Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Geometria Analítica Básica

Dirce Uesu Pesco

24/01/2013

Conteudo da Aula de 24/01/2013

- Produto Vetorial - propriedades
- Aplicação de Produto Vetorial
- Produto Misto
- Aplicação de Produto Misto
- Exemplos e exercícios
- Equação do Plano no espaço.
- - dados um vetor normal e um ponto do plano
- - dados dois vetores paralelos ao plano com direções distintas e um ponto do plano
- - dados três pontos não colineares do plano.

Interpretação Geométrica de Produto Misto

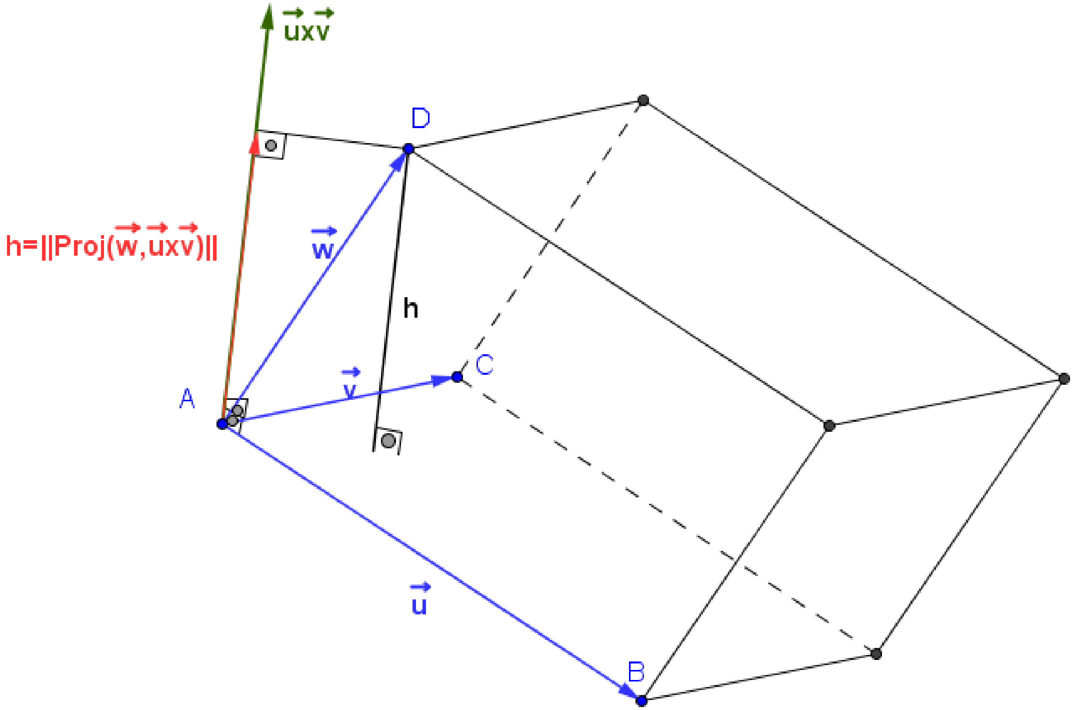
Considere o paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ e representado na figura. Calcule o seu volume, V.

Volume do paralelepípedo é área da base vezes altura.

V = S. h , onde

S é a área da base e

h a altura.



