

GGM00162

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Geometria Analítica Básica

20/12/2012- GGM - UFF

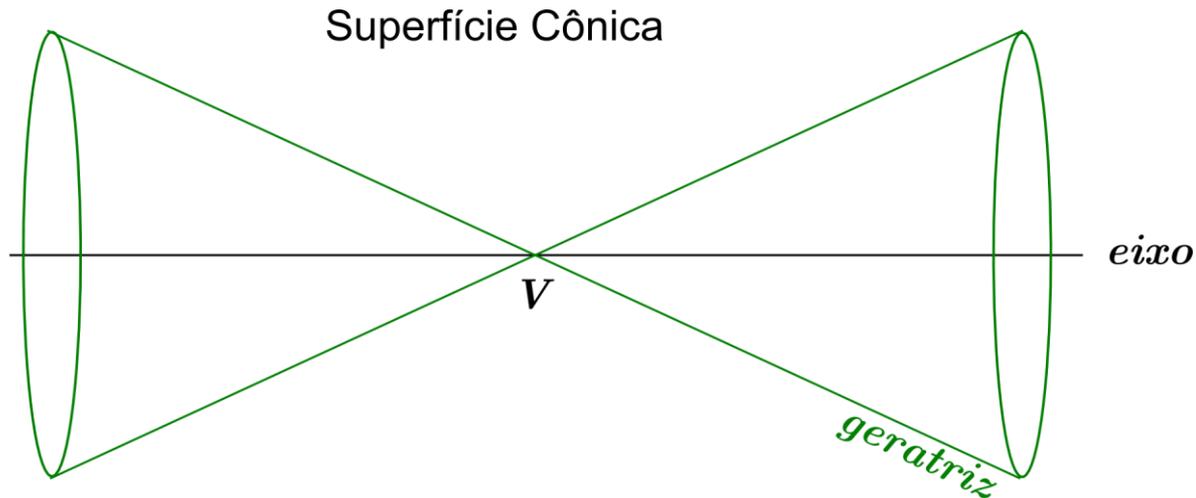
Dirce Uesu

CÔNICAS

DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA

Exercício: Acesse o sitio abaixo e use o programa:

<http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2005.1/gma04096/applets/conic/convic.html>

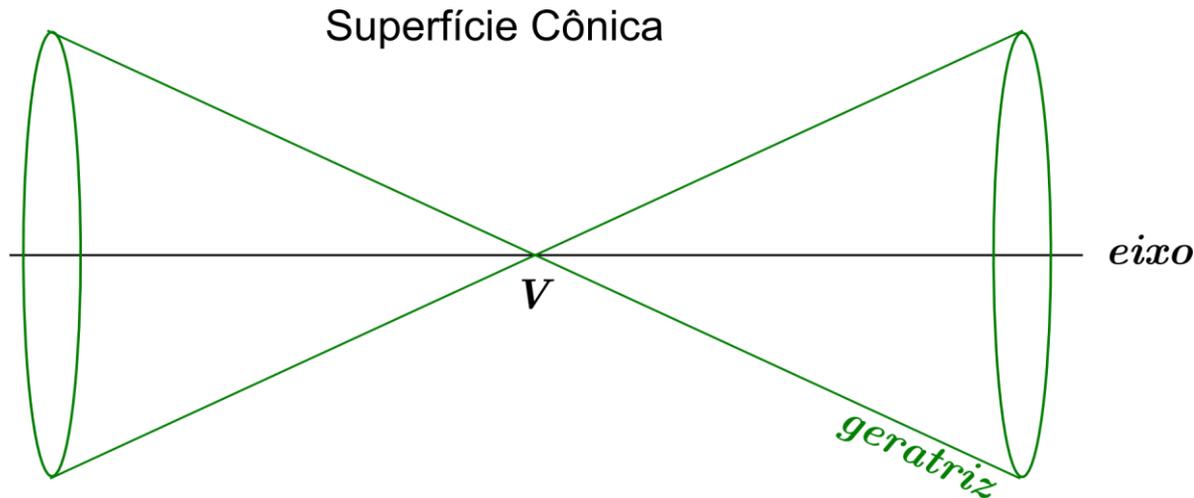


CÔNICAS

DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA

Exercício: Acesse o sitio abaixo e use o programa:

<http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2005.1/gma04096/applets/conic/conic.html>

