Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Geometria Analítica Básica

08/01/2013- GGM - UFF
Dirce Uesu Pesco

Cônicas

- Equação geral do segundo grau a duas variáveis x e y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (*)$$

onde A, B e C não são simultaneamente nulos

- Se A=B=C=0, então Dx + E y + F = 0 , equação da reta no plano.
- Caso I : $B=0$
- Caso II $B \neq 0$

CÔNICAS

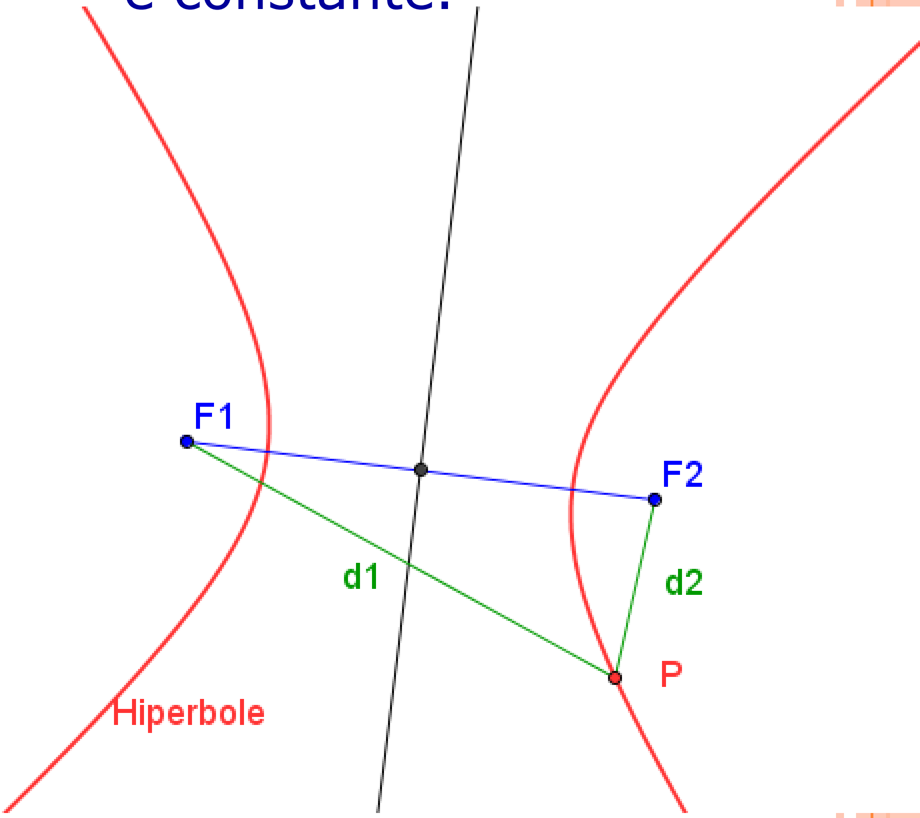
HIPÉRBOLE

CÔNICAS– HIPÉRBOLE

Definição:

Uma hipérbole com focos em F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P(x,y) do planos tais que

$$\left| \left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| \right|$$ é constante.



Tomando $\left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\| = 2c$, então

se $0 < a < c$

$$\left| \left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| \right| = 2a$$