Interpretação Geométrica de Produto Misto

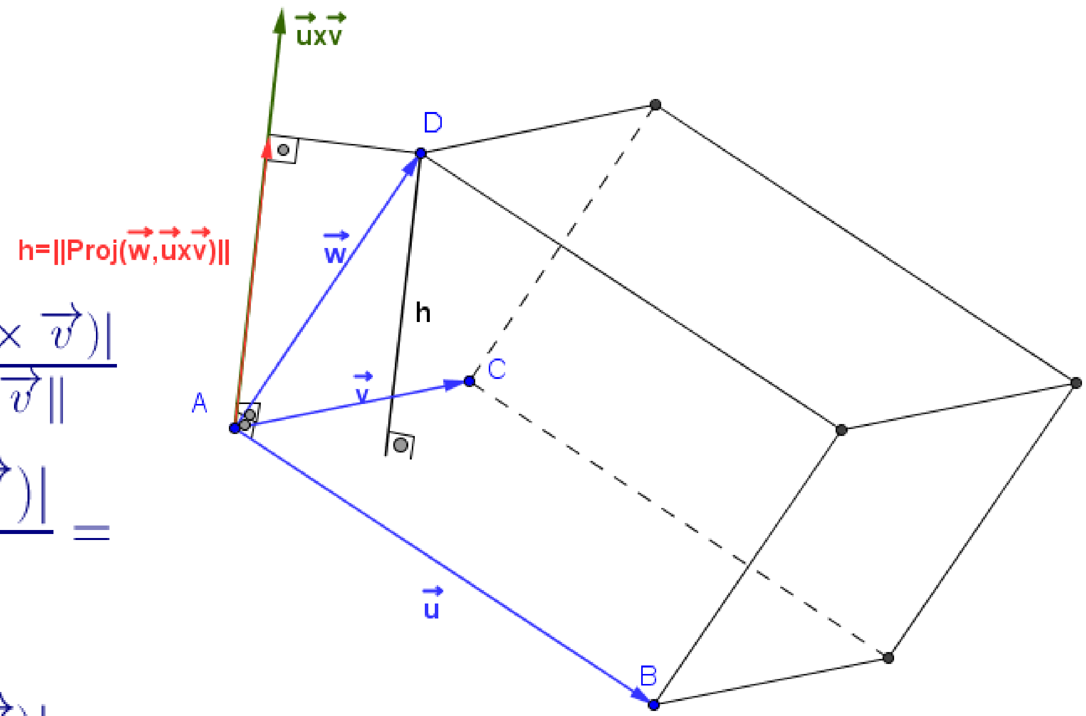
Considere o paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ e representado na figura. Calcule o seu volume, V.

Volume do paralelepípedo é área da base vezes altura.

V = S. h , onde

S é a área da base e

h a altura.



$$h = \|Proj(w, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})\| = \frac{|\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|}$$

$$V = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot \frac{|\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})|}{\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|} =$$

O Volume é V= $|\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})|$

Interpretação Geométrica de Produto Misto

Exemplo: Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u} = (3,5,7)$, $\overrightarrow{v} = (2,0,-1)$ e $\overrightarrow{w} = (0,1,3)$

Solução:

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE PRODUTO MISTO

Exemplo: Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u} = (3,5,7)$, $\overrightarrow{v} = (2,0,-1)$ e $\overrightarrow{w} = (0,1,3)$

Solução:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -13 \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})| = |-13| = 13$$

Exemplo 2: Sejam A, B, e C pontos não colineares. Exprima a distância do ponto D ao plano determinado por ABC em função de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$

Solução:

Interpretação Geométrica de Produto Misto

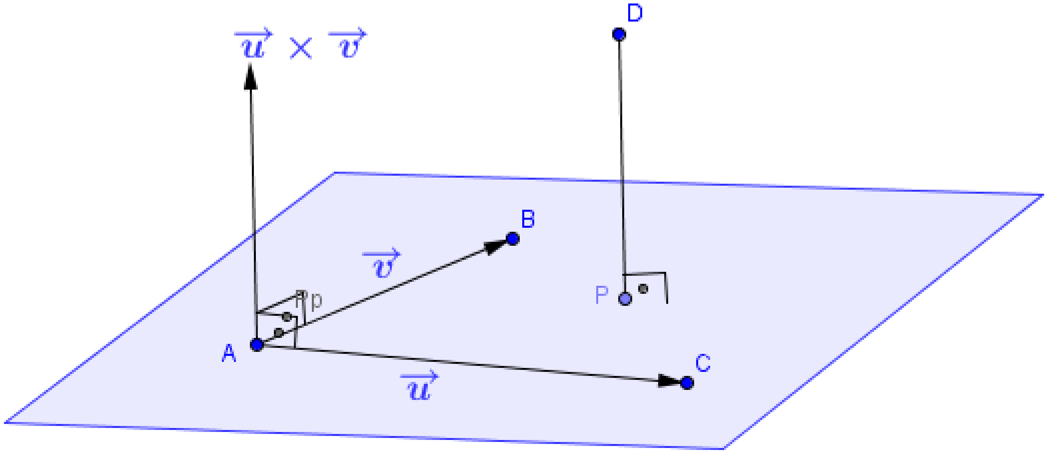
Exemplo: Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\overrightarrow{u} = (3,5,7)$, $\overrightarrow{v} = (2,0,-1)$ e $\overrightarrow{w} = (0,1,3)$

Solução:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -13 \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})| = |-13| = 13$$

Exemplo 2: Sejam A, B, e C pontos não colineares. Exprima a distância do ponto D ao plano determinado por ABC em função de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$

Solução:



Interpretação Geométrica de Produto Misto

Exemplo: Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u} = (3,5,7)$, $\vec{v} = (2,0,-1)$ e $\vec{w} = (0,1,3)$

Solução:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -13 \quad \Rightarrow \quad |\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})| = |-13| = 13$$

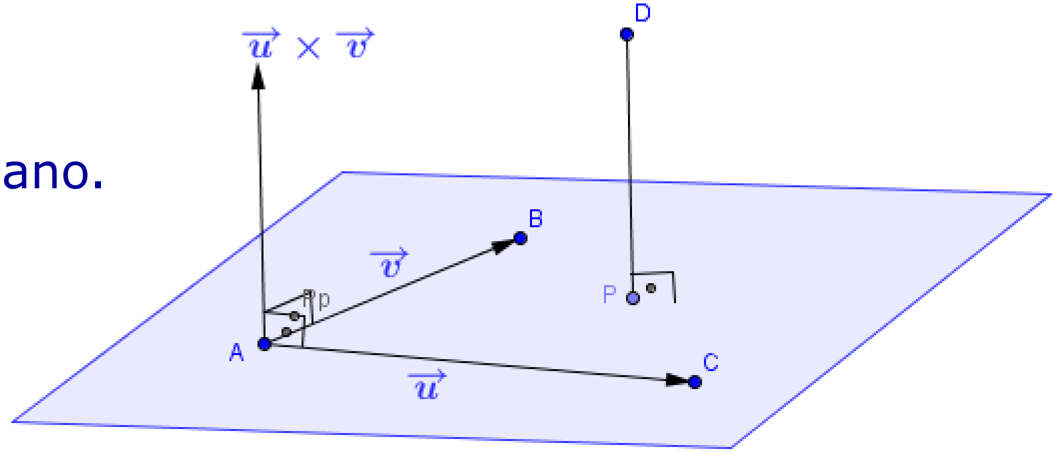
Exemplo 2: Sejam A, B, e C pontos não colineares. Exprima a distância do ponto D ao plano determinado por ABC em função de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$

Solução:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vetor normal ao plano.

V = S . h,

volume do paralelepípedo



Interpretação Geométrica de Produto Misto

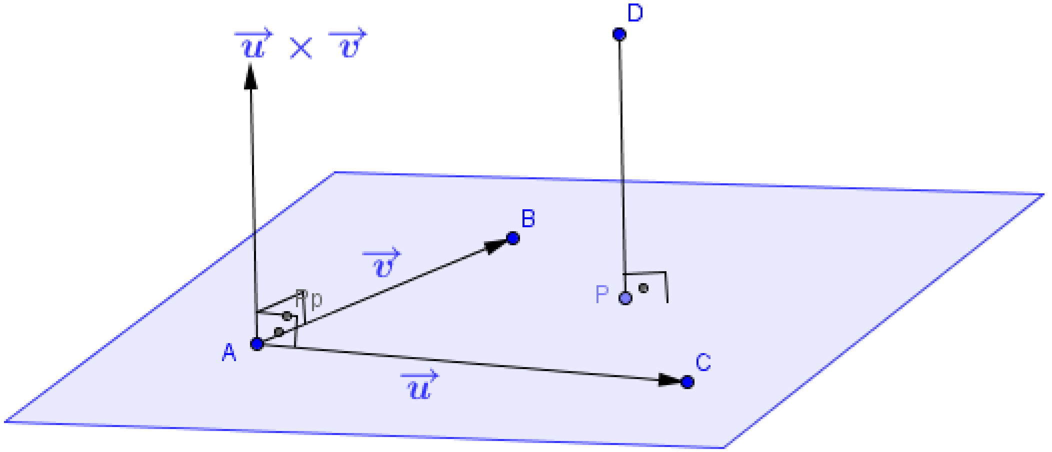
V = S . h, onde h $= \overrightarrow{DP}$

S: área da base, isto é, $S = \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|$

V : volume do paralelepípedo, isto é, $V = \left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|$