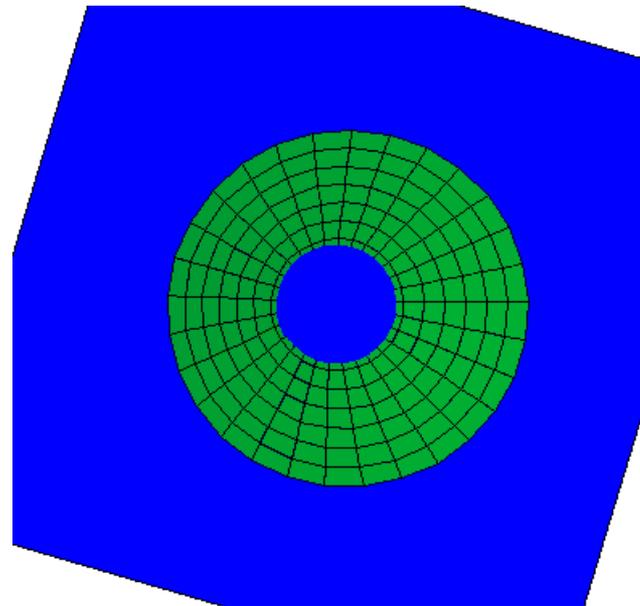
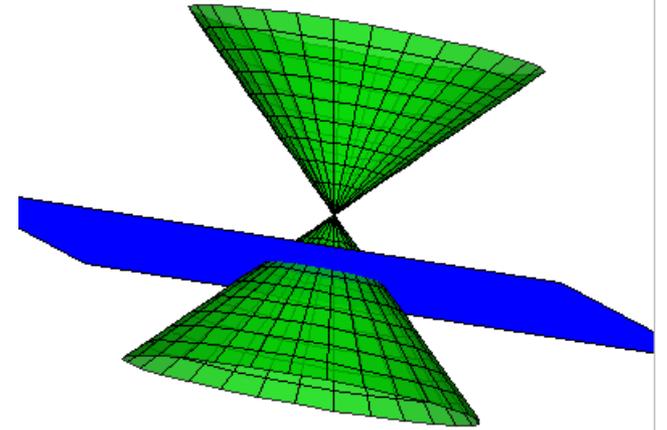
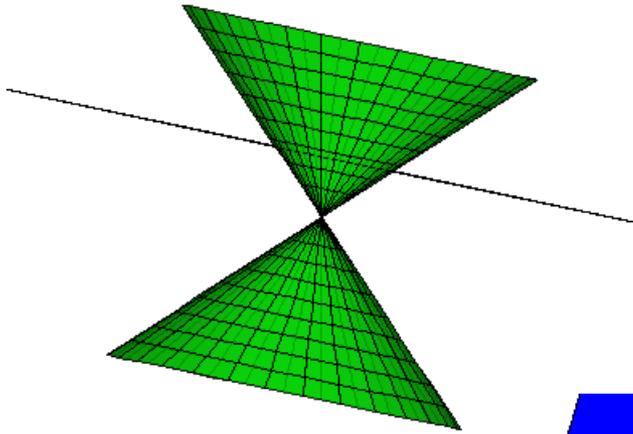


Seções Cônicas: curvas obtidas pela interseção da superfície cônica com um plano



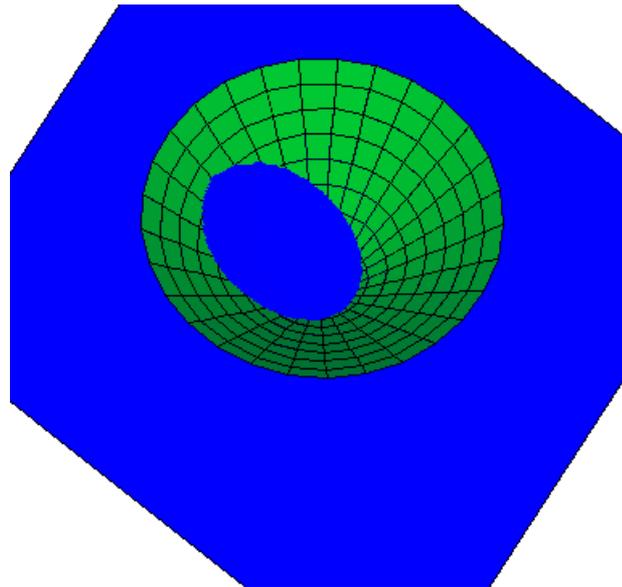
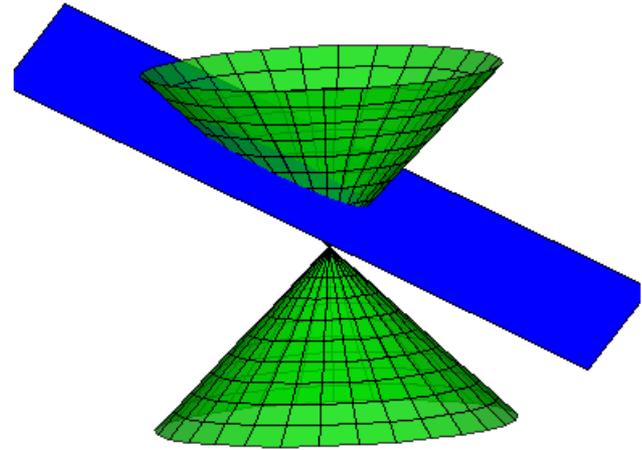
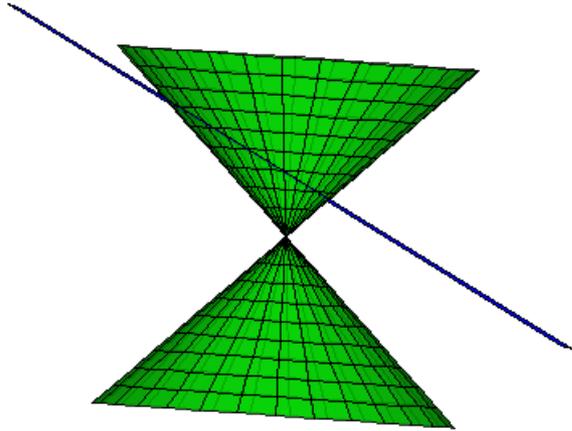
PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