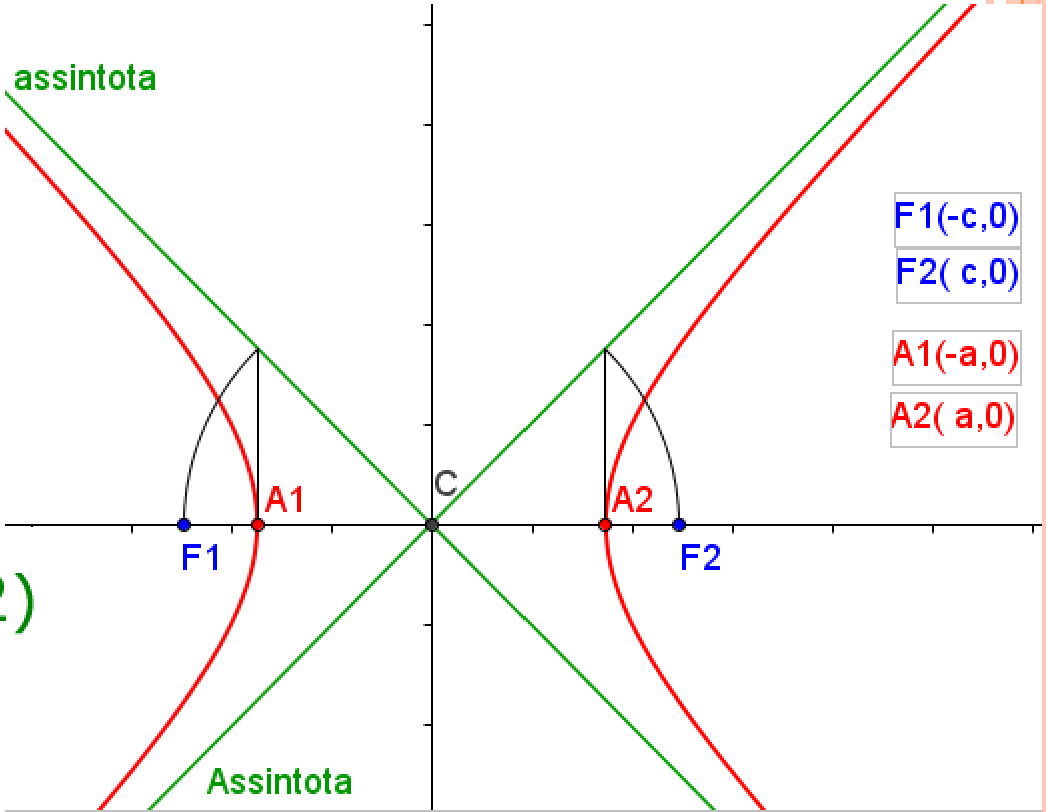
CÔNICAS– HIPÉRBOLE

Escolha eixos coordenados para determinar a equação canônica ou reduzida da hipérbole com focos em F_1 e F_2

$$\left|\ \left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\|\ \right| = 2a \qquad 0 < a < c$$

$$\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$$

$$\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = -2a \quad (2)$$



Cônicas – Hipérbole

Resolvendo $\left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| = 2a \quad (1)$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad (cx-a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2\left(x^2 - 2cx + c^2 + y^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2-a^2)a^2 \quad \Rightarrow$$

Como $0 < a < c \quad \Rightarrow \quad c^2 - a^2 > 0$ e $b^2 = c^2 - a^2$

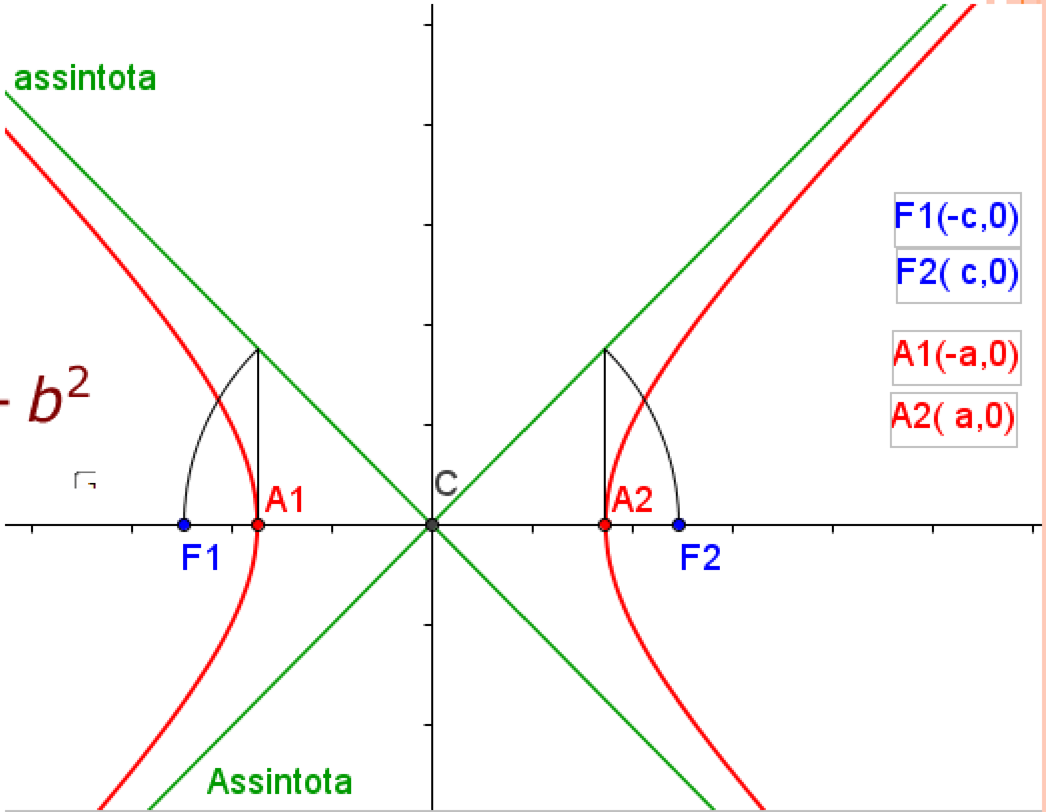
$$b^2x^2 - a^2y^2 = b^2a^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , c^2 = a^2 + b^2$$

