

Aula 1 – Conceitos Básicos

A Geometria Elementar, também chamada *Geometria Euclidiana*, fundamenta-se em três entes geométricos aceitos sem definição: ponto, reta e plano.

Representação

Notação:

pontos: A, B, C, \dots

A
• ponto

retas: a, b, c, \dots

r
reta

planos: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

β
plano

Indicaremos por \overleftrightarrow{AB} uma reta que passa pelo pontos A e B .

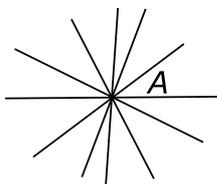
Postulado ou axioma é uma proposição aceita como verdadeira, sem demonstração.

Vamos dar exemplos de axiomas ou postulados.

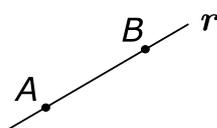
1. A reta é ilimitada nos dois sentidos.



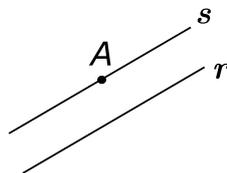
2. Por um ponto passam infinitas retas.



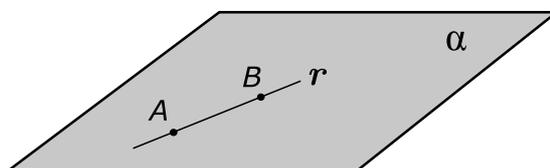
3. Por dois pontos distintos passa uma e somente uma reta.



4. Por um ponto, não pertencente a uma reta r , é possível traçar uma e somente uma reta paralela s . Este postulado é chamado de *Postulado de Euclides*.



5. Toda reta que passa por dois pontos distintos de um plano está contida nesse plano.



6. Um ponto O , de uma reta, divide-a em duas regiões denominadas semi-retas. O é denominado origem das duas semi-retas.



Notação: \overrightarrow{OA}

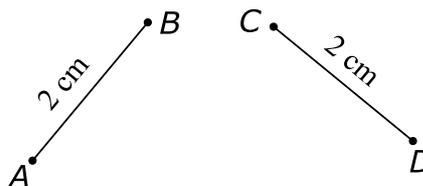
Definição: Dados dois pontos A e B de uma reta r , denomina-se segmento de reta AB a todos os pontos de r entre A e B . A e B são chamados de extremos.

Notação: \overline{AB}

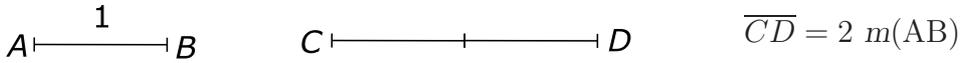
medida de um segmento $AB = m(AB)$

Definição: Segmentos congruentes tem medidas iguais e, reciprocamente, segmentos que tem medidas iguais são congruentes.

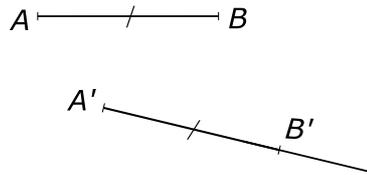
$$AB \equiv CD \quad \text{se} \quad m(AB) = m(CD)$$



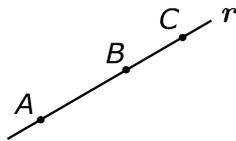
Medida de um Segmento: Para medir segmentos, tomamos um segmento como unidade e a partir daí, podemos medir qualquer outro segmento.



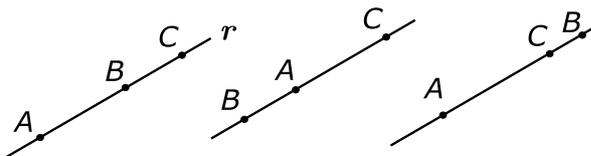
7. Postulado do Transporte de Segmentos: Dados um segmento AB e uma semi-reta de origem A' , existe sobre essa semi-reta um único B' tal que $A'B' \equiv AB$.



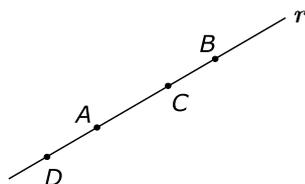
Definição: Pontos colineares são pontos que pertencem à uma mesma reta.



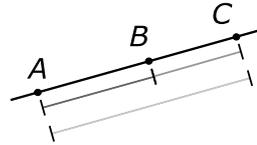
8. Dados três pontos colineares e distintos dois a dois, um deles, e apenas um, está entre os outros dois.



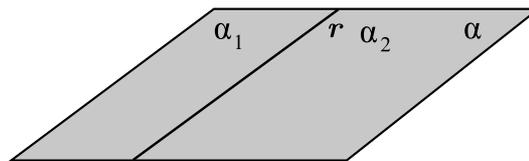
9. Dados dois pontos distintos A e B de uma reta r , existe sempre um ponto C que está entre A e B , e um ponto D tal que A está entre D e B .



10. Se B está entre A e C , então $m(AC) = m(AB) + m(BC)$



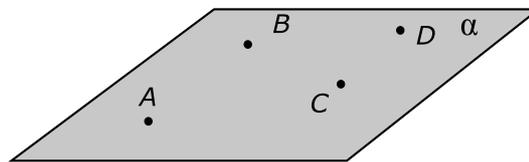
11. Uma reta pertencente a um plano, divide-o em duas regiões chamadas semiplanos sendo r a reta origem dos dois semiplanos.



Teorema é uma proposição aceita como verdadeira mediante demonstração.

Corolário é um resultado imediato de um teorema.

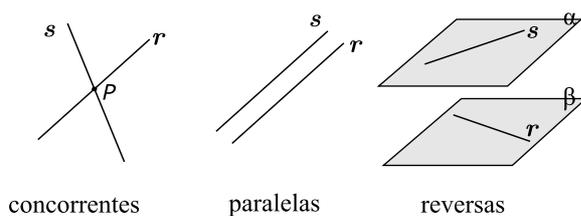
Pontos coplanares são pontos que pertencem a um mesmo plano.



12. Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Posições relativas entre duas retas distintas: Duas retas r e s são:

- 1) concorrentes se sua interseção é um ponto.
- 2) paralelas se são coplanares e não tem ponto em comum.
- 3) reversas se não são coplanares.



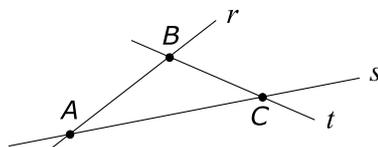
Exercícios Resolvidos

1. Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).

