Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
Geometria Analítica Básica

Dirce Uesu Pesco

31/01/2013

EQUAÇÃO DO PLANO

Exemplos de planos: (Ver figuras e explicação na aula)

a) A equação $x = 0$ no espaço é equação de um plano!

b) A equação $3x + 2y = 7$ também é equação do plano no espaço!

Fique atento ao espaço que em as equações estão definidas!

Equação do plano xz : $y = 0$

Equação do plano yz : $x = 0$

Equação do plano xy : $z = 0$

Ângulo entre Dois Planos

Resumo (veja figuras e conteúdo explicado em sala de aula):

Dados os planos: $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

$\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

Seus respectivos vetores normais: $\overrightarrow{n_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a_2, b_2, c_2)$

O ângulo entre os planos α e β é:

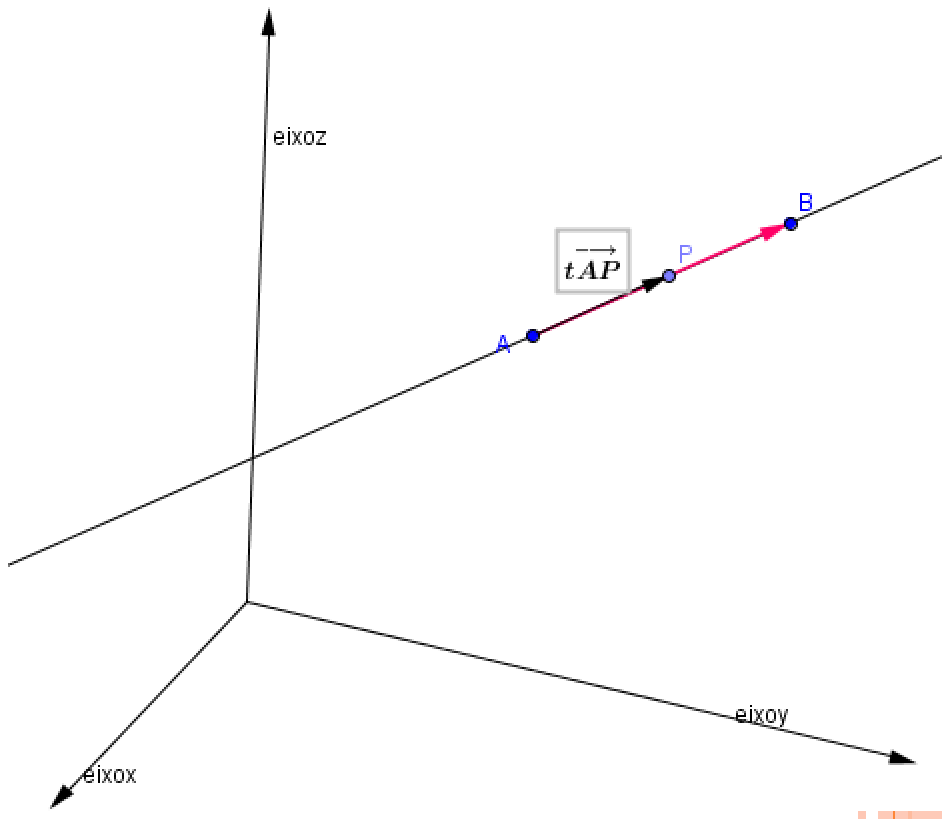
$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \, \|\overrightarrow{n_2}\|}$$

OBS: θ é o menor ângulo positivo tal que $\left|\cos(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB})\right| = \cos\theta$

Equação da Reta no Espaço

I) Dados dois pontos;

II) Dados um ponto e um vetor paralelo à reta.



Equação da Reta no Espaço

(I) Dados dois pontos $A(x_0, y_0, z_0)$ e $B(x_1, y_1, z_1)$

Se $P(x, y, z)$ é um ponto da reta, então

- a forma paramétrica dessa reta é :

