# Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
# Geometria Analítica Básica

Dirce Uesu Pesco

29/01/2013

# Equação do Plano

I) Dados um ponto do plano e vetor normal ao plano;

II) Dados um ponto do plano e dois vetores paralelos que não tenham mesma direção.

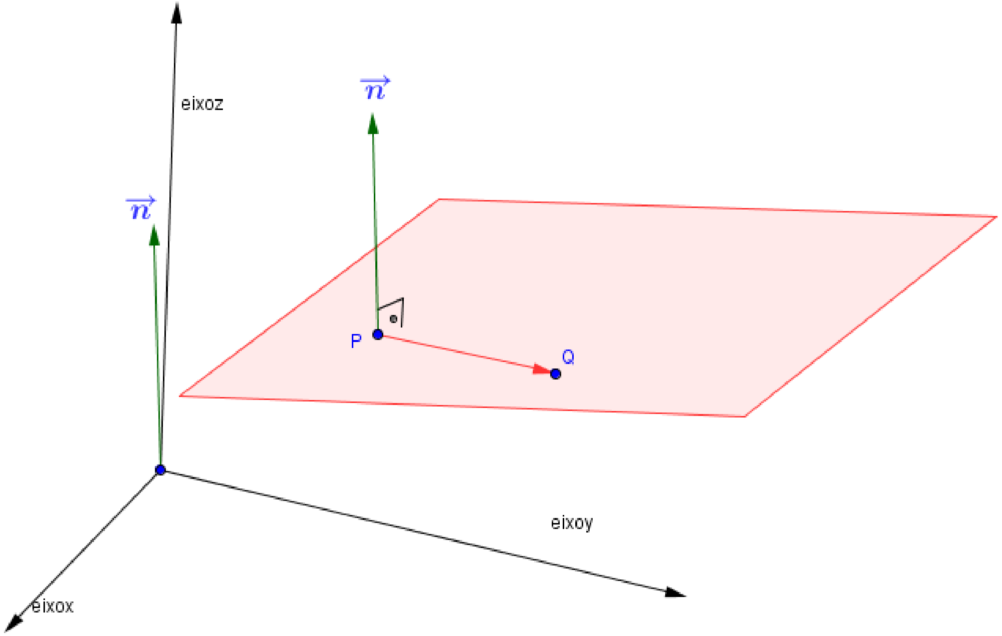
III) Dados três pontos não colineares.

# EQUAÇÃO DO PLANO

I) Dados um ponto do plano e vetor normal ao plano;

Seja $P(x_1, y_1, z_1)$ um ponto do plano $\alpha$ e $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ vetor normal ao plano.

Se $Q(x, y, z)$ é um ponto do plano, então



# Equação do Plano

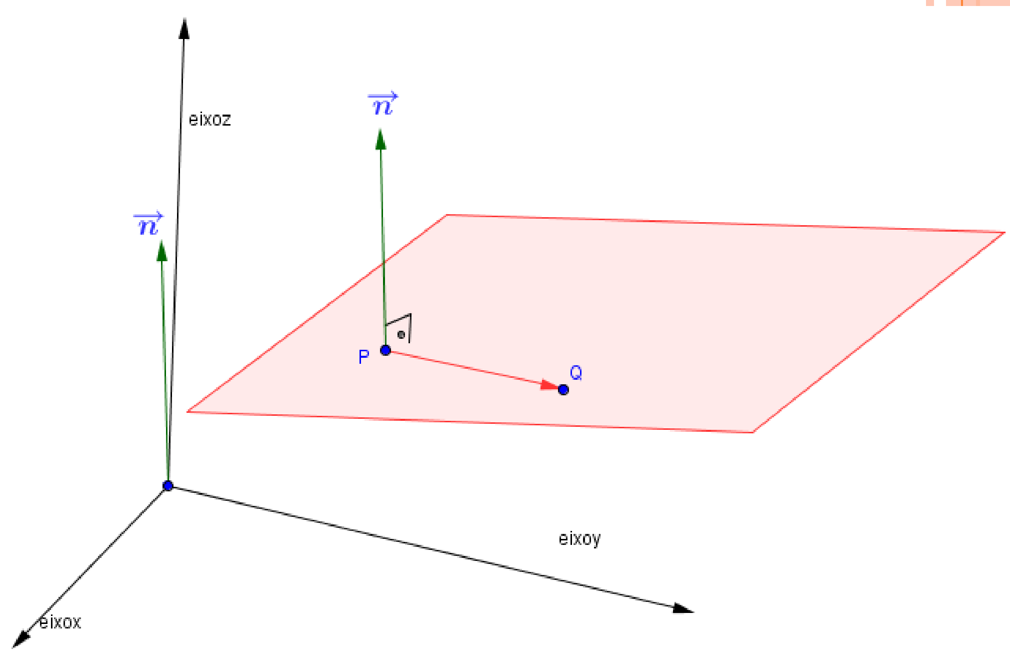
I) Dados um ponto do plano e vetor normal ao plano;