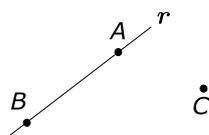
- a) Por um ponto passam infinitas retas. ()
- b) Por três pontos dados passa uma só reta. ()
- c) Três pontos distintos são colineares. ()
- d) Duas retas coplanares e distintas são concorrentes ou paralelas. ()
- e) Duas retas que não têm ponto em comum são paralelas. ()

Solução:

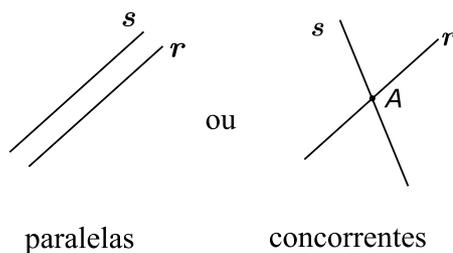
- a) (V), axioma.
- b) (F), por três pontos passam três retas.



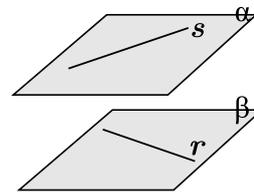
- c) (F), três pontos distintos não são colineares.



- d) (V),



e) (F), pois elas podem ser reversas e nessa caso não são paralelas.

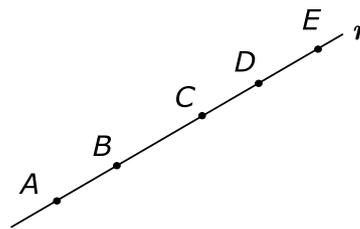


reversas

2. Quantas semi-retas há em uma reta com origem nos cinco pontos A, B, C, D e E ?

Solução:

Seja r a reta, e A, B, C, D, E pontos pertencentes a esta reta r .

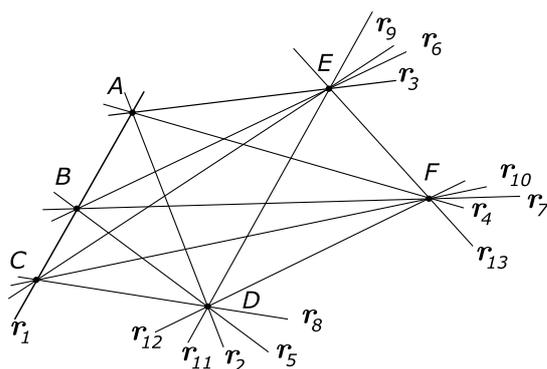


Pelo axioma 6, cada ponto determina duas semi-retas, então 5 pontos determinam 10 semi-retas.

3. Por seis pontos todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir?

Solução:

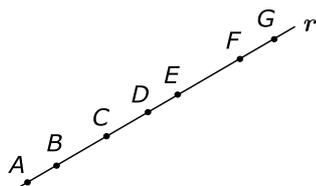
Considere seis pontos A, B, C, D, E, F distintos, sendo três deles (A, B e C) colineares, vamos construir todas as retas possíveis, usando o axioma 3.



São 13 retas.

Exercícios Propostos

1. Quantos segmentos há em uma reta, com origem nos sete pontos distintos, dada na figura a seguir?



2. A, B e C são três pontos distintos numa reta. Se \overline{AB} é igual ao dobro de \overline{BC} e $\overline{AC} = 18$ cm, determine \overline{AB} e \overline{BC} .
3. O segmento \overline{AB} de uma reta é igual ao quádruplo do segmento \overline{CD} dessa mesma reta. Determine a medida do segmento \overline{AB} , considerando-se como unidade de medida a sexta parte do segmento \overline{CD} .
4. Quatro retas distintas em um plano cortam-se em n pontos. Qual o maior valor que n pode assumir?

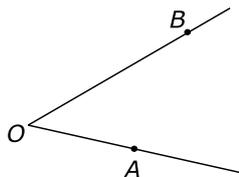
Gabarito

1. 14.
2. $\overline{AB} = 12$ cm e $\overline{BC} = 6$ cm ou $\overline{AB} = 36$ cm e $\overline{BC} = 18$ cm.
3. 30.
4. 6.

Ângulos

Definição: Ângulo geométrico é a reunião de duas semi-retas de mesma origem e não colineares.

Notação: \widehat{AOB} , onde O é o vértice.



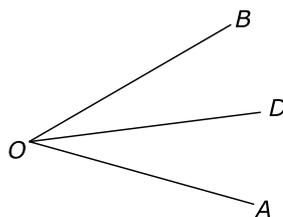
As semi-retas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} são os lados do ângulo.

Axioma 13: Um ângulo pode ser medido por meio de um instrumento chamado transferidor, que tem o grau como unidade. O número de graus de um ângulo é a sua medida. A medida de um ângulo geométrico é um número real α , tal que $0 < \alpha < 180^\circ$.

Notação: \widehat{AOB} : ângulo geométrico

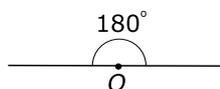
$m(\widehat{AOB})$: medida do ângulo \widehat{AOB}

Se \overrightarrow{OD} é uma semi-reta que divide \widehat{AOB} , então $m(\widehat{AOD}) + m(\widehat{DOB}) = m(\widehat{AOB})$.



Nota:

- 1) O ângulo de 180° é chamado raso e é quando os lados são semi-retas opostas.



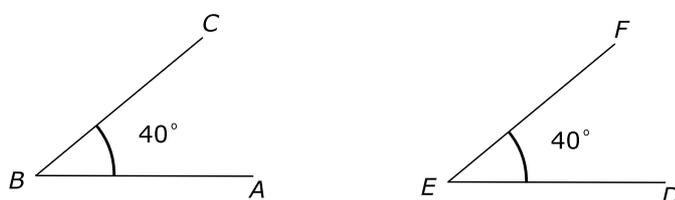
2) O ângulo de 0° é quando os lados coincidem.



3) Toda vez que houver referência a ângulo, entenda-se ângulo geométrico.

4) Dois ângulos são chamados congruentes se têm a mesma medida, na mesma unidade.

Exemplo:



Os ângulos \widehat{ABC} e \widehat{DEF} na figura são congruentes.

Notação: $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$.

Setor angular, interior de um ângulo, exterior de um ângulo

Definição: Seja um ângulo \widehat{AOB} num plano α e consideremos os semiplanos α_1 de origem na reta \overleftrightarrow{OA} que contém o lado \overrightarrow{OB} e α_2 , de origem na reta \overleftrightarrow{OB} e que contém \overrightarrow{OA} conforme a Figura 1. O conjunto dos pontos comuns aos semiplanos α_1 e α_2 denominamos de setor angular. A Figura 2 mostra um setor angular.

