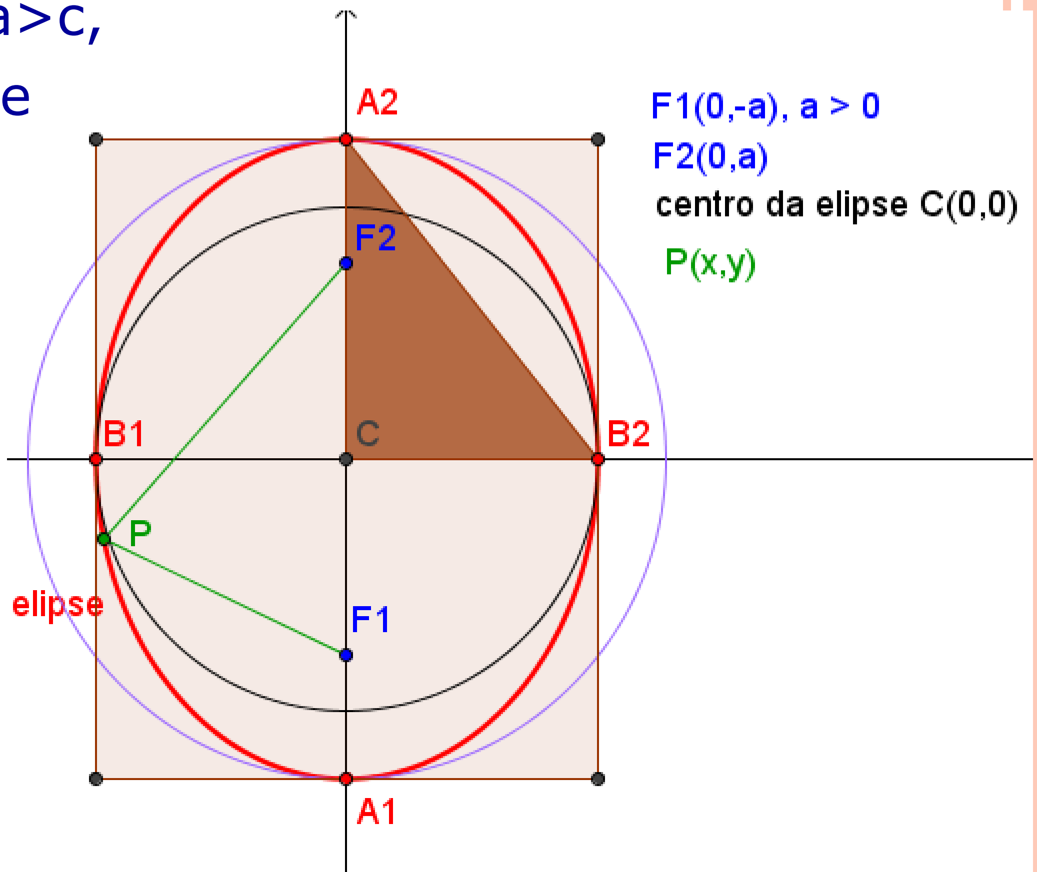
Se 2a > 2c >0 , ou seja, a>c, a equação de uma elipse de focos F_1 e F_2 é:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (2)$$

$A_1(0,-a), A_2(0,a)$

$B_1(-b,0), B_2(b,0)$

Faça figura no Geogebra



CÔNICAS– ELIPSE

Exemplos:

1) Dada a equação da elipse

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

de centro na origem, encontre os vértices e focos da elipse.

Solução:

Cônicas– Elipse

Exemplos:

1) Dada a equação da elipse

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

de centro na origem, encontre os vértices e focos da elipse.

Solução:

Dividindo por 36, obtemos:

Cônicas– Elipse

Exemplos:

1) Dada a equação da elipse

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

de centro na origem, encontre os vértices e focos da elipse.

Solução:

Dividindo por 36, obtemos: $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

CÔNICAS– ELIPSE

Exemplos:

1) Dada a equação da elipse

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

de centro na origem, encontre os vértices e focos da elipse.