Então

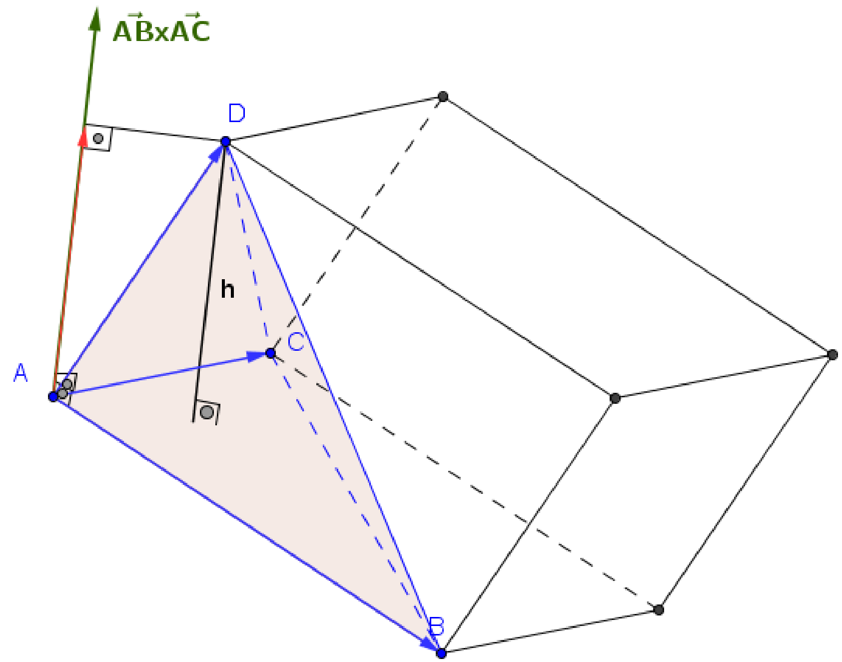
$$h = \frac{\left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}$$



Interpretação Geométrica de Produto Misto

Exemplo 3: O volume de um tetraedro ABCD é igual a ...

Solução:



Interpretação Geométrica de Produto Misto

Exemplo 3: O volume de um tetraedro ABCD é igual a ...

Solução:

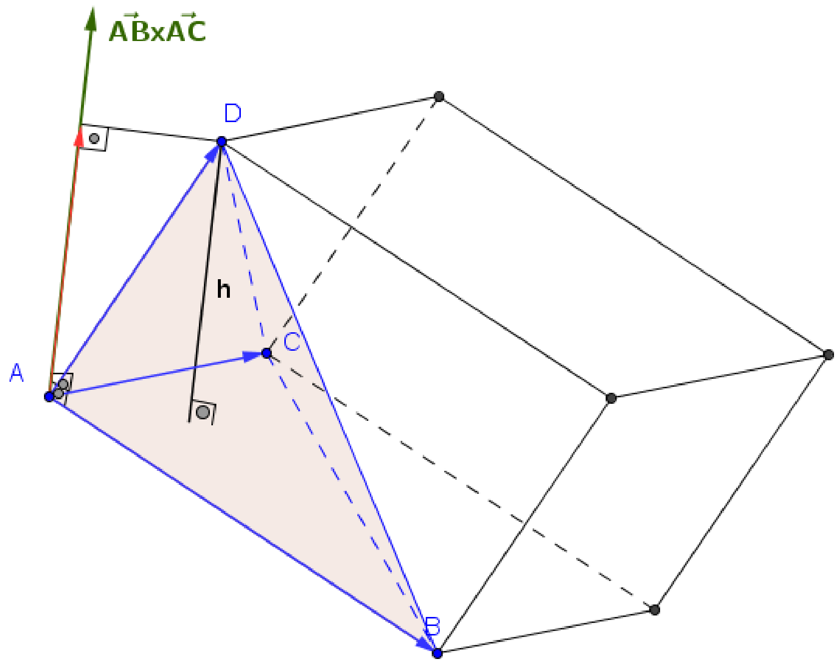
Volume de um tetraedro é $V = \frac{S \cdot h}{3}$

S área de base e h altura.

$$S = \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}{2}$$ e h $= \frac{\left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}$

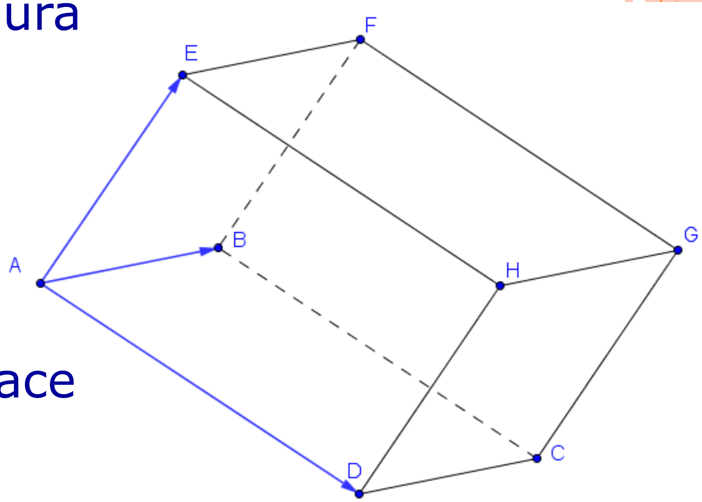
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}{2} \cdot \frac{\left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|}{\left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|}$$

$$V_{\text{tetraedro}} = \frac{\left| (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \right|}{6}$$