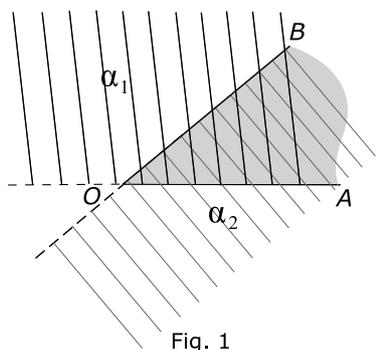


Fig. 1

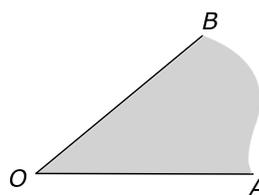
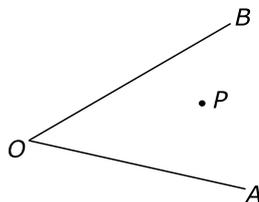
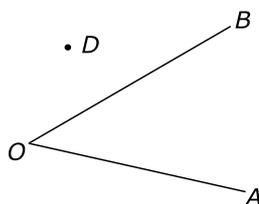


Fig. 2

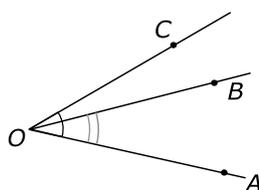
Definição: Um ponto que pertence ao setor angular e não pertence ao ângulo diz-se *ponto interior* ao ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$.



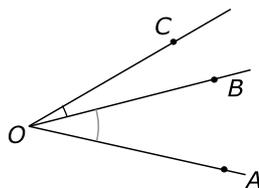
Definição: Um ponto do plano do ângulo que não pertence ao setor angular diz-se *ponto exterior* ao ângulo. O ponto D, na figura, é exterior ao ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$.



Definição: Ângulos que possuem o mesmo vértice e um lado comum são denominados *ângulos consecutivos*. Os ângulos $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{A\hat{O}C}$ são consecutivos.

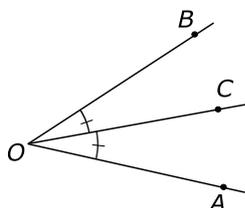


Definição: Dois ângulos consecutivos que não possuem ponto interior comum são denominados *ângulos adjacentes*.

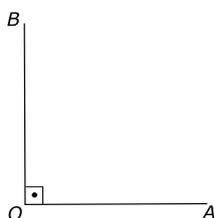


Os ângulos $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{B\hat{O}C}$ são adjacentes.

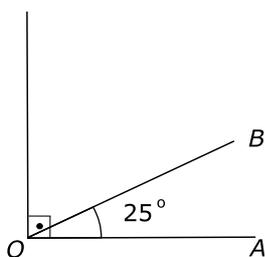
Definição: Bissetriz de um ângulo é a semi-reta interior ao ângulo, que determina com os seus lados, dois ângulos adjacentes e congruentes. Na figura, \overrightarrow{OC} é bissetriz do ângulo \widehat{AOB} .



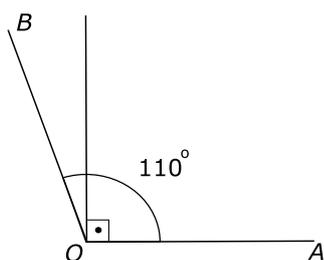
Definição: Ângulo reto é um ângulo cuja medida é 90° . Na figura \widehat{AOB} é reto, o símbolo \square representa um ângulo reto.



Definição: Ângulo agudo é um ângulo cuja medida é menor que 90° . Na figura, \widehat{AOB} é ângulo agudo.



Definição: Ângulo obtuso é um ângulo cuja medida é maior que 90° . Na figura, \widehat{AOB} é ângulo obtuso.



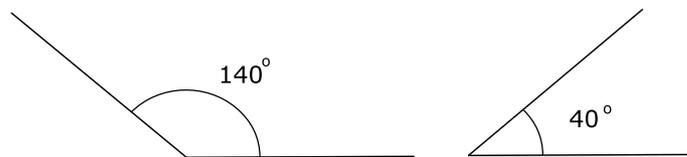
Definição: Dois ângulos são complementares se a soma de suas medidas é igual a 90° .

Exemplo:

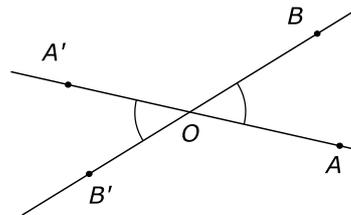


Definição: Dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas é igual a 180° .

Exemplo:



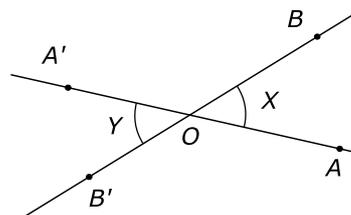
Definição: Dois ângulos são denominados opostos pelo vértice, se os lados de um são as semi-retas opostas dos lados do outro. Na figura, os ângulos $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{A'\hat{O}B'}$ são opostos pelo vértice.



Teorema: Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Prova:

Seja $\widehat{A\hat{O}B}$ e $\widehat{A'\hat{O}B'}$ dois ângulos opostos pelo vértice.



Denominamos $m(\widehat{AOB}) = X$ e $m(\widehat{A'OB'}) = Y$.

Temos que:

$$m(\widehat{AOA'}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{BOA'}) = 180 - X \quad (1)$$

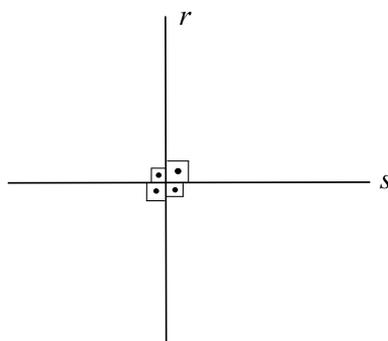
$$m(\widehat{BOB'}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{BOA'}) = 180 - Y \quad (2)$$

De (1) e (2) vem:

$$180 - X = 180 - Y \Rightarrow X = Y$$

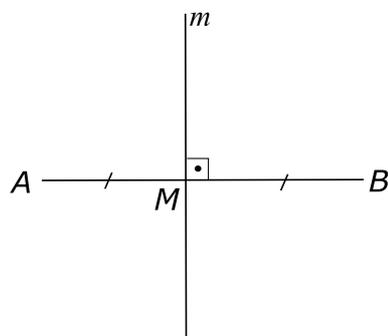
Logo, $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$.