Solução:

Dividindo por 36, obtemos: $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Qual é o valor de a? e b?

CÔNICAS– ELIPSE

Exemplos:

1) Dada a equação da elipse

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

de centro na origem, encontre os vértices e focos da elipse.

Solução:

Dividindo por 36, obtemos: $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Qual é o valor de a? e b?

O eixo focal está no eixo x ou no eixo y? Como identificar?

Cônicas– Elipse

Exemplos:

1) Dada a equação da elipse

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

de centro na origem, encontre os vértices e focos da elipse.

Solução:

Dividindo por 36, obtemos: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Qual é o valor de a? e b?

O eixo focal está no eixo x ou no eixo y? Como identificar?

Faça figura usando Geogebra

CÔNICAS– ELIPSE

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

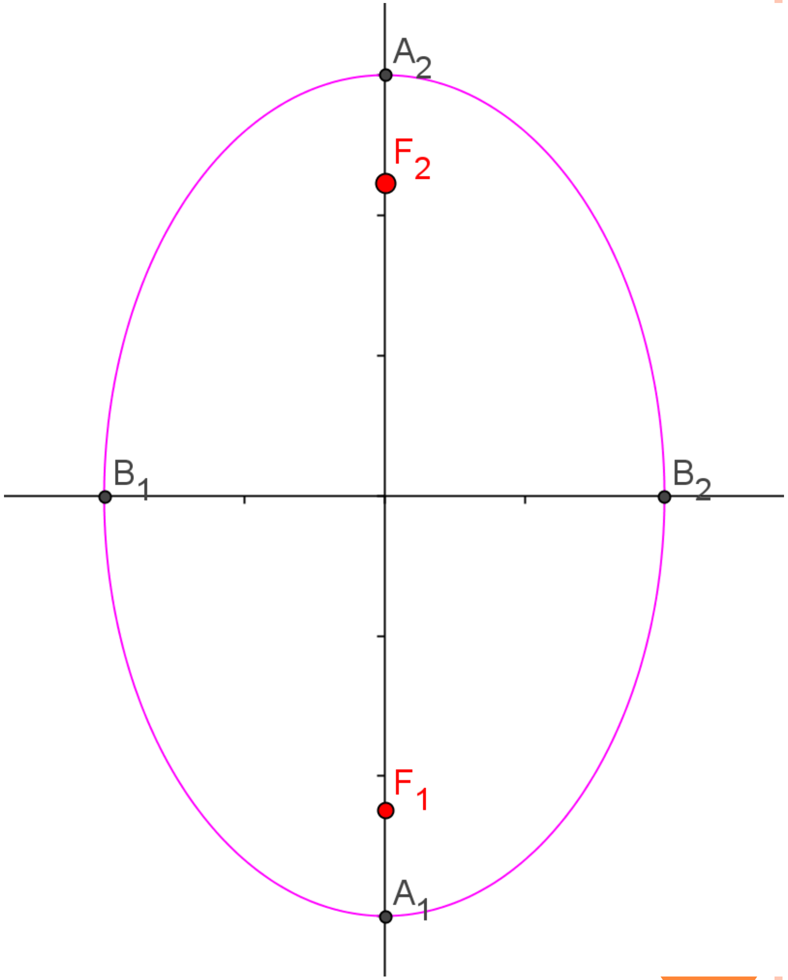
Encontre as coordenadas dos

- vértices :

$$A_1,\ A_2,\ B_1 \ \text{ e } \ B_2$$

- focos:

$$F_1 \ \text{ e } \ F_2$$



Cônicas– Elipse

Exercícios:

2) Determine a equação da elipse de focos

$$F_1(-1, 1) \text{ e } F_2(1, -1)$$

e eixo maior $4\sqrt{2}$.

3) Determine a equação da elipse cujos focos são

$$F_1(-3, 0) \text{ e } F_2(0, 4)$$

e a soma dos raios focais é 7.

Cônicas– Elipse

Exercícios:

2) Determine a equação da elipse de focos

$$F_1(-1,1) \text{ e } F_2(1,-1)$$

e eixo maior $4\sqrt{2}$.