Seja $P(x_1, y_1, z_1)$ um ponto do plano $\alpha$ e $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ vetor normal ao plano.

Se $Q(x, y, z)$ é um ponto do plano, então

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Então a equação cartesiana do plano $\alpha$ é:



# Equação do Plano

I) Dados um ponto do plano e vetor normal ao plano;

Seja $P(x_1, y_1, z_1)$ um ponto do plano $\alpha$ e $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ vetor normal ao plano.
Se $Q(x, y, z)$ é um ponto do plano, então

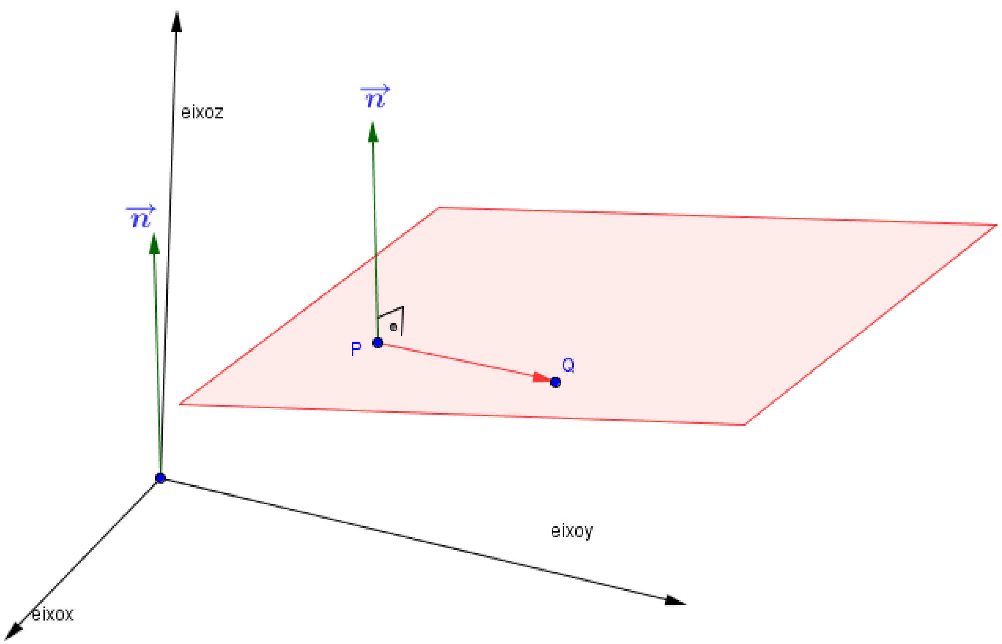
$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

Então a equação cartesiana do plano $\alpha$ é:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Onde

$$d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$$



# Equação do Plano

I) Dados um ponto do plano e vetor normal ao plano;

Exemplo: Encontre a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto P(1,-1,2) e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, -3, 1)$

Solução:

Como você verifica que sua resposta está correta?

# EQUAÇÃO DO PLANO

I) Dados um ponto do plano e vetor normal ao plano;

Exemplo: Encontre a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto P(1,-1,2) e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, -3, 1)$

Solução:

Se $Q(x, y, z)$ é um ponto do plano,então

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(x-1) - 3(y+1) + (z-2) = 0$$

A equação cartesiana do plano é:

$$2x - 3y + z - 7 = 0$$

Como você verifica que sua resposta está correta?