Definição: Duas retas são *perpendiculares* se são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes. Na figura a seguir, r e s são perpendiculares.

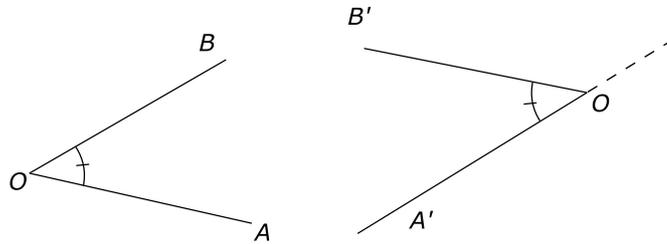


Decorre da definição que duas retas perpendiculares formam 4 ângulos retos.

Definição: *Mediatriz* de um segmento de reta é a reta perpendicular a este segmento que passa pelo ponto médio desse segmento. A figura mostra a reta m , mediatriz do segmento AB .



Axioma 14: Postulado de transporte de ângulos. Dado um ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$ e uma semi-reta $\overrightarrow{OA'}$ de um plano, existe sobre esse plano e num dos semi-planos que $\overrightarrow{OA'}$ permite determinar, uma única semi-reta $\overrightarrow{OB'}$ que forma com $\overrightarrow{OA'}$ um ângulo $\widehat{A'\hat{O}B'}$ congruente ao ângulo $\widehat{A\hat{O}B}$.



Sistema de unidades angulares

- a. Sistema sexagesimal

Unidade: grau, notação: $m^{\circ} \rightarrow m$ graus.

Definição: Um grau é $\frac{1}{90}$ de um ângulo reto.

Submúltiplos do grau são o minuto e o segundo.

$1 = 60'$ e $1' = 60''$.

- b. Sistema decimal

Unidade: grado, notação: $m \text{ gr} \rightarrow m$ grados.

Definição: Um grado é $\frac{1}{100}$ de um ângulo reto.

- Relação entre esses dois sistemas

Temos que:

$$1^{\circ} = \frac{1}{90} \text{ do ângulo reto}$$

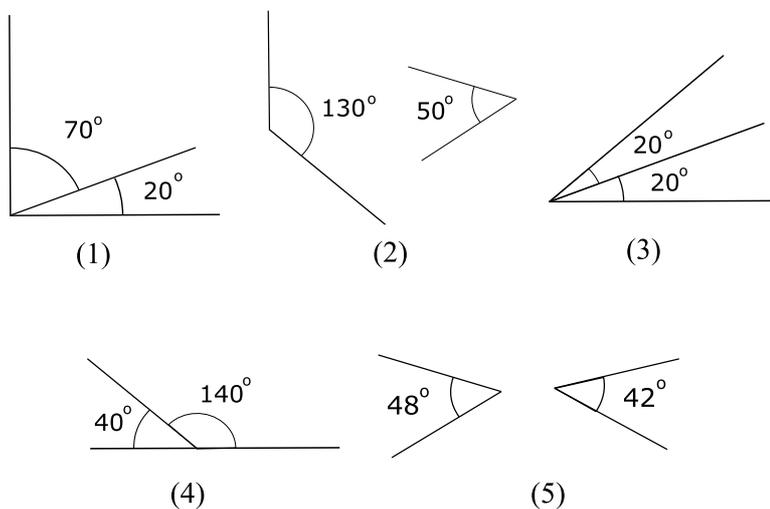
$$1 \text{ gr} = \frac{1}{100} \text{ do ângulo reto}$$

$$\Rightarrow 90^{\circ} \longleftrightarrow 100 \text{ gr}$$

Exercícios Resolvidos

1. Estabeleça a correspondência dos itens a seguir com as figuras de 1 a 5.

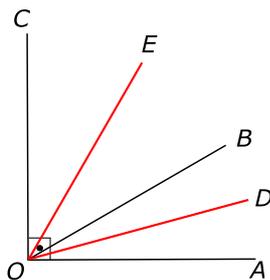
- a) bissetriz de um ângulo;
- b) ângulos complementares;
- c) ângulos suplementares;
- d) ângulos adjacentes e complementares;
- e) ângulos adjacentes e suplementares.



Resposta: a) 3; b) 5, c) 2; d) 1; e) 4.

2. Determine o ângulo entre as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e complementares.

Solução: Considere dois ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ adjacentes e complementares.



Tracemos as bissetrizes OD e OE desses ângulos, respectivamente. Denote $m(\widehat{AOB}) = X$ e $m(\widehat{BOC}) = Y$, vem que:

$$X + Y = 90^\circ$$

Temos que:

$$m(\widehat{DOB}) = \frac{X}{2} \text{ e } m(\widehat{BOE}) = \frac{Y}{2}$$

$$\Rightarrow m(\widehat{DOE}) = \frac{X}{2} + \frac{Y}{2} = \frac{X+Y}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

Logo, o ângulo entre as bissetrizes é 45° .

3. Calcule o complemento dos ângulos:

- a) 27° b) $32^\circ 38'$

Solução:

a) $90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$

b) $90^\circ - 32^\circ 38' = 89^\circ 60' - 32^\circ 38' = 57^\circ 22'$

4. Calcule o suplemento do complemento de 72° .

Solução: O complemento de 72° é $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

Daí, o suplemento do complemento de 72° é $180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$.

5. Calcule a medida de um ângulo cuja medida é igual a $\frac{3}{5}$ do seu suplemento.

Solução: Seja X a medida do ângulo procurado.

$180^\circ - X$ é a medida do suplemento do ângulo procurado, temos:

$$X = \frac{3}{5}(180 - X)$$

Resolvendo a equação vem:

$$5X = 540 - 3X \Rightarrow 8X = 540 \Rightarrow X = 67^\circ 30'$$

6. Dois ângulos opostos pelo vértice tem medidas expressas em graus por $4X - 20^\circ$ e $2X + 15^\circ$. Calcule as medidas desses ângulos.

Solução: Como os ângulos são opostos pelo vértice, então eles têm a mesma medida, ou seja:

$$4X - 20^\circ = 2X + 15^\circ \Rightarrow 2X = 35^\circ \Rightarrow X = \frac{35^\circ}{2} = 17^\circ 30'.$$

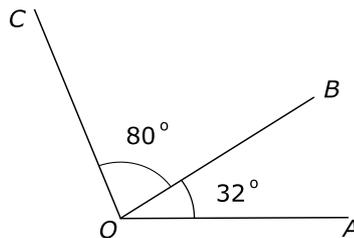
Assim, a medida de um deles é:

$$4X - 20^\circ = 4 \cdot 17^\circ 30' - 20^\circ = 50^\circ$$

Logo, os ângulos medem 50° .