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 4\sqrt{2} \quad \Rightarrow 7x^2 - 2xy + 7y^2 - 48 = 0$$

3) Determine a equação da elipse cujos focos são

$$F_1(-3,0) \text{ e } F_2(0,4)$$

e a soma dos raios focais é 7.

$$\left\|\overrightarrow{F_1P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2P}\right\| = 7 \Rightarrow 40x^2 - 24xy + 33y^2 + 168x - 168y = 0$$

Cônicas– Elipse

Exemplos:

4) Mostre que $4x^2 + 16y^2 - 24x - 32y - 12 = 0$

é a equação da elipse e determine seus vértices e focos.

Cônicas– Elipse

Exemplos:

4) Mostre que $4x^2 + 16y^2 - 24x - 32y - 12 = 0$

é a equação da elipse e determine seus vértices e focos.

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Faça a figura no Geogebra

CÔNICAS– ELIPSE

Teorema: O centro de uma elipse está no ponto (h,k) e a distância do centro a cada um dos focos é igual a c.

i) Se o eixo focal da elipse é paralelo ao eixo x, então sua equação é

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

ii) Se o eixo focal da elipse é paralelo ao eixo y, então sua equação é

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

Para cada uma das elipses, a é o comprimento do semi-eixo maior, b é o comprimento do semi-eixo menor e

$$a^2=b^2+c^2$$

CÔNICAS– ELIPSE

Exemplos:

Os vértices de uma elipse tem coordenadas (-3,7) e (-3,-1) e tal que $c = 2\sqrt{3}$. Determine as equações das elipses, seu centro, vértices e focos.

Cônicas– Elipse

Exemplos:

Os vértices de uma elipse tem coordenadas (-3,7) e (-3,-1) e tal que $c = 2\sqrt{3}$. Determine as equações das elipses, seu centro, vértices e focos.

Resposta:

(I) Se eixo focal paralelo ao eixo y.

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

(II) Encontre a equação se o eixo focal é paralelo ao eixo x.

Sol_duas_elipses.ggb

Cônicas– Elipse

Exercício:

Considere a equação da elipse:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$$

Determine as coordenadas do centro, vértices,focos, o comprimento do eixo maior e do eixo menor.

Cônicas– Elipse

Exercício:

Considere a equação da elipse:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0$$

Determine as coordenadas do centro, vértices,focos, o comprimento do eixo maior e do eixo menor.

Resposta:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{1} = 1$$

Encontre as coordenadas dos pontos pedidos.