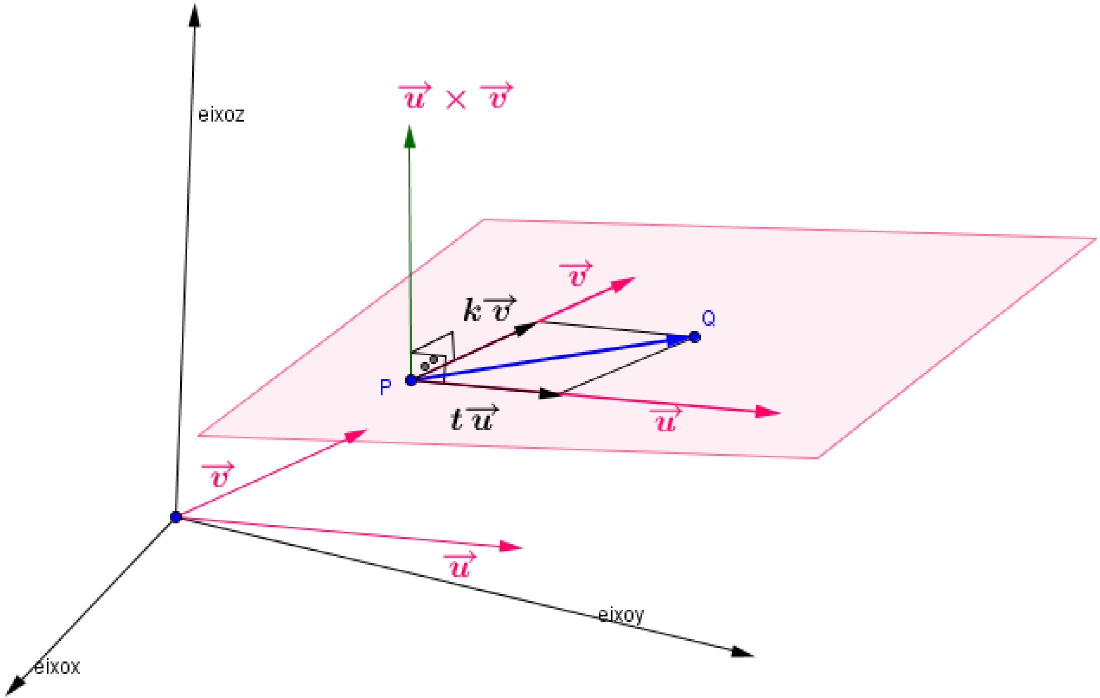
# Equação do Plano

II) Dados um ponto P do plano e dois vetores paralelos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ que não tenham mesma direção.

Seja $P(x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Se $Q(x, y, z)$ é ponto do plano.

Mostre que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$. Por quê?



# EQUAÇÃO DO PLANO

II) Dados um ponto P do plano e dois vetores paralelos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ que não tenham mesma direção.