Exercícios Propostos

- Calcule o suplemento dos ângulos:
a) 47° b) $34^\circ 20'$
- Dado um ângulo agudo de medida α , represente:
a) A quinta parte do seu complemento.
b) A décima parte do seu suplemento.
- Qual é a medida de um ângulo que excede o seu complemento de 69° ?
- As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são $34\theta - 8^\circ$ e $14\theta + 2^\circ$. Calcule θ .
- Prove que dois ângulos que têm o mesmo suplemento são congruentes.
- Na figura $m(\widehat{AOB}) = 32^\circ$ e $m(\widehat{BOC}) = 80^\circ$. Se OM é a bissetriz de \widehat{AOB} , ON é a bissetriz de \widehat{BOC} e OX é a bissetriz de \widehat{MON} , determine a medida do ângulo \widehat{XOC} .

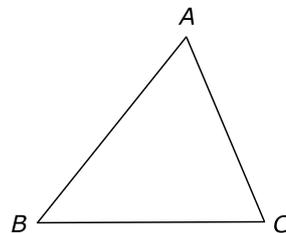


Gabarito

1. a) 133° , b) $145^\circ 40'$.
2. a) $\frac{1}{5}(90^\circ - \alpha)$, b) $\frac{1}{10}(180^\circ - \alpha)$.
3. $79^\circ 30'$.
4. $30'$.
5. Demonstração.
6. 68° .

Triângulos

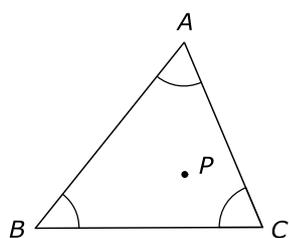
Definição: Triângulo é a união de três segmentos cujas extremidades são três pontos não colineares. A figura ao lado mostra um triângulo. Os pontos A , B e C são os vértices, e os segmentos AB , AC e BC são os lados do triângulo. Denotamos por $\triangle ABC$ um triângulo de vértices A , B e C .



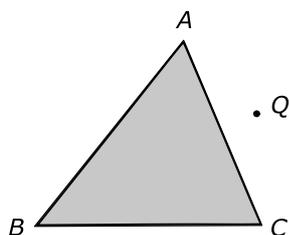
Definição: Chama-se *perímetro* de um triângulo o número que exprime a soma das medidas dos três lados.

Notação: $2p$.

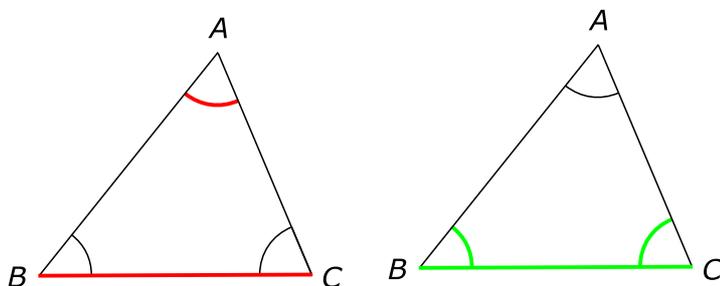
Definição: Os pontos comuns aos interiores dos ângulo $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são pontos interiores ao triângulo ABC . Na figura, o ponto P é interior ao triângulo. Os ângulos $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são os ângulos internos do triângulo.



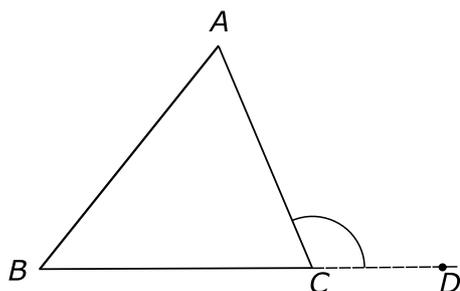
Definição: A união de um triângulo com o seu interior é chamada região triangular. Os pontos que não pertencem à região triangular são os pontos exteriores ao triângulo. Na figura, Q é um ponto exterior ao triângulo.



Definição: Num triângulo, lado oposto a um ângulo é o lado que une os vértices dos dois outros ângulos, lado adjacente a dois ângulos é o lado que une os vértices desses dois ângulos. Na figura, o lado BC é oposto ao ângulo \widehat{BAC} , e o lado BC é adjacente aos ângulos \widehat{ABC} e \widehat{ACB} .



Definição: Ângulo externo a um triângulo é aquele que é adjacente e suplementar a um de seus ângulos internos. Na figura ao lado, o ângulo \widehat{ACD} é um ângulo externo ao triângulo ABC .

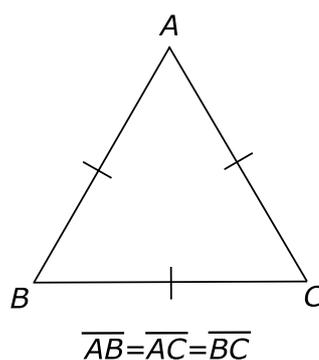


Classificação dos triângulos

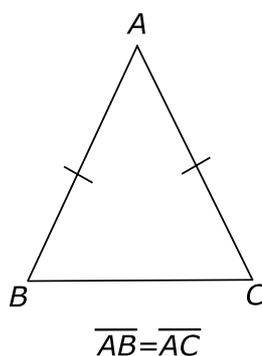
Podemos classificar os triângulos de dois modos:

1º Quanto aos lados:

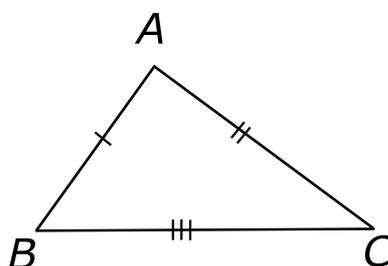
– Equilátero: os que têm os três lados congruentes.



– Isósceles: os que têm dois lados congruentes.

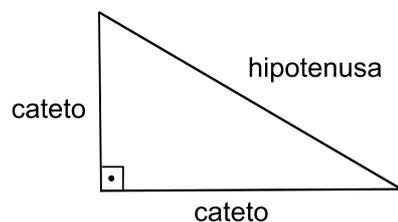


– Escaleno: os que têm os três lados não congruentes entre si.