Cônicas

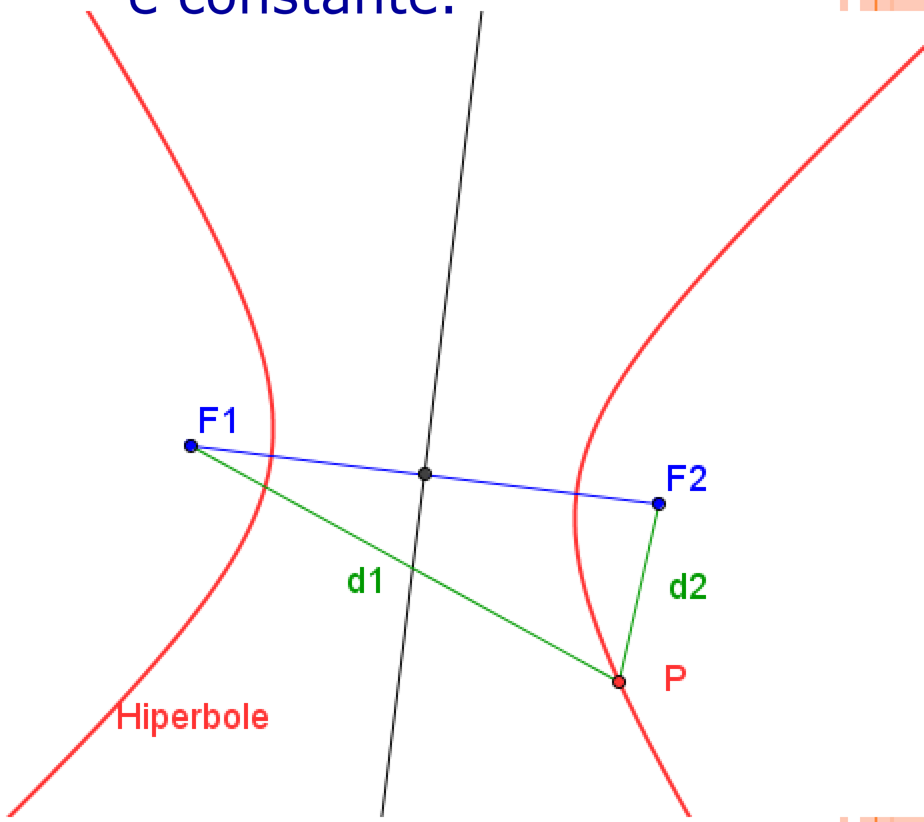
HIPÉRBOLE

Cônicas– Hipérbole

Definição:

Uma hipérbole com focos em F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P(x,y) do planos tais que

$$\left|\ \left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\|\ \right|$$ é constante.



Tomando $\left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\| = 2c$, então

se $0 < a < c$

$$\left|\ \left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\|\ \right| = 2a$$

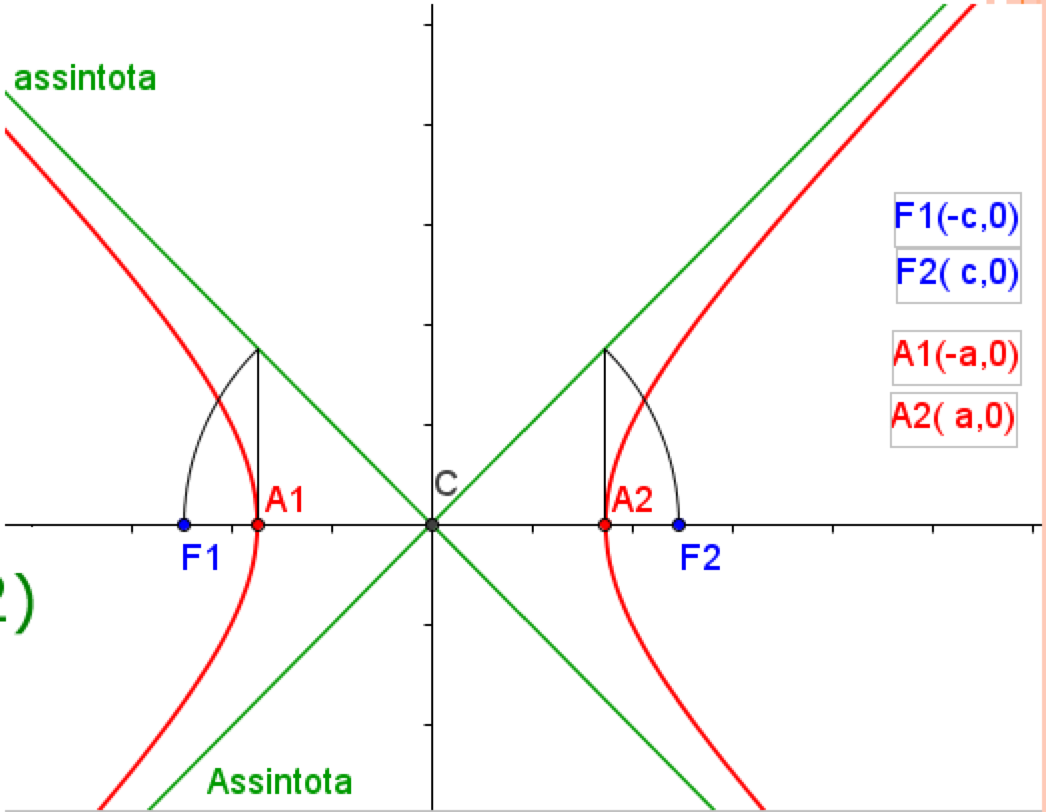
Cônicas– Hipérbole

Escolha eixos coordenados para determinar a equação canônica ou reduzida da hipérbole com focos em F_1 e F_2

$$\left|\ \left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\|\ \right| = 2a \qquad 0 < a < c$$

$$\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$$

$$\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = -2a \quad (2)$$



Cônicas– Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$

Cônicas– Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow$$

CÔNICAS– HIPÉRBOLE

Resolvando $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

Cônicas– Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

Cônicas– Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

Cônicas– Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a$ (1)