Interpretação Geométrica de Produto Misto

Exemplo 4: Considere o paralelepípedo da figura onde $\overrightarrow{AB} = (1,0,1), \overrightarrow{BE} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AD} = (0,3,3)$



Calcule

(a) O volume do paralelepípedo ABCDFEGH.

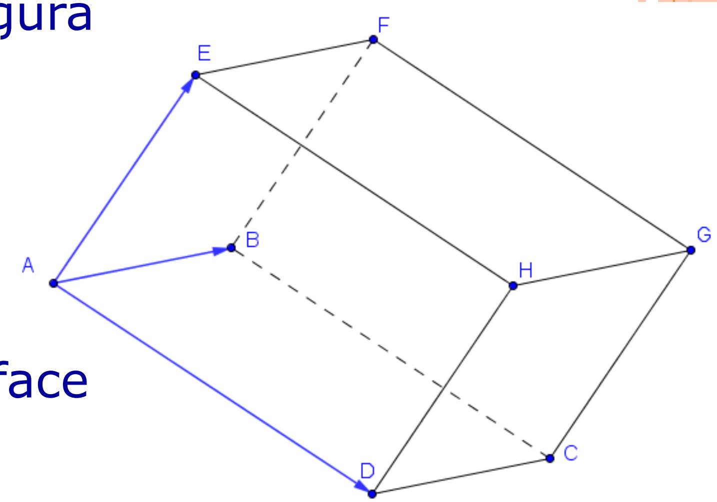
(b) O volume do tetraedro EABD.

(c) A altura do tetraedro EABD em relação à face DEB.

Solução:

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE PRODUTO MISTO

Exemplo 4: Considere o paralelepípedo da figura onde $\overrightarrow{AB} = (1,0,1), \overrightarrow{BE} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AD} = (0,3,3)$



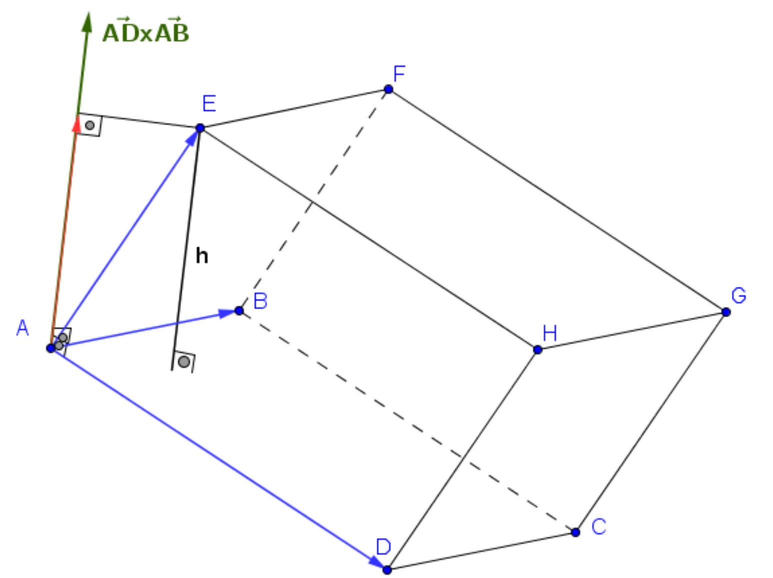
Calcule

(a) O volume do paralelepípedo ABCDFEGH.

(b) O volume do tetraedro EABD.