CÔNICAS– HIPÉRBOLE

Forma canônica ou reduzida da hipérbole de focos no eixo x.

$$\left|\ \left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\|\ \right| = 2a \qquad 0 < a < c$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , c^2 = a^2 + b^2$$



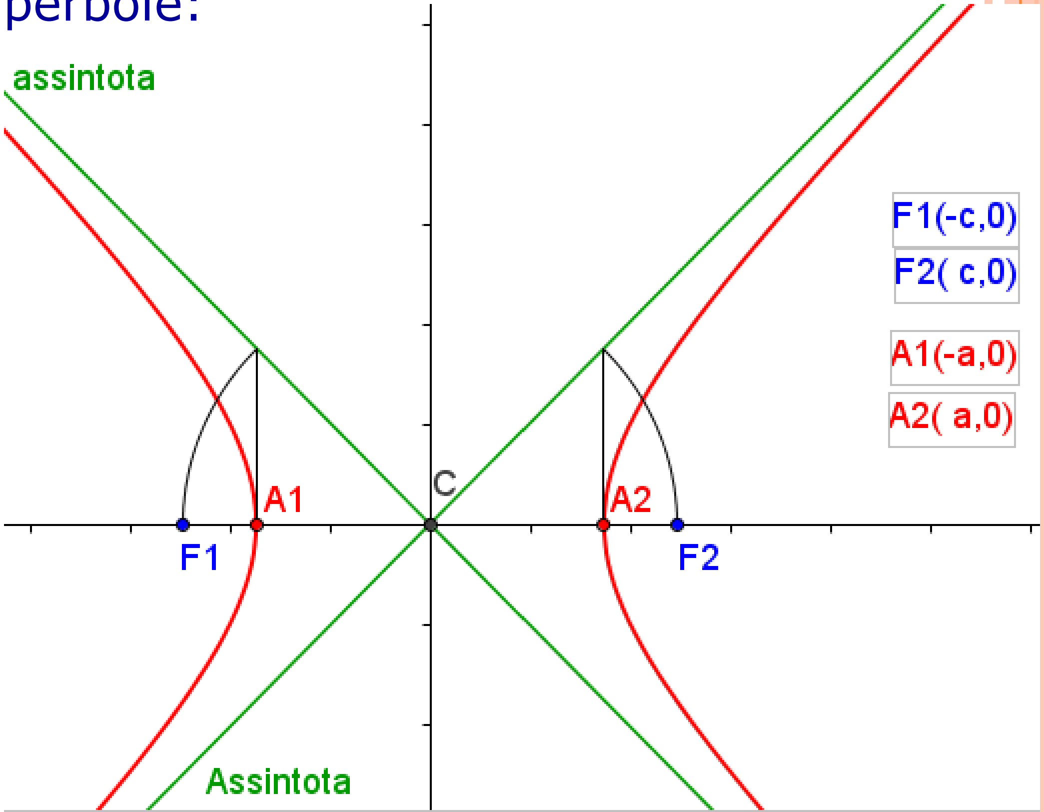
CÔNICAS– HIPÉRBOLE

OBS:

1) A hipérbole é simétrica em relação aos eixos x e y. Isto é:

se (x,y) é um ponto da hipérbole, então **(-x,y),(x,-y) e (-x,-y)** também pertencem à hipérbole.