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad (cx-a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

Cônicas – Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a$ (1)

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad (cx-a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right) \quad \Rightarrow$$

Cônicas – Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad (cx - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2 - a^2)a^2 \quad \Rightarrow$$

Cônicas– Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad (cx-a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = (c^2-a^2)a^2 \quad \Rightarrow$$

Como $0 < a < c \quad \Rightarrow \quad c^2-a^2 > 0$ e

Cônicas – Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad (cx-a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2-a^2)a^2 \quad \Rightarrow$$

Como $0 < a < c \quad \Rightarrow \quad c^2 - a^2 > 0$ e $b^2 = c^2 - a^2$

Cônicas– Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$(\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2 = (2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2})^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad (cx-a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2-a^2)a^2 \quad \Rightarrow$$

Como $\quad 0 < a < c \quad \Rightarrow \quad c^2 - a^2 > 0 \quad$ e $\quad b^2 = c^2 - a^2$

$$b^2x^2 - a^2y^2 = b^2a^2 \quad \Rightarrow$$

Cônicas– Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad (cx-a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = (c^2-a^2)a^2 \quad \Rightarrow$$

Como $\quad 0 < a < c \quad \Rightarrow \quad c^2-a^2 > 0 \quad$ e $\quad b^2 = c^2-a^2$

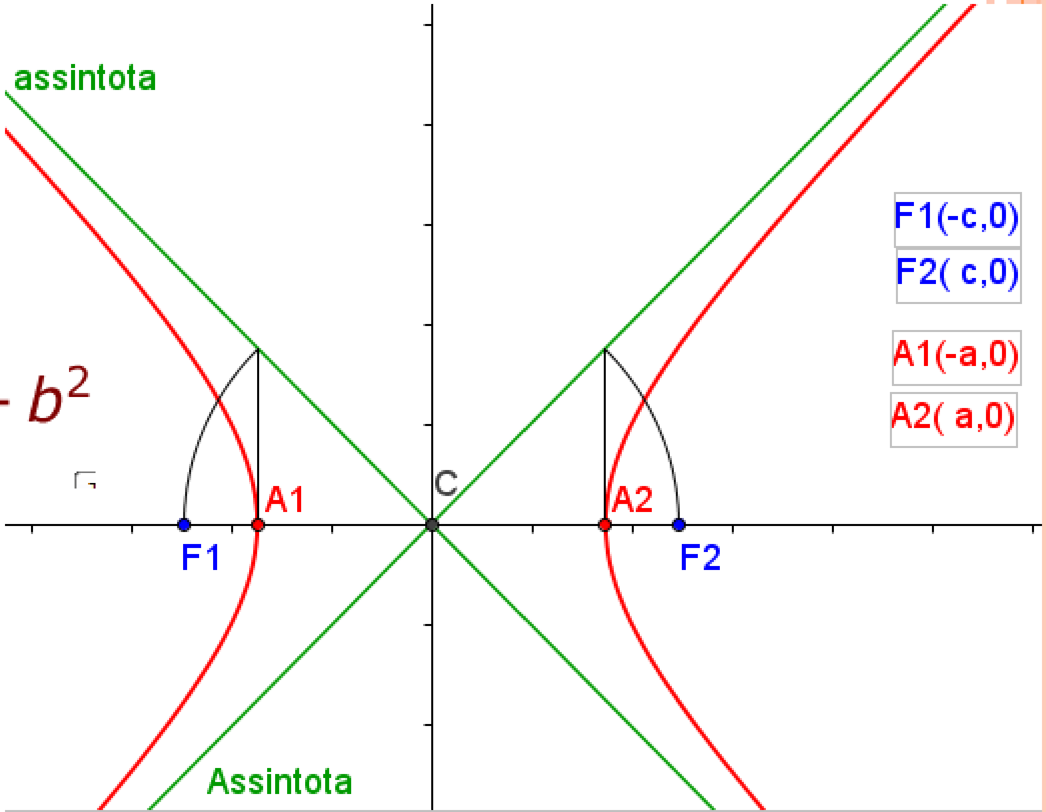
$$b^2x^2-a^2y^2 = b^2a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , c^2 = a^2+b^2$$