CIRCUNFERÊNCIA



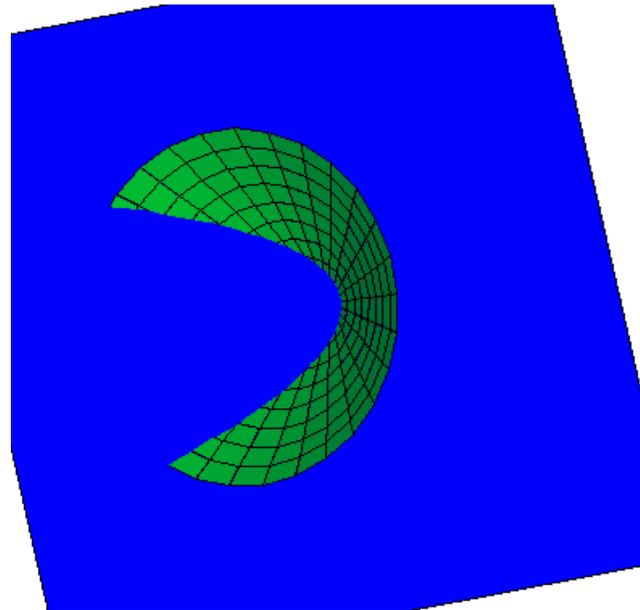
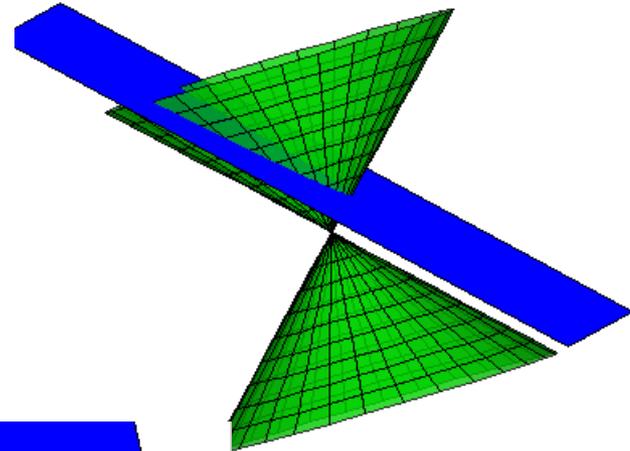
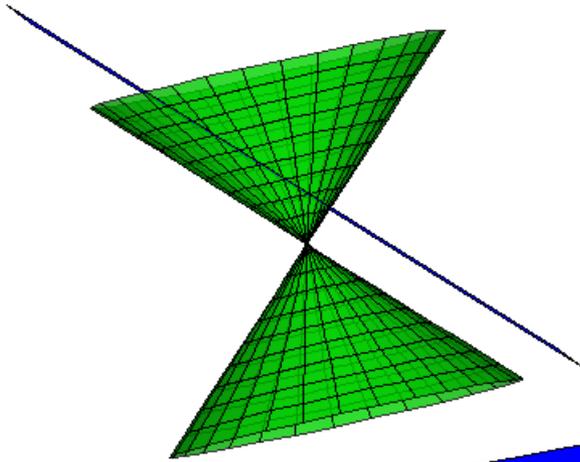
CÔNICAS

ELIPSE



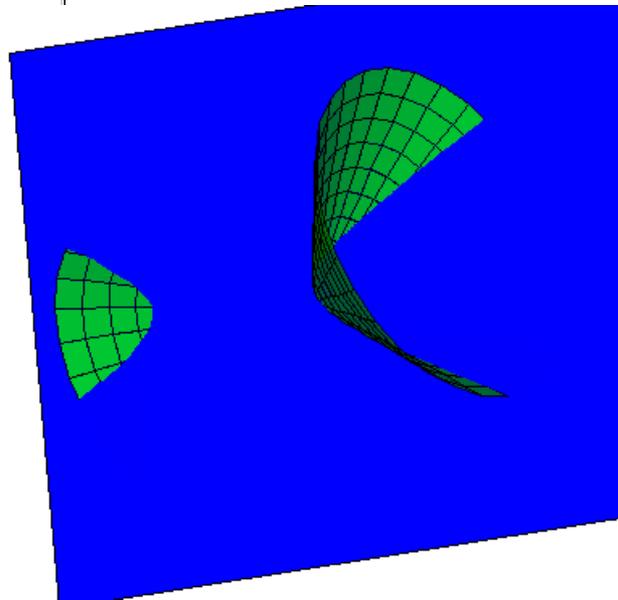
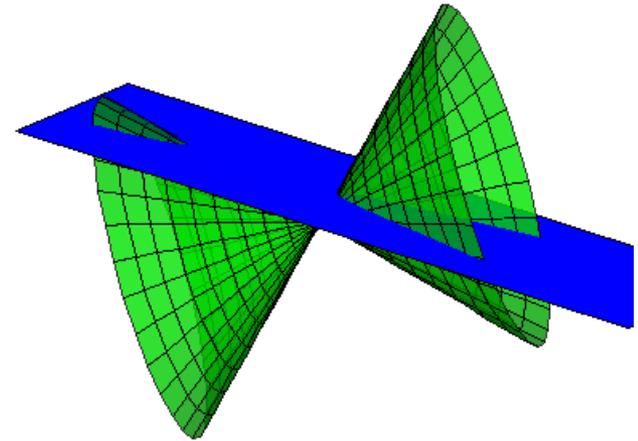
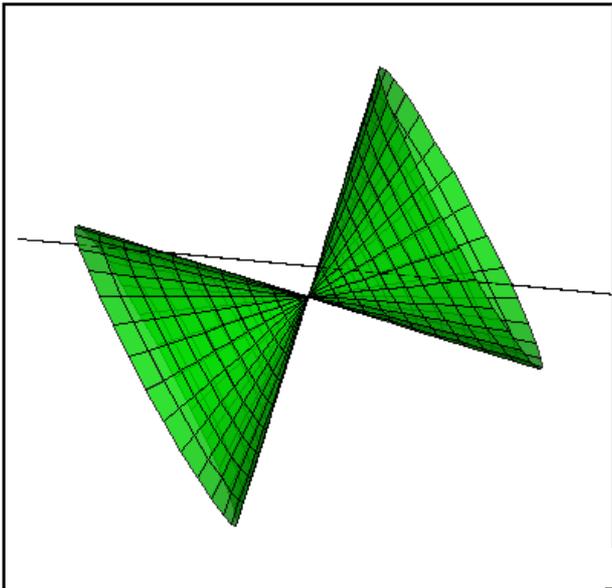
CÔNICAS

PARÁBOLA



CÔNICAS

HIPÉRBOLE



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

CIRCUNFERÊNCIA- REVISÃO

- Equação da circunferência com centro em $C(h,k)$ e raio $r > 0$:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

- Forma geral: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$D = -2h, \quad E = -2k, \quad F = h^2 + k^2 - r^2$$



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

CIRCUNFERÊNCIA- REVISÃO

- Equação da circunferência com centro na origem e raio $r > 0$:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