2) O eixo y não intercepta a hipérbole:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , c^2 = a^2 + b^2$$

3) A excentricidade e,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

e > 1 pois a=c> a

Cônicas– Hipérbole

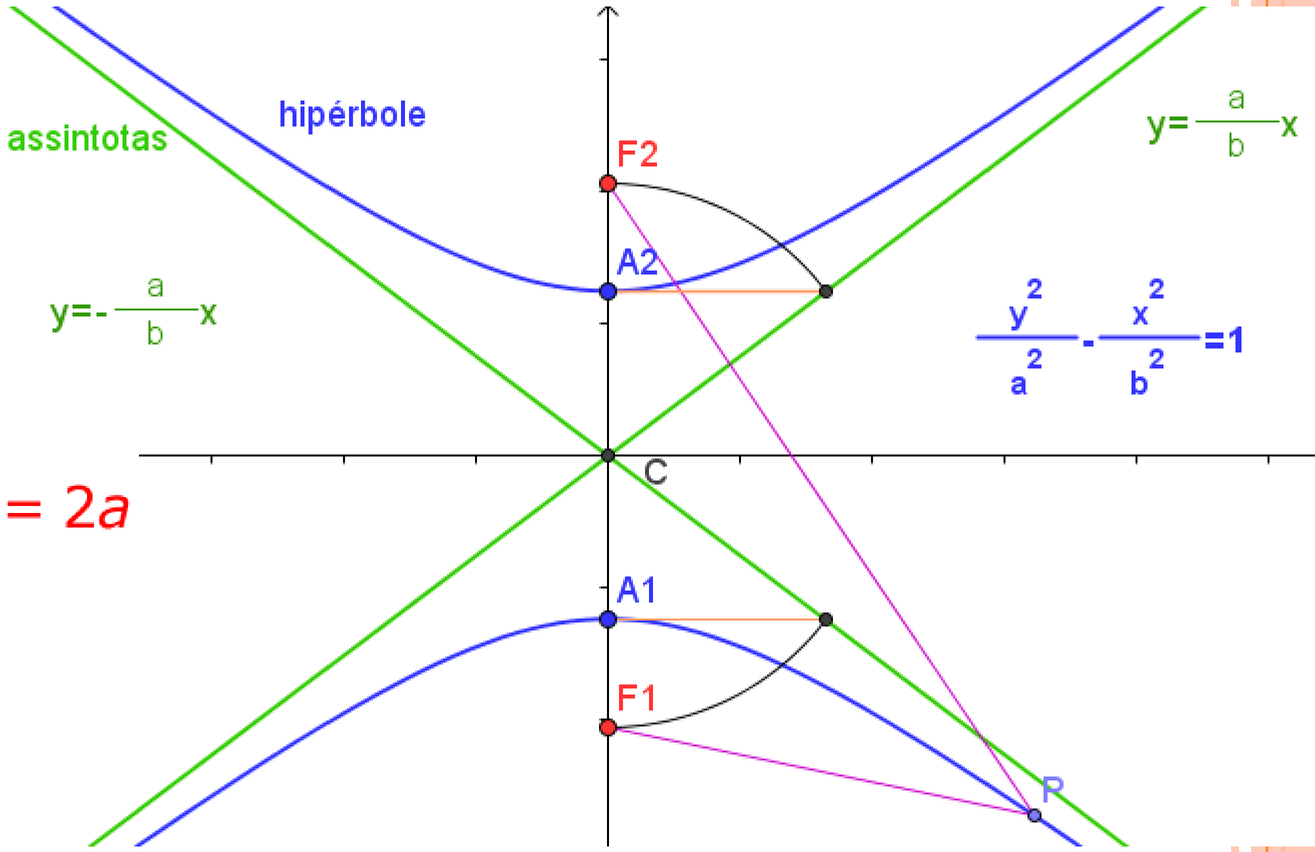
Reciprocamente, podemos determinar a forma canônica ou reduzida da hipérbole de focos no eixo y.