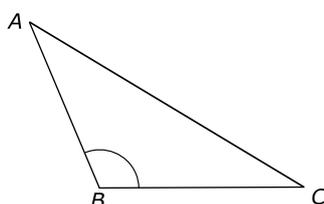


2º Quanto aos ângulos:

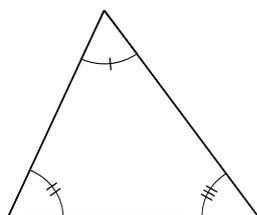
- Retângulos: quando têm um ângulo reto.



- Obtusângulos: quando têm um ângulo obtuso.

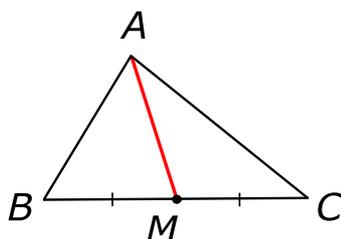


- Acutângulos: quando têm os três ângulos agudos.

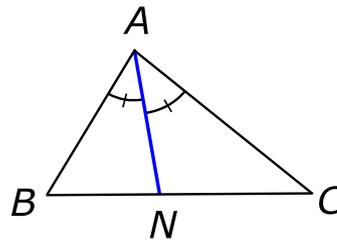


Elementos notáveis de um triângulo

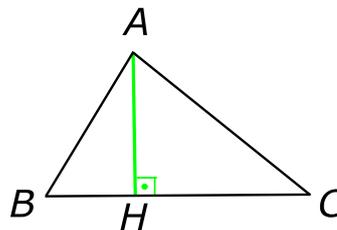
Mediana de um triângulo é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. Na figura, AM é uma mediana do triângulo ABC.



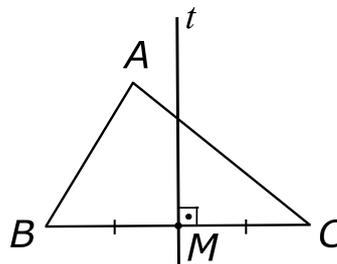
Bissetriz de um triângulo é o segmento da bissetriz de um ângulo interno que tem por extremidades o vértice desse ângulo e o ponto de encontro com o lado oposto. Na figura, AN é uma bissetriz do triângulo ABC.



Altura de um triângulo é o segmento da perpendicular traçada de um vértice à reta suporte do lado oposto, cujos extremos são esse vértice e o ponto de encontro com essa reta. Na figura, AH é uma altura do triângulo ABC .



Mediatriz de um triângulo é a mediatriz de um de seus lados. Na figura, a reta t é a mediatriz do lado BC do triângulo ABC .



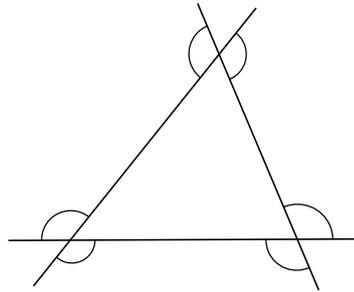
Exercícios Resolvidos

Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).

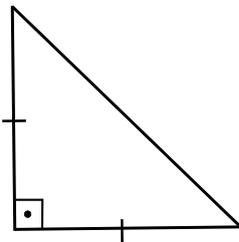
- a) Um triângulo possui três ângulos externos. ()
- b) Um triângulo isósceles é sempre acutângulo. ()
- c) Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles. ()
- d) Um triângulo isósceles pode ser equilátero. ()

Solução:

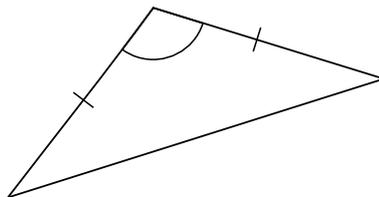
a) (F), pois possui seis ângulos externos.



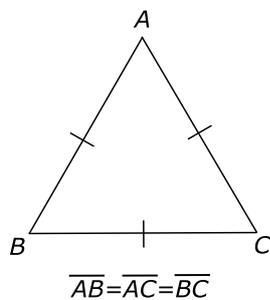
b) (F), pois existe triângulo isósceles que é triângulo retângulo, por exemplo.



c) (V), basta que o ângulo formado pelos lados congruentes seja obtuso.



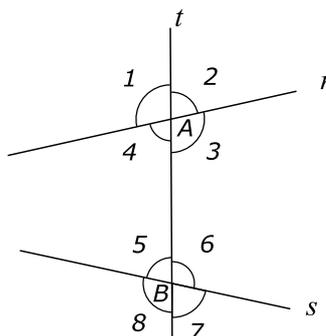
d) (V), basta que possua os três lados congruentes.



Retas paralelas

Lembre-se de que já vimos a definição de retas paralelas em posições relativas entre duas retas distintas e também o postulado 4. (Postulado de Euclides).

Definição: Duas retas r e s de um mesmo plano interceptados pela transversal t formam oito ângulos. Os pares de ângulos, um com vértice em A e o outro em B , conforme figura, são denominados:



$$\text{ângulos correspondentes: } \left\{ \begin{array}{l} \hat{1} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{8} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{6} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{7} \end{array} \right.$$

$$\text{ângulos alternos internos } \left\{ \begin{array}{l} \hat{4} \text{ e } \hat{6} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{5} \end{array} \right.$$

$$\text{ângulos alternos externos } \left\{ \begin{array}{l} \hat{1} \text{ e } \hat{7} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{8} \end{array} \right.$$

$$\text{ângulos colaterais externos } \left\{ \begin{array}{l} \hat{1} \text{ e } \hat{8} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{7} \end{array} \right.$$

$$\text{ângulos colaterais internos } \left\{ \begin{array}{l} \hat{4} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{6} \end{array} \right.$$

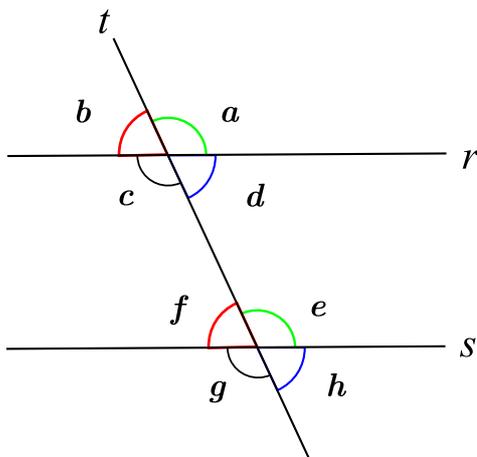
Vamos considerar verdadeira a propriedade a seguir, mas depois que estudarmos congruência, podemos demonstrar tal propriedade.

Propriedade: Uma reta transversal a duas retas paralelas formam ângulos que obedecem às relações seguintes:

1º Os ângulos correspondentes e os ângulos alternos são congruentes.