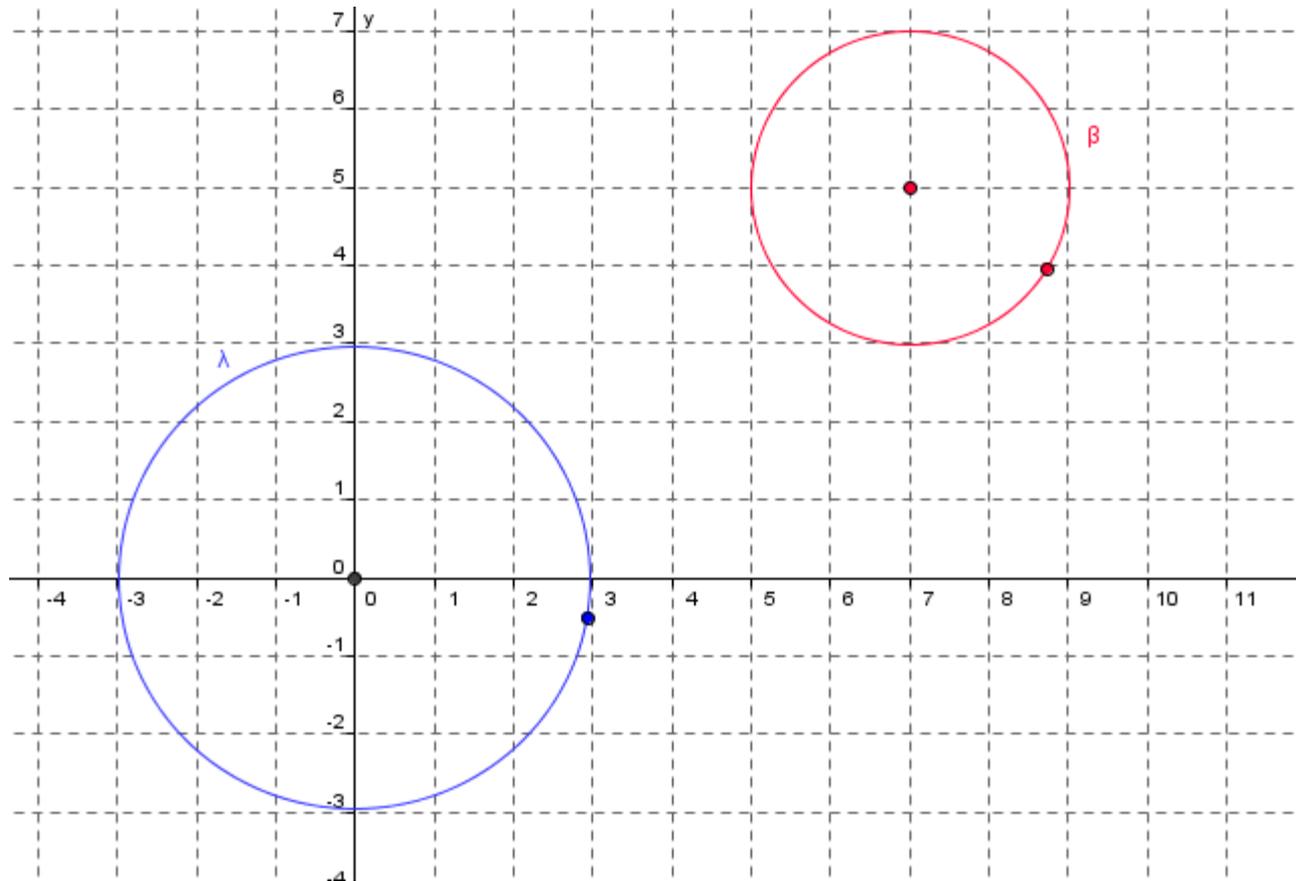
- Denominada forma canônica da equação da circunferência.



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

CIRCUNFERÊNCIA- REVISÃO

Exercício: Determine as equações das circunferências e da figura:



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

CIRCUNFERÊNCIA- REVISÃO

Exercício: Reduzir a equação da circunferência

$$2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$$

à forma padrão. Qual é o seu centro e seu raio?



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

CIRCUNFERÊNCIA- REVISÃO

Exercício: Reduzir a equação da circunferência

$$2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$$

à forma padrão. Qual é o seu centro e seu raio?

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 16$$



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

CIRCUNFERÊNCIA- REVISÃO

Exercício: Reduzir a equação da circunferência

$$2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$$

à forma padrão. Qual é o seu centro e seu raio?

Faça o esboço da curva!

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 16$$

Centro $C\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
Raio 4



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

CIRCUNFERÊNCIA- REVISÃO

Exercício: Reduzir a equação da circunferência

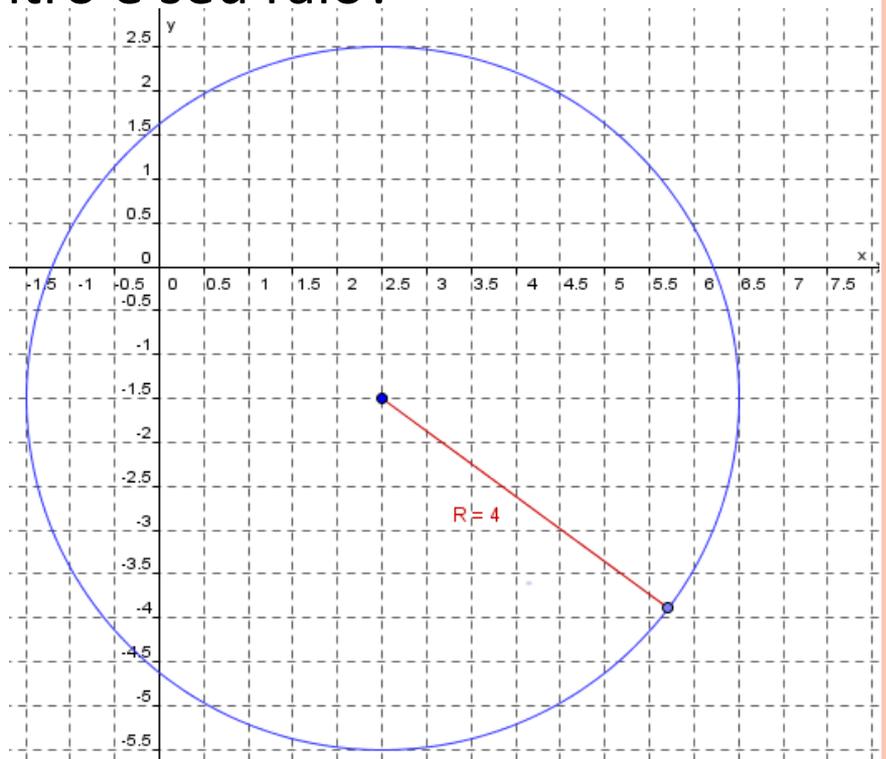
$$2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$$