$$0 < a < c$$

$$\left|\, \left\|\overrightarrow{PF_1}\right\| - \left\|\overrightarrow{PF_2}\right\| \,\right| = 2a$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$



CÔNICAS– HIPÉRBOLE

Exemplo:

1) Os vértices de uma hipérbole são os pontos (0,3) e (0,-3) e seus focos são (0,5) e (0,-5). Determine a equação da hipérbole, O comprimento de seus semi-eixos transversos (2a) e sua excen-tricidade .

Resposta: eixo focal no eixo y

$A_1(0,-3)$ e $A_2(0,3) \Rightarrow a = 3$

$F_1(0,-5)$ e $F_2(0,5) \Rightarrow c = 5$

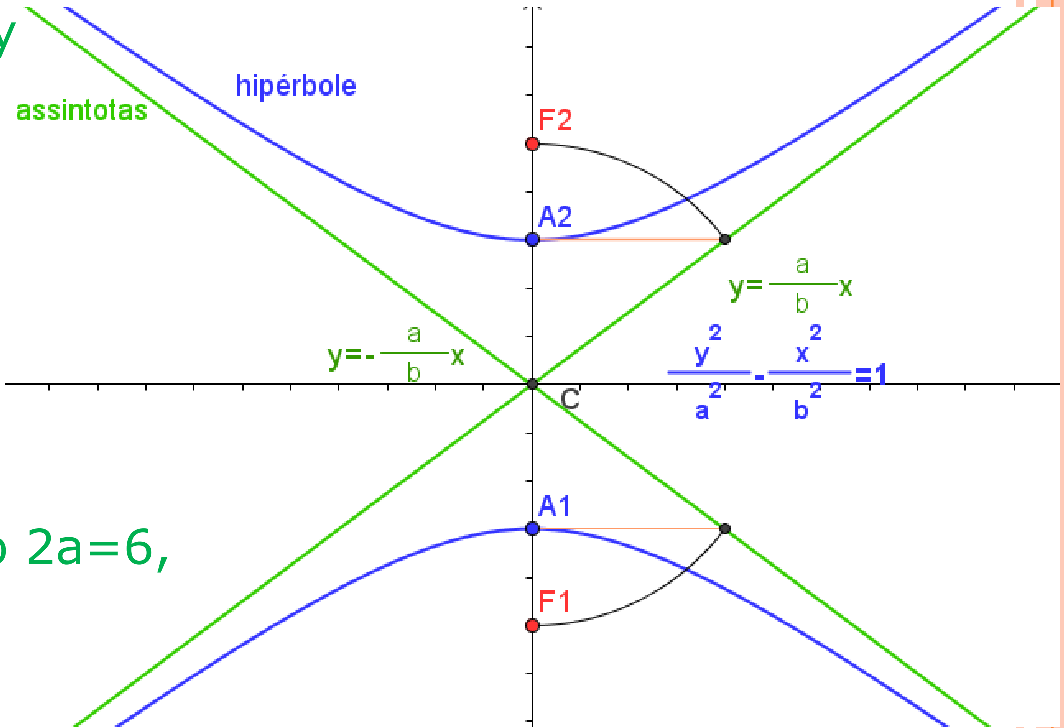
$c^2 = a^2 + b^2$

$b = \sqrt{25-9} \Rightarrow b = 4$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$$

Comprimento eixo transverso 2a=6,

e = c/a = 5/3 > 1



CÔNICAS– HIPÉRBOLE

Exemplo:

2) Determine a equação da hipérbole com focos em (-6,0) e (6,0) tendo as retas $5y = \pm 2\sqrt{5}x$ como assíntotas.

Cônicas– Hipérbole

Exemplo:

2) Determine a equação da hipérbole com focos em (-6,0) e (6,0) tendo as retas $5y = \pm 2\sqrt{5}x$ como assíntotas.