CÔNICAS– HIPÉRBOLE

Forma canônica ou reduzida da hipérbole de <u>focos no eixo x.</u>

$$\left|\ \left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\|\ \right| = 2a \qquad 0 < a < c$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , c^2 = a^2 + b^2$$



CÔNICAS– HIPÉRBOLE

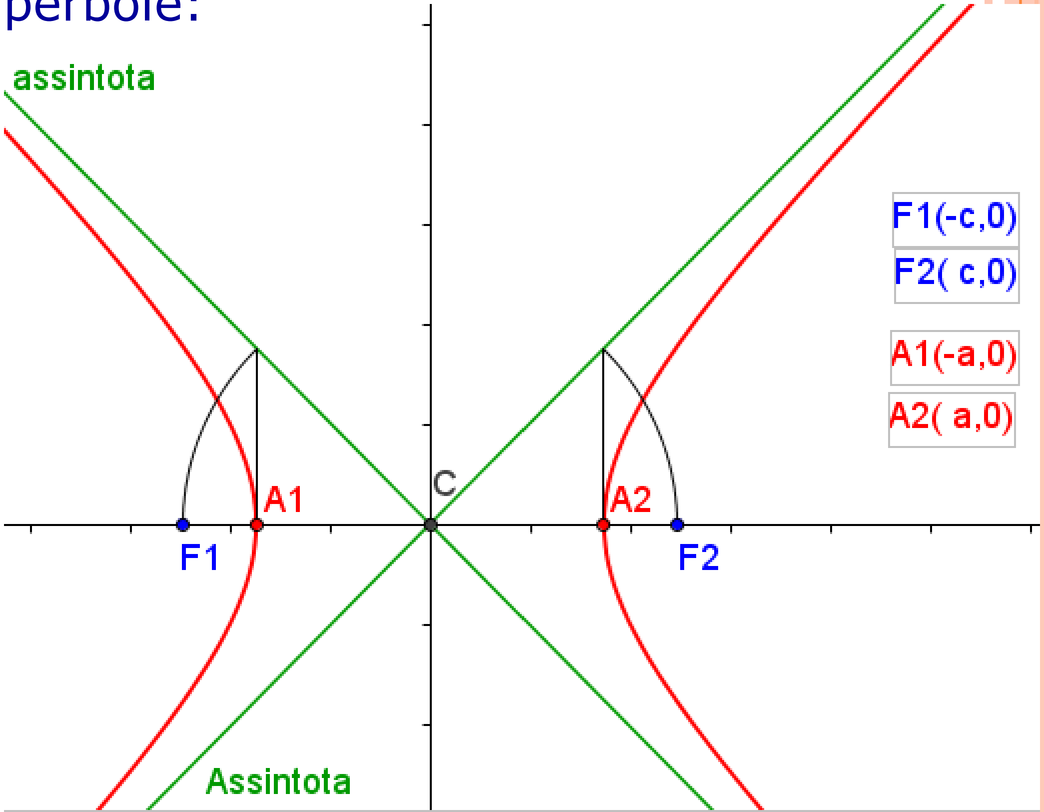
OBS:

1) A hipérbole é simétrica em relação aos eixos x e y. Isto é:

se (x,y) é um ponto da hipérbole, então **(-x,y),(x,-y) e (-x,-y)** também pertencem à hipérbole.