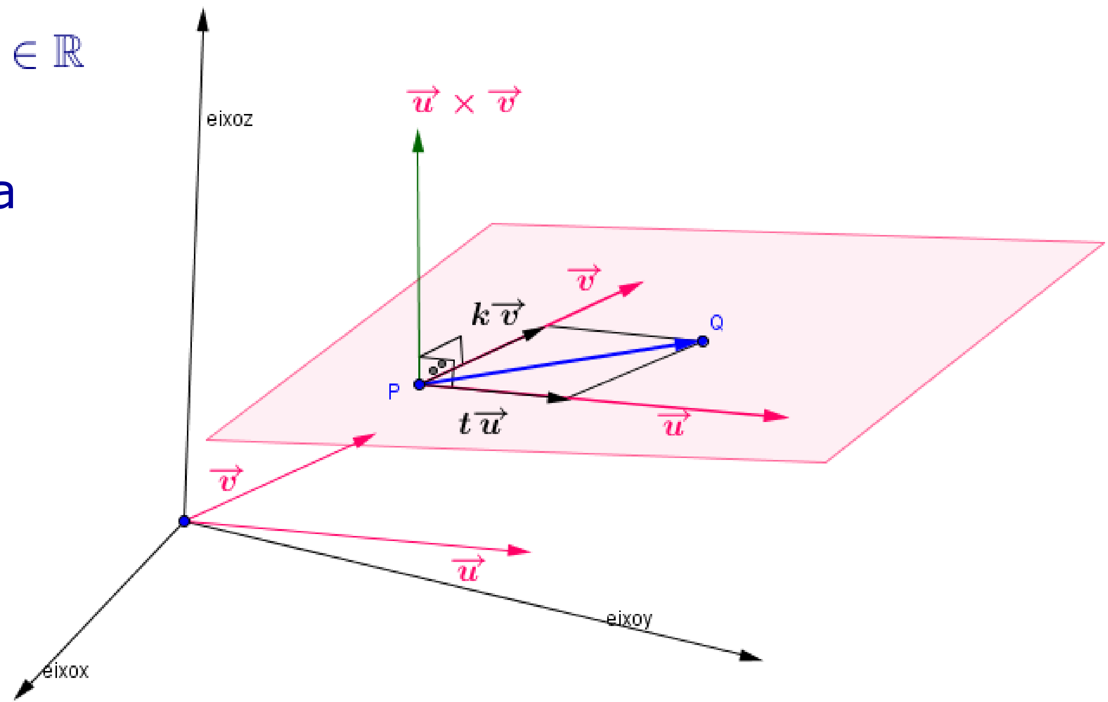
Seja $P(x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Se $Q(x, y, z)$ é ponto do plano.

Mostre que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ . Por quê?

Então $\overrightarrow{PQ} = t\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v};\ t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$

Portanto a forma paramétrica da equação do plano é :



# Equação do Plano

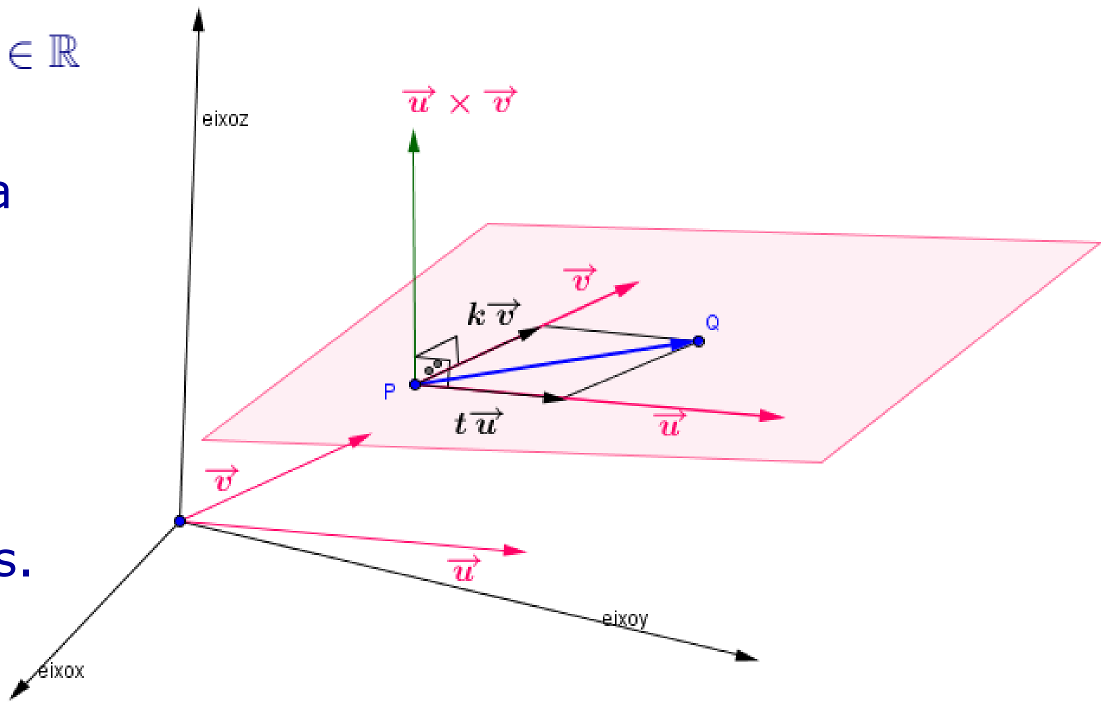
II) Dados um ponto P do plano e dois vetores paralelos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ que não tenham mesma direção.