Resposta:

$$b^2 = 16 \text{ e } a^2 = 20 \qquad \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1 \qquad y = \pm\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{20}}\,x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\,x$$

Cônicas – Hipérbole

Exemplo:

2) Determine a equação da hipérbole com focos em (-6,0) e (6,0) tendo as retas $5y = \pm 2\sqrt{5}x$ como assíntotas.

Resposta:

$b^2 = 16$ e $a^2 = 20$ $\qquad \dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ $\qquad y = \pm\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{20}}\,x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}\,x$

Eixo focal no eixo x, faça a figura.

3) Determine o eixo focal da hipérbole: $6y^2 - 9x^2 = 36$ bem como os focos, vértices e excentricidade.

Cônicas– Hipérbole

Exemplo:

2) Determine a equação da hipérbole com focos em (-6,0) e (6,0) tendo as retas $5y = \pm 2\sqrt{5}x$ como assíntotas.

Resposta:

$b^2 = 16$ e $a^2 = 20$ $\qquad \dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \qquad y = \pm \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{20}}\, x = \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}}\, x$

Eixo focal no eixo x, faça a figura.

3) Determine o eixo focal da hipérbole: $6y^2 - 9x^2 = 36$ bem como os focos, vértices e excentricidade.

Resposta: $F_1(0, -\sqrt{10}),\ F_2 = (0, \sqrt{10}), A_1(0, -\sqrt{6}), A_2 = (0, \sqrt{6}),\ e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

Cônicas– Hipérbole

Exemplo:

2) Determine a equação da hipérbole com focos em (-6,0) e (6,0) tendo as retas $5y = \pm 2\sqrt{5}x$ como assíntotas.

Resposta:

$b^2 = 16$ e $a^2 = 20$ $\qquad \dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \qquad y = \pm \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{20}}\, x = \pm \dfrac{2}{\sqrt{5}}\, x$

Eixo focal no eixo x, faça a figura.

3) Determine o eixo focal da hipérbole: $6y^2 - 9x^2 = 36$ bem como os focos, vértices e excentricidade.

Resposta: $F_1(0, -\sqrt{10}),\ F_2 = (0, \sqrt{10}), A_1(0, -\sqrt{6}), A_2 = (0, \sqrt{6}),\ e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

4)Determine o eixo focal, centro, focos, assíntotas e vértices da hipérbole $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

Resposta:

Cônicas– Hipérbole

Exemplo:

2) Determine a equação da hipérbole com focos em (-6,0) e (6,0) tendo as retas $5y = \pm 2\sqrt{5}x$ como assíntotas.

Resposta:

$$b^2 = 16 \text{ e } a^2 = 20 \qquad \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1 \qquad y = \pm\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{20}}\, x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}\, x$$

Eixo focal no eixo x, faça a figura.

3) Determine o eixo focal da hipérbole: $6y^2 - 9x^2 = 36$ bem como os focos, vértices e excentricidade.

Resposta: $F_1(0,-\sqrt{10}),\ F_2 = (0,\sqrt{10}), A_1(0,-\sqrt{6}), A_2 = (0,\sqrt{6}),\ e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$

4)Determine o eixo focal, centro, focos, assíntotas e vértices da hipérbole $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

Resposta:

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$

Cônicas– Hipérbole

Teorema: O centro de uma hipérbole está em (h,k) e a distância do centro a cada um dos focos é c.

Se o eixo focal da hipérbole é paralelo ao eixo x, então sua equação é:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Se o eixo focal da hipérbole é paralelo ao eixo y, então sua equação é:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Para cada hipérbole a é o comprimento do semi-eixo focal (transverso)

E a excentricidade

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$$

Cônicas– Hipérbole

Exercício: Identifique os gráficos de

$$16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + E = 0$$

Para cada valor de E.

Eixo focal no eixo x, faça a figura.

Exercício: Determine a equação da hipérbole cujos focos são F1(-2,2) e F2(2,2), onde $\left| \|PF_1\| - \|PF_2\| \right| = 4$

$xy = 2$