2) O eixo y não intercepta a hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , c^2 = a^2 + b^2$$



3) A excentricidade e,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

e > 1 pois a=c> a

CÔNICAS– HIPÉRBOLE

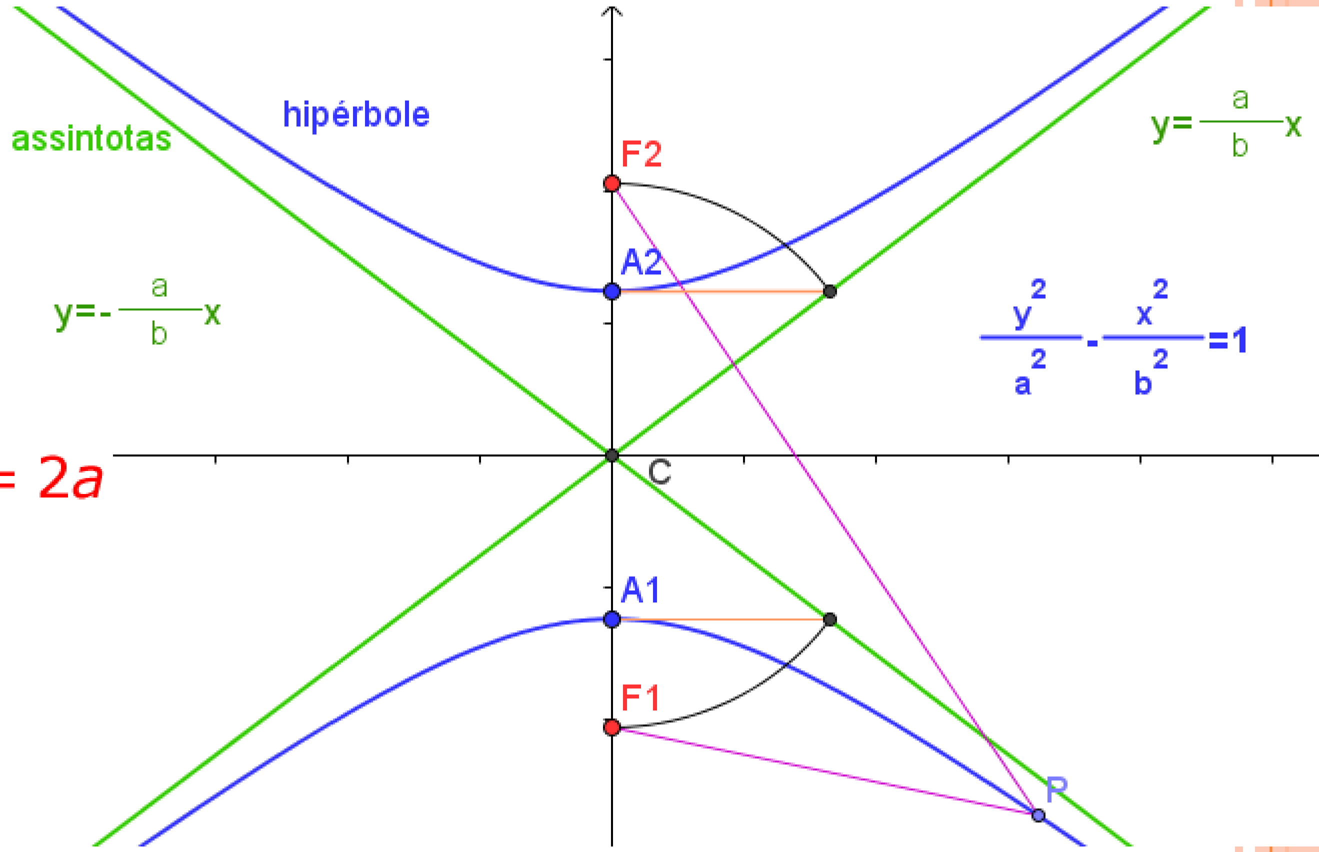
Reciprocamente, podemos determinar a forma canônica ou reduzida da hipérbole de focos no eixo y.