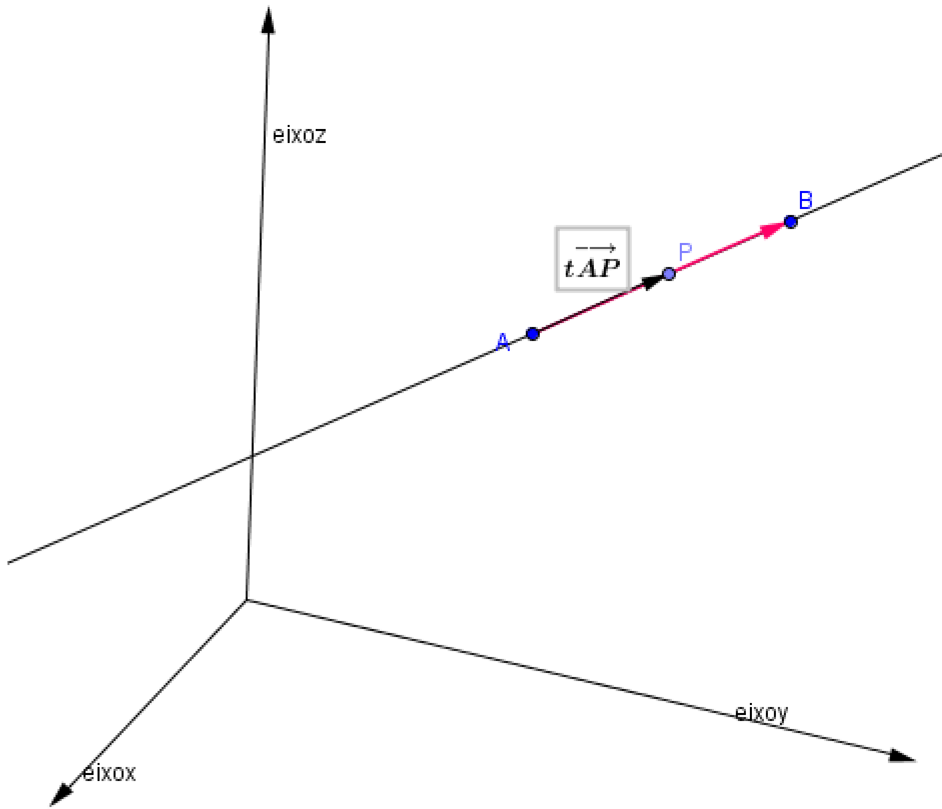
$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- a forma simétrica dessa reta é:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

Tal que $x_1 \neq x_0, y_1 \neq y_0$ e $z_1 \neq z_0$

Observe que



EQUAÇÃO DA RETA NO ESPAÇO

(I) Dados um ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ e o vetor $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Se $P(x, y, z)$ é um ponto da reta, então

- a forma paramétrica dessa reta é :

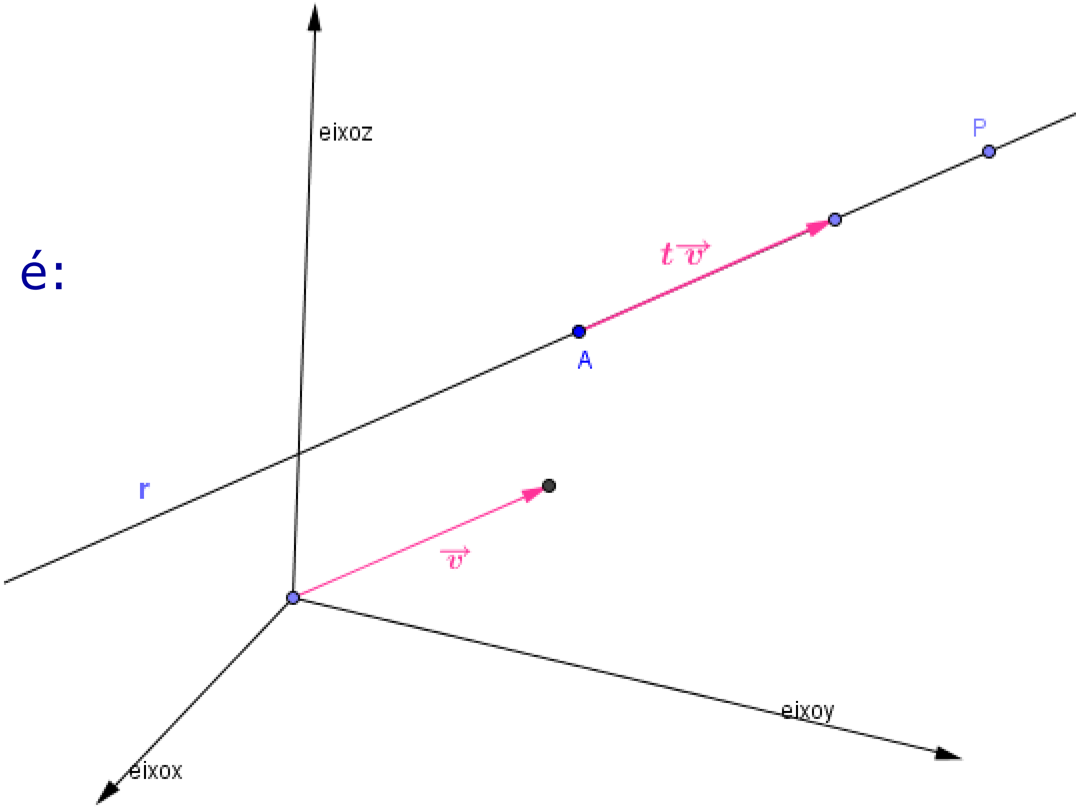
$$\begin{cases} x = x_0 + v_x k \\ y = y_0 + v_y k \ , k \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + v_z k \end{cases}$$