à forma padrão. Qual é o seu centro e seu raio?

Faça o esboço da curva!

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 16$$

Centro $C\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$
Raio 4



CÔNICAS

- Equação geral do segundo grau a duas variáveis x e y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (*)$$

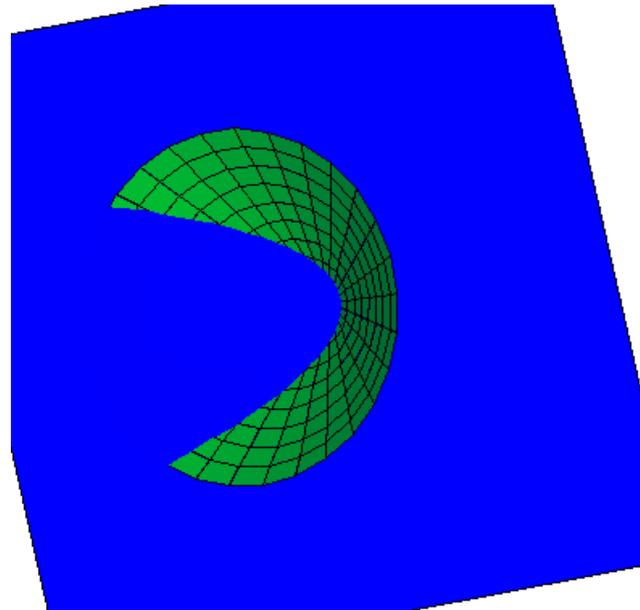
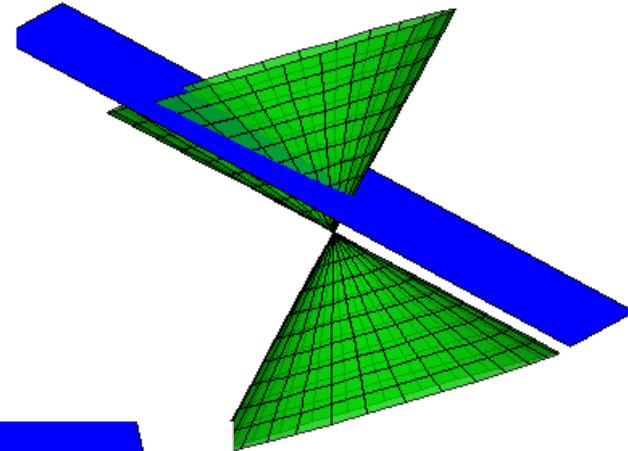
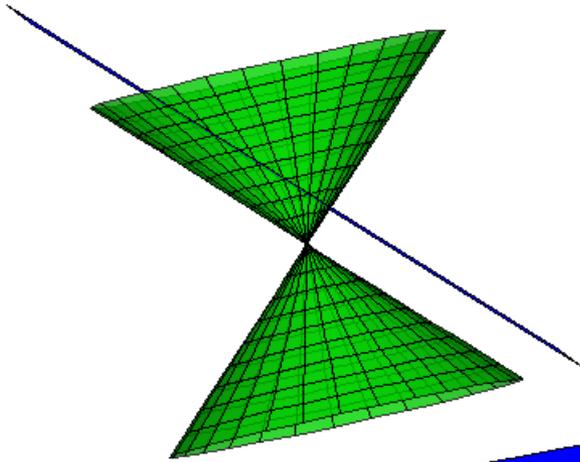
onde A , B e C não são simultaneamente nulos

- Se $A=B=C=0$, então $Dx + Ey + F = 0$, equação da reta no plano.
- Caso I : $B=0$
- Caso II $B \neq 0$