2º Os ângulos colaterais são suplementares.

Seja t uma transversal as retas r e s e $r \parallel s$.



$$a = e, b = f, c = g, d = h \text{ (correspondentes)}$$

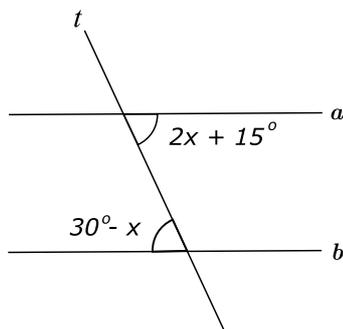
$$c = e, d = f, a = g, b = h \text{ (alternos internos e alternos externos)}$$

$$c + f = d + e = b + g = a + h = 180^\circ \text{ (colaterais)}$$

Nota: As recíprocas das propriedades 1ºe 2º são verdadeiras.

Exercícios Resolvidos

1. Na figura, as retas a e b são paralelas. Calcule o valor de x .

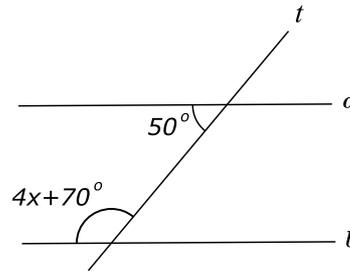


Solução:

Sendo $2x + 15^\circ$ e $30^\circ - x$ as medidas de dois ângulos alternos internos, temos:

$$30^\circ - x = 2x + 15^\circ \Rightarrow -x - 2x = 15^\circ - 30^\circ \Rightarrow 3x = 15^\circ \Rightarrow x = 5^\circ$$

2. Na figura, as retas a e b são paralelas. Calcule o valor de x .

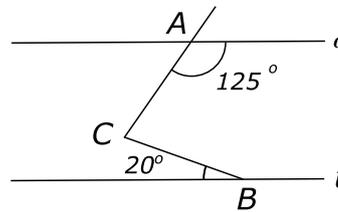


Solução:

Sendo $4x + 70^\circ$ e 50° as medidas de dois ângulos colaterais internos, temos:

$$4x + 70^\circ + 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow 4x = 180^\circ - 120^\circ \Rightarrow 4x = 60^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$$

3. Na figura, as retas a e b são paralelas. Calcule a medida do ângulo \widehat{ACB} .



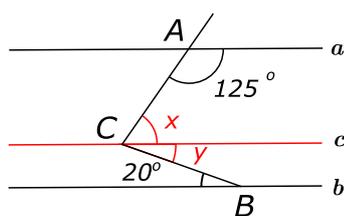
Solução:

Seja a figura dada. Trace por C uma reta $c \parallel a$, e seja $m(\widehat{ACB}) = X + Y$ conforme a figura.

$$\text{Logo } 125^\circ + X = 180^\circ \text{ (ângulos colaterais internos)} \Rightarrow X = 55^\circ.$$

$$Y = 20^\circ \text{ (ângulos alternos internos).}$$

$$\text{Logo, } m(\widehat{ACB}) = 55^\circ + 20^\circ = 75^\circ.$$



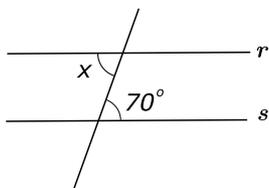
4. Duas retas distintas a e b de um plano, cortados por uma transversal t , formam ângulos colaterais internos, cujas medidas em graus são, respectivamente, $6X - 30^\circ$ e $2X + 34^\circ$. Determine X de modo que as retas a e b sejam paralelas.

Solução:

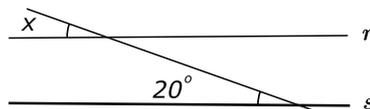
Queremos que as retas a e b sejam paralelas, então $6X - 30^\circ + 2X + 34^\circ = 180^\circ$ (ângulos colaterais internos) $\Rightarrow 8X = 176^\circ \Rightarrow X = 22^\circ$.

Exercícios Propostos

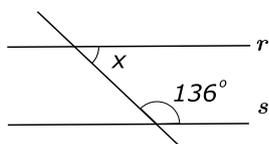
1. Em cada figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Calcule o valor de x .



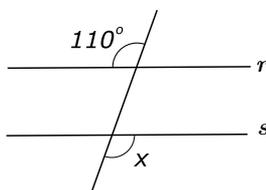
(a)



(b)

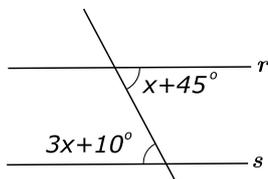


(c)

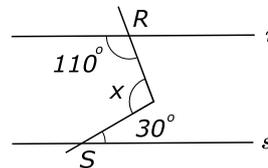


(d)

2. Em cada figura, a seguir, as retas r e s são paralelas. Calcule o valor de x .

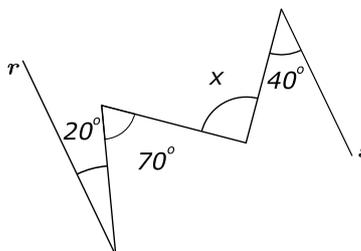


(a)

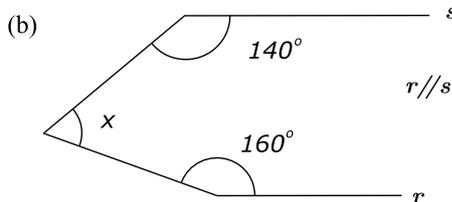
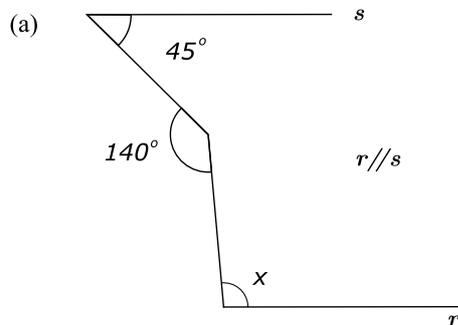


(b)

3. Seja na figura $r \parallel s$, calcule o valor de x .



4. Na figura a seguir, calcule x .



Gabarito

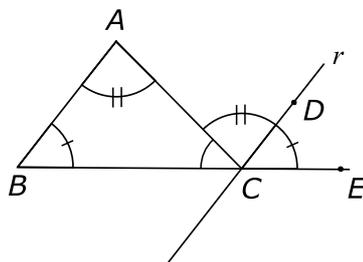
1. a) $x = 70^\circ$, b) $x = 20^\circ$, c) $x = 44^\circ$, d) $x = 110^\circ$.
2. a) $17^\circ 30'$, b) 100° .
3. $x = 90^\circ$.
4. a) $x = 95^\circ$, b) $x = 60^\circ$.