$0 < a < c$

$$\left| \left\| \overrightarrow{PF_1} \right\| - \left\| \overrightarrow{PF_2} \right\| \right| = 2a$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Cônicas– Hipérbole

Exemplo:

1) Os vértices de uma hipérbole são os pontos (0,3) e (0,-3) e seus focos são (0,5) e (0,-5). Determine a equação da hipérbole, O comprimento de seus semi-eixos transversos (2a) e sua excentricidade .

Solução:

Cônicas– Hipérbole

Exemplo:

1) Os vértices de uma hipérbole são os pontos (0,3) e (0,-3) e seus focos são (0,5) e (0,-5). Determine a equação da hipérbole, O comprimento de seus semi-eixos transversos (2a) e sua excentricidade .

Solução: eixo focal no eixo y

$$A_1(0,-3) \text{ e } A_2(0,3) \Rightarrow a = 3$$

$$F_1(0,-5) \text{ e } F_2(0,5) \Rightarrow c = 5$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b = \sqrt{25-9} \Rightarrow b = 4$$

Cônicas– Hipérbole

Exemplo:

1) Os vértices de uma hipérbole são os pontos (0,3) e (0,-3) e seus focos são (0,5) e (0,-5). Determine a equação da hipérbole, O comprimento de seus semi-eixos transversos (2a) e sua excentricidade .

Solução: eixo focal no eixo y

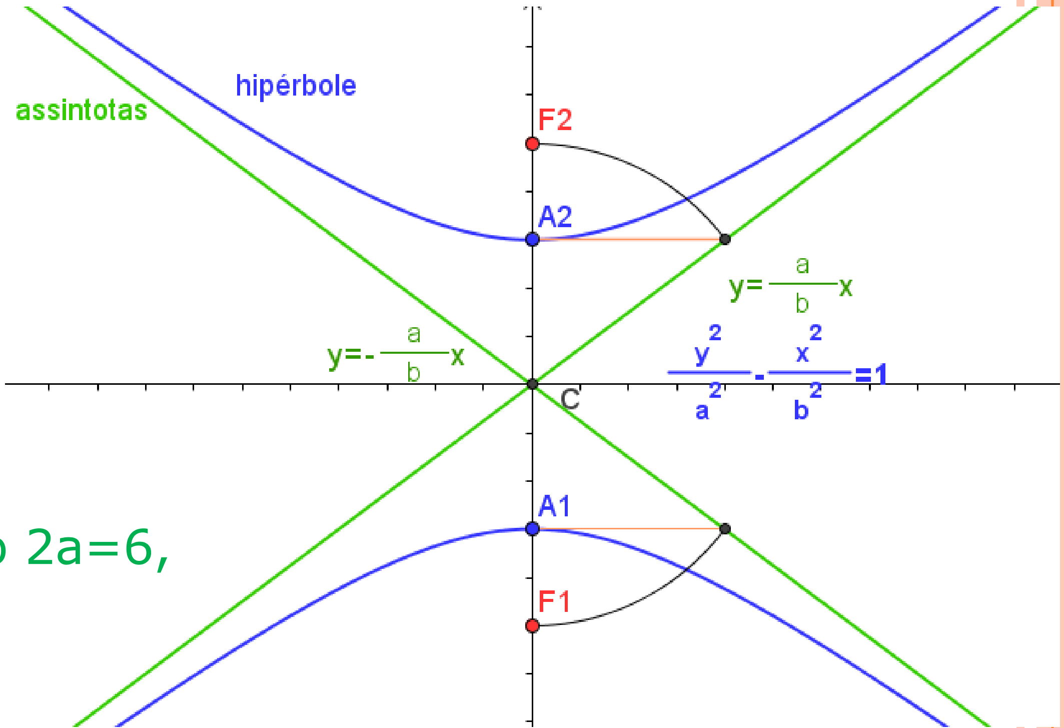
$A_1(0,-3)$ e $A_2(0,3) \Rightarrow a = 3$

$F_1(0,-5)$ e $F_2(0,5) \Rightarrow c = 5$

$c^2 = a^2 + b^2$

$b = \sqrt{25-9} \Rightarrow b = 4$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$$



Comprimento eixo transverso 2a=6,

e = c/a = 5/3 > 1