- a forma simétrica dessa reta é:

$$\frac{x - x_0}{v_x} = \frac{y - y_0}{v_y} = \frac{z - z_0}{v_z}$$

Tal que $v_x \neq 0, v_y \neq 0 \text{ e } v_z \neq 0$

Observe que



Equação da Reta no Espaço

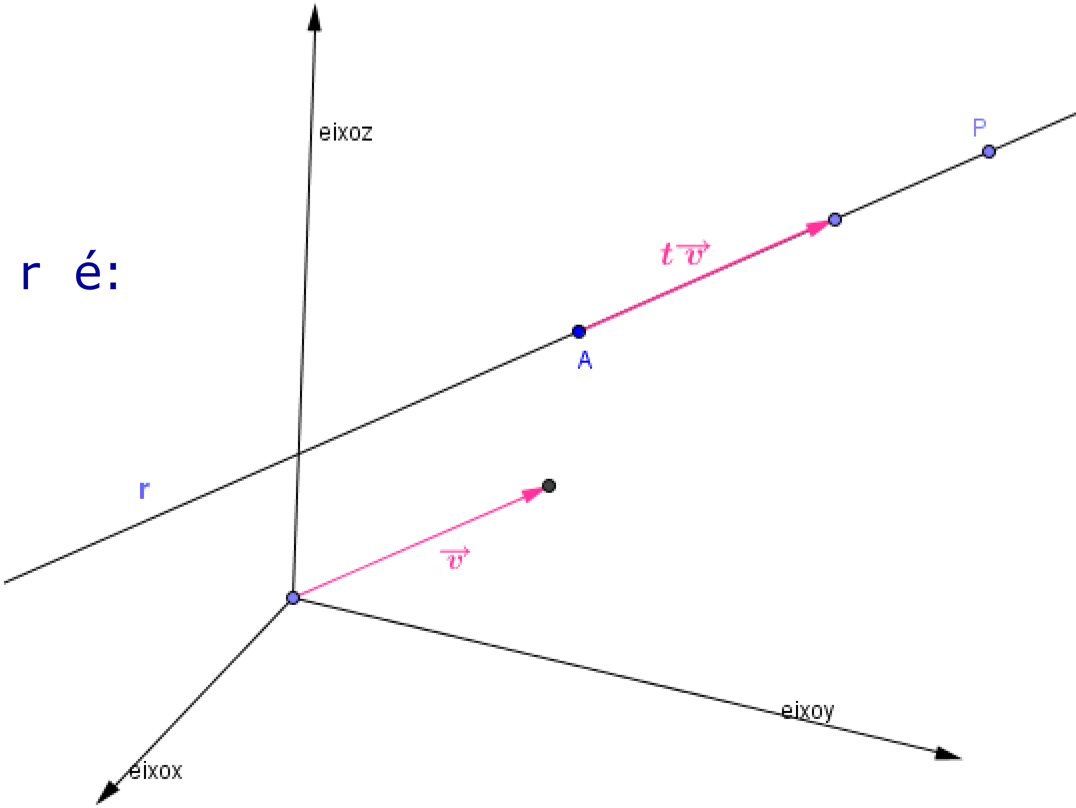
Exemplo: Encontre a equação da reta r que passa por P(1,0,2) e é Paralela ao vetor $\overrightarrow{v} = (2, -3, 1)$.

- a forma paramétrica da reta r é :

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 - 3t \; , t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + t \end{cases}$$

- a forma simétrica dessa reta r é:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-2}{1}$$



Equação da Reta no Espaço

Observe que se : $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-0}{-3} = \dfrac{z-2}{1}$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{-3} \Rightarrow -3(x-1) = 2y \Rightarrow 3x + 2y - 3 = 0$$

$$\alpha : 3x + 2y - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (3, 2, 0)$$

e

$$\frac{y-0}{-3} = \frac{z-2}{1} \Rightarrow y = -3(z-2) \Rightarrow y + 3z - 6 = 0$$

$$\beta : y + 3z - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (0, 1, 3)$$

Se $\overrightarrow{n_1} = (3, 2, 0)$ e $\overrightarrow{n_2} = (0, 1, 3)$

$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = (6, -9, 3) = 3(2, -3, 1)$ que é o vetor diretor da reta r.

Observe que a reta pode ser escrita por interseção dos planos:

$$\begin{cases} \alpha : 3x + 2y - 3 = 0 \\ \beta : y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

onde o vetor $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ é o vetor diretor da reta de interseção!!!

Equação da Reta no Espaço

Exercício1: Determine a equação do plano que contém a reta

$$r : \begin{cases} \alpha : 2x - y + z = 0 \\ \beta : x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

e que passa por A(1,2,1)

Exercício2: Mostre que a reta r dada pela interseção dos planos :

$$r : \begin{cases} \alpha : x + y - z = 0 \\ \beta : 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

está contida no plano $\gamma : 3x + 2y - 1 = 0$