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

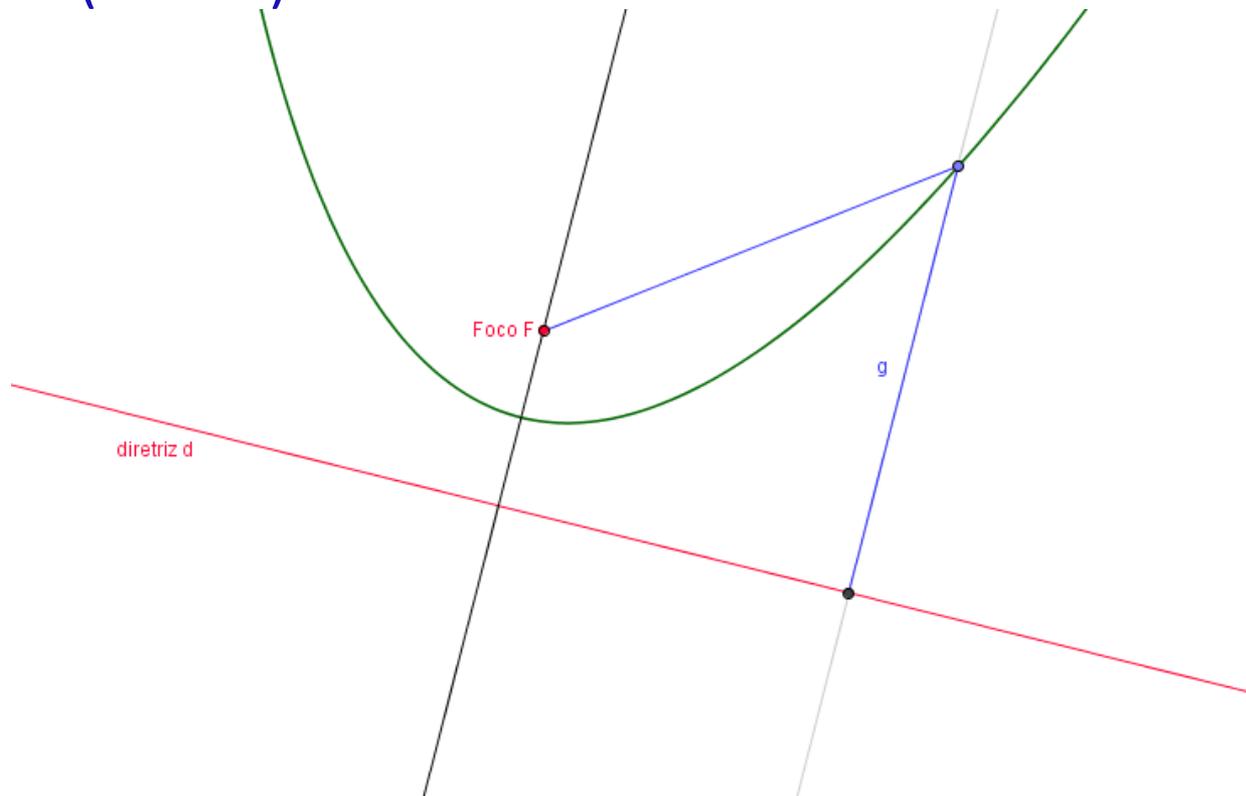
PARÁBOLA



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Definição: O conjunto dos pontos $P(x,y)$ do plano para os quais a distância a uma reta fixa (diretriz d) é igual à distância a um ponto fixo (foco F).



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Para determinar a equação da parábola, vamos introduzir o sistema de coordenadas cartesianas. Considere:

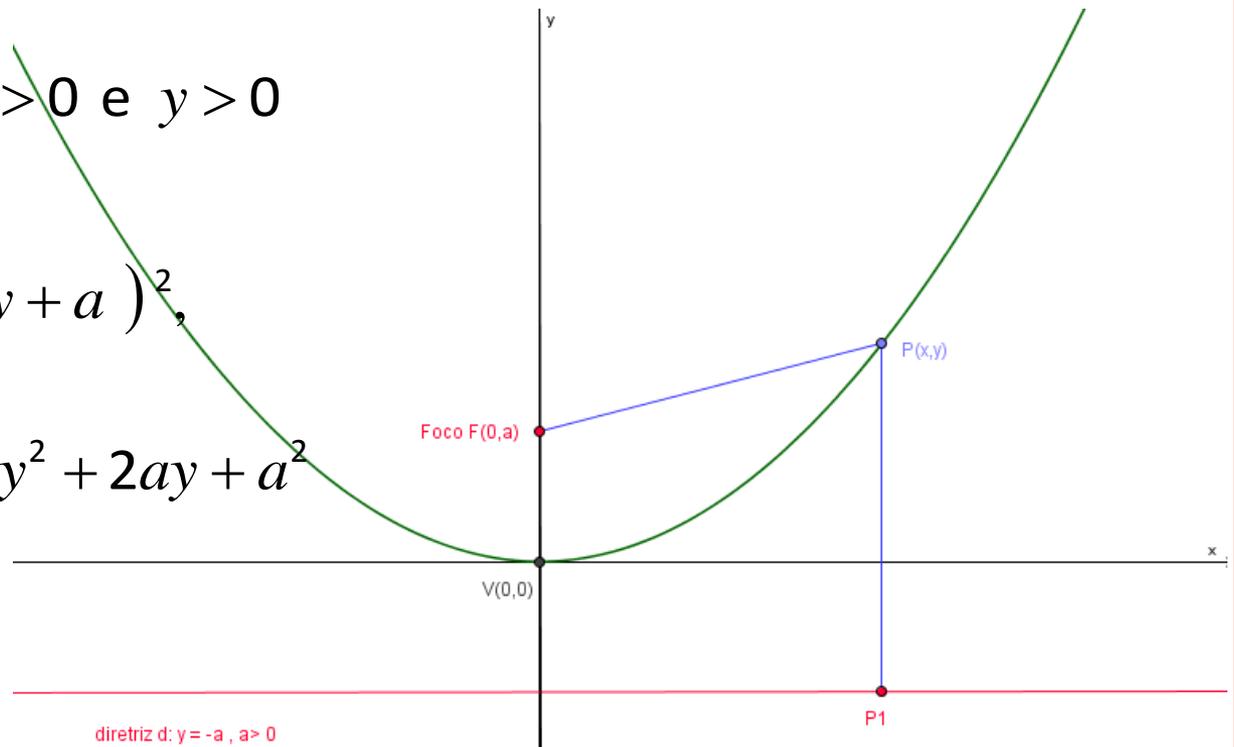
Foco $F(0,a)$, vértice $V(0,0)$ e diretriz $d: y = -a, a > 0$

$$\|\overrightarrow{FP}\| = y + a, \text{ onde } a > 0 \text{ e } y > 0$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y - a)^2}\right)^2 = (y + a)^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = y^2 + 2ay + a^2$$

$$x^2 = 4ay, \quad a > 0$$



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Exemplo 1 : Deduza a equação da parábola onde o foco tem coordenadas $F(0,3)$ e diretriz $y = -3$.