Seja $P(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Se $Q(x, y, z)$ é ponto do plano.

Mostre que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ . Por quê?

Então $\overrightarrow{PQ} = t\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v};\ t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}$




Portanto a forma paramétrica da equação do plano é :

$$\begin{cases} x = x_1 + tu_x + kv_x \\ y = y_1 + tu_y + kv_y \ ;\ t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + tu_z + kv_z \end{cases}$$

Onde t e k são os parâmetros.

# Equação do Plano

Exemplo: É possível determinar as equações paramétricas do plano que contém o ponto P(1,2,1) e é paralelos aos vetores $\overrightarrow{u} = (2,3,-1)$ e $\overrightarrow{v} = (5,-7,2)$ ? Se sim, encontre as equações.

Solução:

Atenção: Mostre que $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não tem mesma direção. Exercício!!

O que aconteceria seu ambos tivessem a mesma direção?

# Equação do Plano

Exemplo: É possível determinar as equações paramétricas do plano que contém o ponto P(1,2,1) e é paralelos aos vetores $\vec{u} = (2,3,-1)$ e $\vec{v} = (5,-7,2)$ ? Se sim, encontre as equações.

Solução:

Atenção: Mostre que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não tem mesma direção. Exercício!!

O que aconteceria seu ambos tivessem a mesma direção?

Portanto sua representação paramétrica é:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t + 5k \\ y = 2 + 3t - 7k\,;\ t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t + 2k \end{cases}$$

Dê outro exemplo de equação paramétrica desse plano.

Observe que equações paramétricas não tem uma única representação!

# Equação do Plano

Exercício: Encontre as equações paramétricas do plano que passa pelo ponto P(1,-1,2) e é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, -3, 1)$

Como você verifica que sua resposta está correta?