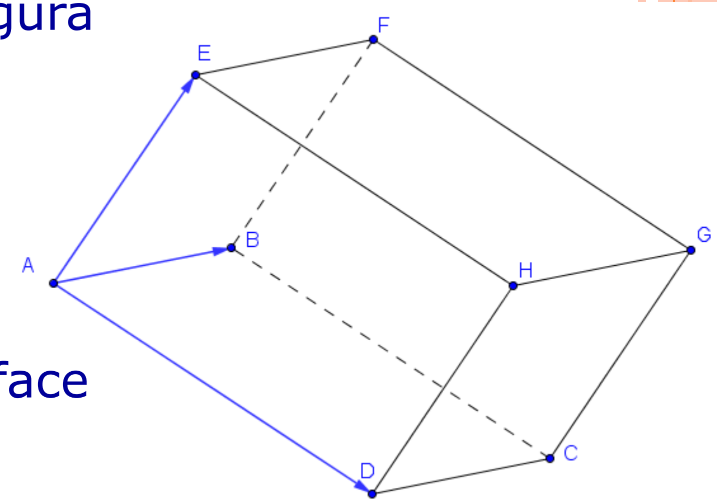
(c) A altura do tetraedro EABD em relação à face DEB.

Solução:



Interpretação Geométrica de Produto Misto

Exemplo 4: Considere o paralelepípedo da figura onde $\overrightarrow{AB} = (1,0,1), \overrightarrow{BE} = (1,1,1)$ e $\overrightarrow{AD} = (0,3,3)$



Calcule

(a) O volume do paralelepípedo ABCDFEGH.

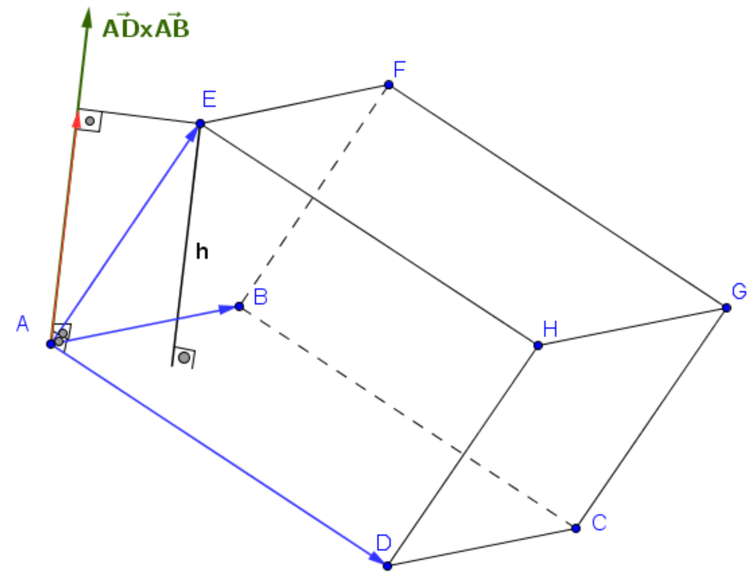
(b) O volume do tetraedro EABD.

(c) A altura do tetraedro EABD em relação à face DEB.

Solução:

a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = (1,0,1) + (1,1,1) = (2,1,2)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = 3(-1,-1,1)$



Qual é o ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$?

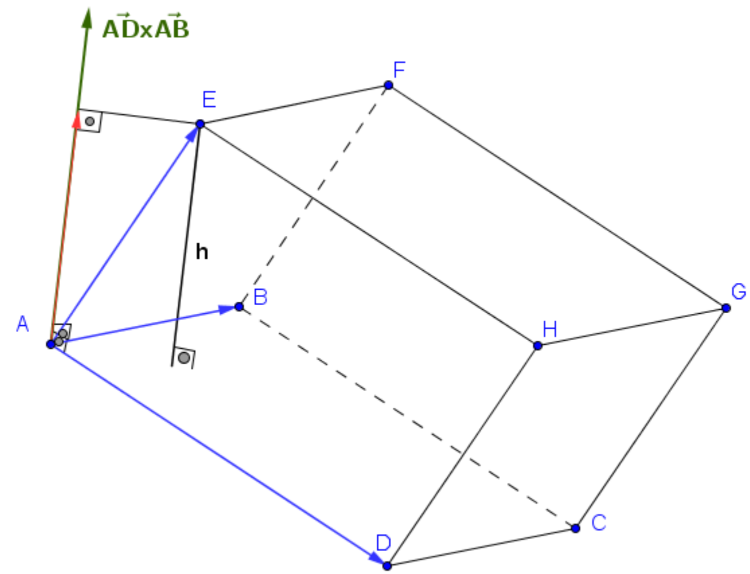
E o ângulo entre $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$?

Interpretação Geométrica de Produto Misto

Exemplo 4:

O volume do paralelepípedo é:

$$\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}\right| = |3(-2-1+2)| = 3$$



b) O volume do tetraedro EABD é:

$$V = \frac{\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}\right|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

c) Resolva!!

Reposta : $\frac{3}{\sqrt{26}}$