Seja $P(x,y)$ ponto da parábola. Observe que $a = 3 > 0$

$$\|\overrightarrow{FP}\| = y + 3$$

$$x^2 = -4ay, \quad a > 0$$

$$\left(\sqrt{x^2 + (y - 3)^2}\right)^2 = (y + 3)^2,$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9$$

$$x^2 = 12y$$



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

De maneira análoga, $P(x,y)$ ponto da parábola, deduza:

i) Foco $F(0,-a)$, vértice $V(0,0)$ e diretriz $d: y = a, a > 0$

$$x^2 = -4ay, \quad a > 0$$

Faça o esboço da figura.

ii) Foco $F(a,0)$, vértice $V(0,0)$ e diretriz $d: x = -a, a > 0$

$$y^2 = 4ax, \quad a > 0$$

Faça o esboço da figura.

iii) Foco $F(-a,0)$, vértice $V(0,0)$ e diretriz $d: x = a, a > 0$

$$y^2 = -4ax, \quad a > 0$$

Faça o esboço da figura.



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Exercício 1: Deduza a equação da parábola onde o foco tem coordenadas $F(3,0)$ e diretriz $x = -3$.

Exercício 2: Deduza a equação da parábola onde o foco tem coordenadas $F\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ e diretriz $x - \frac{1}{4} = 0$.

Faça o esboço da curva para cada exercício!



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Considere a equação $x^2 - 8x - y + 19 = 0$ (*)



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Considere a equação $x^2 - 8x - y + 19 = 0$ (*)

Completando quadrados obtém-se: $(x - 4)^2 = y - 3$



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Considere a equação $x^2 - 8x - y + 19 = 0$ (*)

Completando quadrados obtém-se: $(x - 4)^2 = y - 3$

Se $x' = x - 4$ e $y' = y - 3$

$$x'^2 = y'$$



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Considere a equação $x^2 - 8x - y + 19 = 0$ (*)

Completando quadrados obtém-se: $(x - 4)^2 = y - 3$

Se $x' = x - 4$ e $y' = y - 3$

$$x'^2 = y'$$

Faça o esboço desta parábola.

Quais são as coordenadas do foco, do vértice e a equação da reta diretriz de (*) ?



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Considere a equação $x^2 - 8x - y + 19 = 0$ (*)

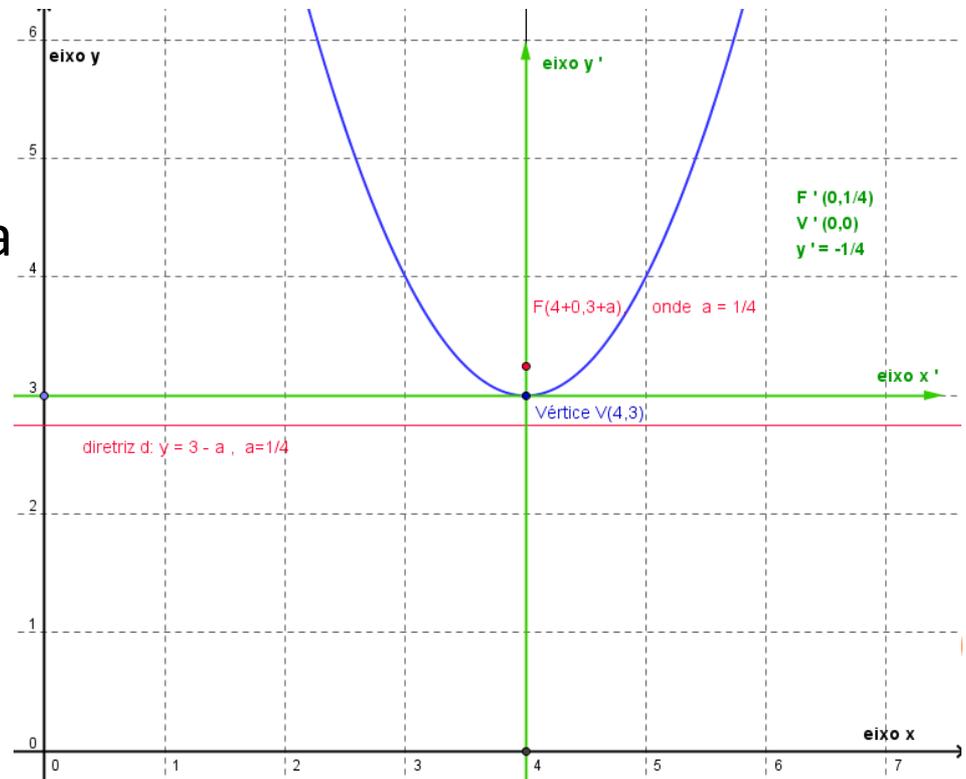
Completando quadrados obtém-se: $(x - 4)^2 = y - 3$

Se $x' = x - 4$ e $y' = y - 3$

$$x'^2 = y'$$

Faça o esboço desta parábola

Quais são as coordenadas do foco, do vértice e a equação da reta diretriz de (*) ?



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Exercício: Faça o esboço desta parábola.

$$y^2 - 6y - x + 3 = 0$$

Quais são as coordenadas do foco, do vértice e a equação de sua reta diretriz?



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Exercício:

Faça o esboço da parábola : $x^2=y$

determinando as coordenadas dos focos, dos vértices e a equação da reta diretriz.

Compare a resposta deste com o exemplo anterior e observe qual a relação entre ambos.



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Toda equação na forma

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ com } A \neq 0, E \neq 0$$

Representa uma parábola com eixo vertical. Desta maneira a equação pode ser escrita na forma

$$(x - h)^2 = 4a(y - k), \text{ com } a > 0$$

Ou

$$(x - h)^2 = -4a(y - k), \text{ com } a > 0$$

Onde $V(h,k)$ é o vértice .