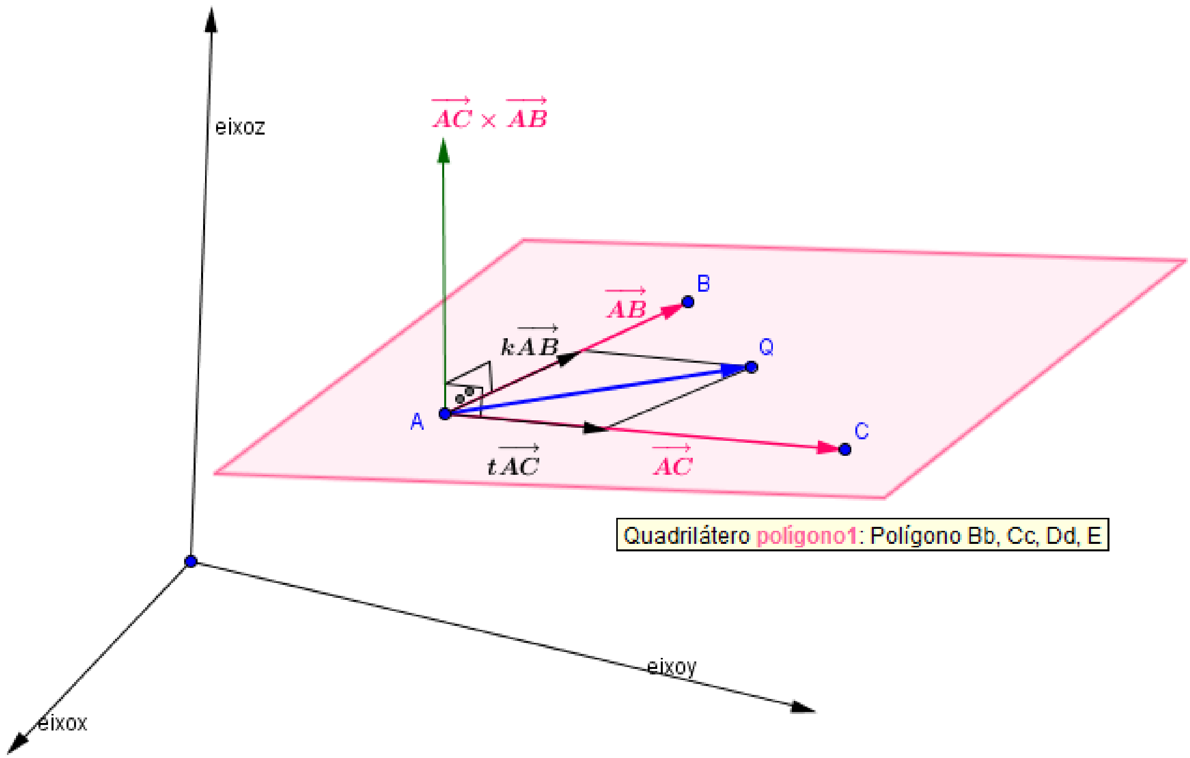
# EQUAÇÃO DO PLANO

III) Dados três pontos não colineares

$$A(x_0, y_0, z_0),\ B(x_1, y_1, z_1) \text{ e } C(x_2, y_2, z_2)$$

Como verificar que os pontos não são colineares?

Qual é a equação cartesiana desse plano?



# Equação do Plano

III) Dados três pontos não colineares

$$A(x_0, y_0, z_0),\ B(x_1, y_1, z_1) \text{ e } C(x_2, y_2, z_2)$$

Como verificar que os pontos não são colineares?

Qual é a equação cartesiana desse plano?

Exemplo : Dados três pontos A(1,2,0), B(2,0,1) e C(0,2,3) de um plano. É possível determinar a equação cartesiana desse plano?

Solução:

# Equação do Plano

III) Dados três pontos não colineares

$$A(x_0, y_0, z_0),\ B(x_1, y_1, z_1) \text{ e } C(x_2, y_2, z_2)$$

Como verificar que os pontos não são colineares?
Qual é a equação cartesiana desse plano?

Exemplo : Dados três pontos A(1,2,0), B(2,0,1) e C(0,2,3) de um plano. É possível determinar a equação cartesiana desse plano?

Solução:

a) Determine se os pontos não são colineares.

$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 1) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$$

Mostre que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$ , calculando

# Equação do Plano

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6,-4,-2)$$

Verifique se o cálculo do produto vetorial está correto! Como?

Use propriedade. Faça!

Logo os pontos não são colineares.

b) Então podemos determinar a equação cartesiana do plano.

Seja um ponto do plano $Q(x,y,z)$ , então

# Equação do Plano

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k} \quad \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6,-4,-2)$$

Verifique se o cálculo do produto vetorial está correto! Como?

Use propriedade. Faça!

Logo os pontos não são colineares.

b) Então podemos determinar a equação cartesiana do plano.

Seja um ponto do plano $Q(x,y,z)$ , então $\overrightarrow{AQ} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0$

Veja figura anterior.

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{AQ} \cdot \vec{n} = 0$ Como $\overrightarrow{AQ} = (x-1, y-2, z-0)$

$$-6(x-1) - 4(y-2) - 2z = 0 \quad \Rightarrow \quad -6x - 4y - 2z + 14 = 0 \;\Rightarrow 3x + 2y + z - 7 = 0$$

$$\vec{n} = (-6,-4,-2) = -2(3,2,1)$$

# Equação do Plano

Exemplos de planos: (Ver figuras e explicação na aula)

a) A equação $x = 0$ no espaço é equação de um plano!

b) A equação $3x + 2y = 7$ também é equação do plano no espaço!

Fique atento ao espaço que em as equações estão definidas!

Equação do plano xz :

Equação do plano yz :

Equação do plano xy :

# Equação do Plano

Exemplos de planos: (Ver figuras e explicação na aula)

a) A equação $x = 0$ no espaço é equação de um plano!

b) A equação $3x + 2y = 7$ também é equação do plano no espaço!

Fique atento ao espaço que em as equações estão definidas!

Equação do plano xz : $y = 0$

Equação do plano yz : $x = 0$

Equação do plano xy : $z = 0$