Analogamente



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Toda equação na forma

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ com } C \neq 0, E \neq 0$$

Representa uma parábola com eixo horizontal . Desta maneira a equação pode ser escrita na forma

$$(y - k)^2 = 4a(x - h), \text{ com } a > 0$$

Ou

$$(y - k)^2 = -4a(x - h), \text{ com } a > 0$$

Onde $V(h,k)$ é o vértice .



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Exemplo 1: Determine a equação da parábola de cujo vértice é o ponto (3,4) e cujo foco é o ponto (3,2).

OBS: faça o esboço desta curva.

Exemplo 2: Mostre que a equação $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ é uma parábola e determine as coordenadas do seu vértice, foco e a equação da reta diretriz.



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Teorema: A equação do segundo grau nas variáveis x e y , mas desprovida do termo misto xy é:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se $A = 0$, $C \neq 0$ e $D \neq 0$ a equação representa uma parábola cujo eixo é paralelo ao (ou coincidente com) eixo x .

Se $D = 0$, a equação representa duas retas distintas paralelas ao eixo x , duas retas coincidentes paralela ao eixo x , ou nenhum lugar geométrico conforme as raízes de $Cy^2 + Ey + F = 0$ sejam reais e desiguais, reais e iguais ou complexas.

Exercício: Escreva o teorema, de maneira análoga, para o caso

$$A \neq 0, \quad C = 0 \quad \text{e} \quad E \neq 0$$



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Exemplo : Determine a equação da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo x e que passa pelos pontos $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 5)$ e $(-6, -7)$



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Exemplo : Determine a equação da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo x e que passa pelos pontos $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 5)$ e $(-6, -7)$

Resp: $y^2 + 8x - 2y - 15 = 0$



PRINCIPAIS ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

PARÁBOLA

Exercício : Determine o foco, o vértice, a equação da diretriz, o ponto em que a parábola intercepta o eixo x e o ponto onde a parábola intercepta o eixo y da equação:

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0$$

obtida no exemplo anterior.



CÔNICAS— PARÁBOLA

Exemplo:

- a) Determine a equação da parábola cujo vértice é o ponto (3,4) e cujo foco é o ponto (3,2).
- b) Mostre que a equação

$$4y^2 + 24x - 20y + 16 = 0$$

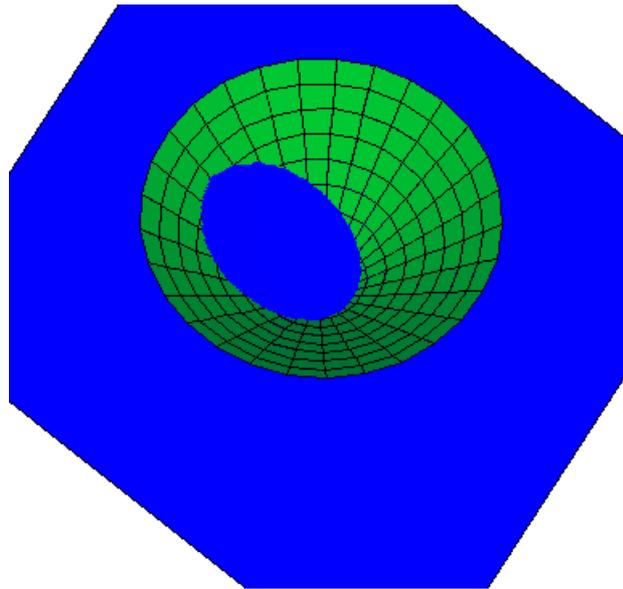
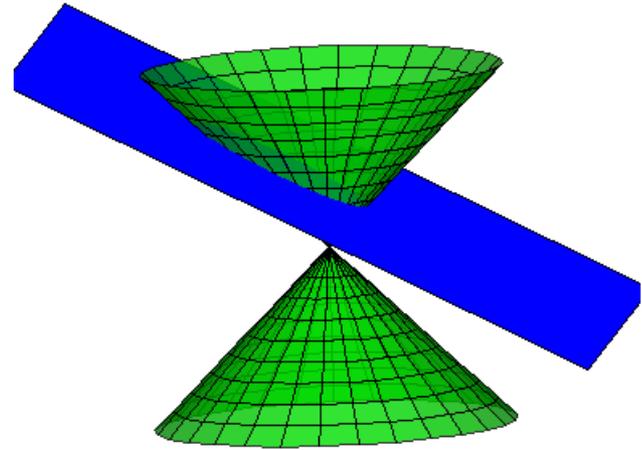
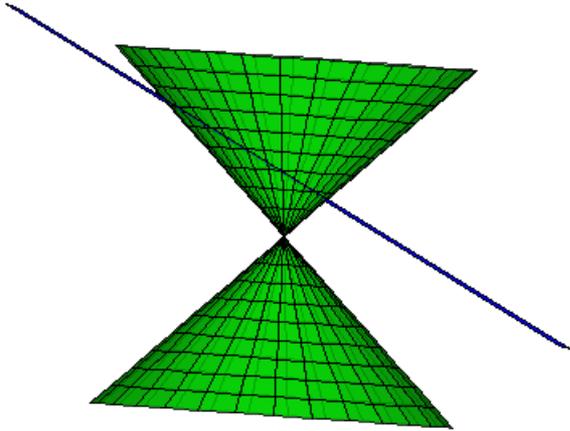
Representa uma parábola e determine as coordenadas de seu vértice, foco e equação da diretriz.

- c) Determine a equação da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo x e que passa pelos pontos (1,5;-1),(0,5) e (-6,-7)



CÔNICAS

ELIPSE



CÔNICAS

- Equação geral do segundo grau a duas variáveis x e y

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (*)$$

onde A , B e C não são simultaneamente nulos

- Se $A=B=C=0$, então $Dx + Ey + F = 0$, equação da reta no plano.
- Caso I : $B=0$
- Caso II $B \neq 0$