Ângulos no triângulo

Teorema Angular de Tales: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .

Prova:

Seja $\triangle ABC$ e considere uma reta $r \parallel AB$ passando por C .



Daí, $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BAC})$ (ângulo alterno interno)

$m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{CBA})$ (ângulo correspondente)

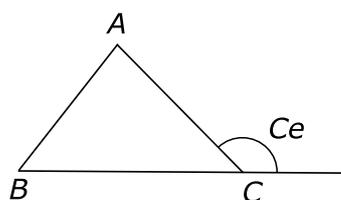
Como um ângulo raso tem 180° , vem:

$$\widehat{C} + \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$$

Corolário: Em todo triângulo, qualquer ângulo externo tem medida igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Prova:

Seja o $\triangle ABC$, considere \widehat{C} e ângulo externo em relação ao vértice C .



Temos que:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ & (1) \\ \hat{Ce} + \hat{C} = 180^\circ & (2) \end{cases}$$

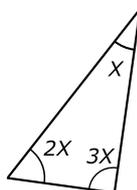
Subtraindo (1) de (2) vem:

$$\hat{A} + \hat{B} - \hat{Ce} = 0 \Rightarrow \hat{Ce} = \hat{A} + \hat{B}$$

De forma similar $\hat{Be} = \hat{A} + \hat{C}$, onde \hat{Be} é o ângulo externo em relação ao vértice B e $\hat{Ae} = \hat{B} + \hat{C}$, onde \hat{Ae} é o ângulo externo em relação ao vértice A.

Exercícios Resolvidos

1. No triângulo ABC da figura, calcule o valor de X.

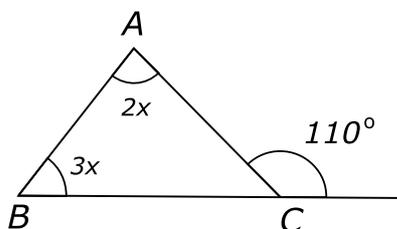


Solução:

Temos por Tales que: $x + 2x + 3x = 180^\circ \Rightarrow 6x = 180^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$

2. No triângulo ABC da figura, calcule o valor de x.

Solução:



Pelo resultado do ângulo externo, vem:

$$2x + 3x = 110^\circ \Rightarrow 5x = 110^\circ \Rightarrow x = 22^\circ$$

3. Dada a figura 1 a seguir, calcule o valor de x .

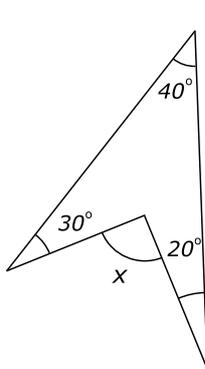


Fig. 1

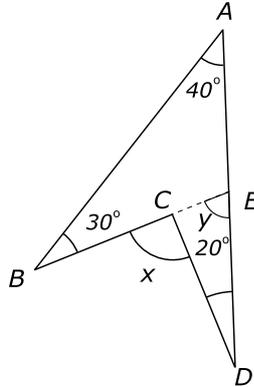


Fig. 2

Solução:

Considere A, B, C e D os vértices da figura dada. Prolongue BC até AD e denomine de E a interseção da reta BC com a reta AD .

Daí denominando $m(\widehat{CED}) = Y$ vem usando o resultado do ângulo externo no $\triangle ABE$,

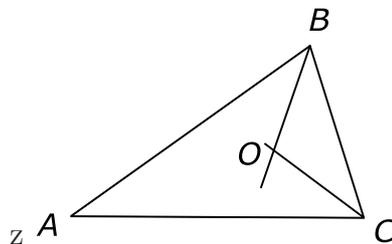
$$Y = 30^\circ + 40^\circ$$

e no $\triangle CED$,

$$X = Y + 20^\circ \Rightarrow X = 70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$$

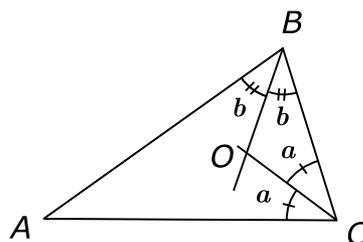
4. Na figura a seguir, O é o ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo ABC e a medida do ângulo \widehat{BOC} é o triplo da medida do ângulo \widehat{A} . Calcule a medida do ângulo \widehat{A} .

Solução:



Seja o $\triangle ABC$, O o ponto de encontro das bissetrizes internas desse triângulo e $m(\widehat{BOC}) = 3 m(\widehat{A})$.

Considere $m(\widehat{ACO}) = m(\widehat{BCO}) = a$ e $m(\widehat{ABO}) = m(\widehat{CBO}) = b$.



Daí

$$\begin{cases} 2b + 2a + m(A) = 180^\circ \\ b + a + 3m(A) = 180^\circ \quad (\times 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b + 2a + m(A) = 180^\circ & (1) \\ 2b + 2a + 6m(A) = 360^\circ & (2) \end{cases}$$

Fazendo (2) - (1) vem:

$$6 m(A) - m(A) = 180^\circ \Rightarrow 5 m(A) = 180^\circ \Rightarrow m(A) = 36^\circ$$

5. Na figura 1 a seguir, P é a interseção das bissetrizes externas em \widehat{B} e \widehat{C} . Calcule a medida do ângulo $B\widehat{P}C$ sabendo que a medida do ângulo \widehat{A} é 70° .

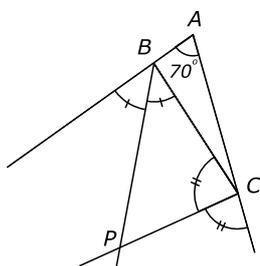


Fig. 1

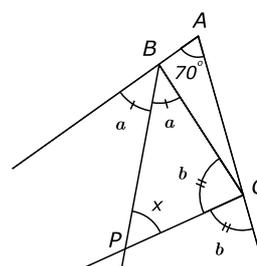


Fig. 2

Solução:

Seja a figura 1 dada, com P sendo a interseção das bissetrizes externas em \widehat{B} e \widehat{C} e $m(\widehat{A}) = 70^\circ$. Denote $m(\widehat{BPC}) = X$, $m(\widehat{CBP}) = a$ e $m(\widehat{BCP}) = b$.

Temos que:

$$m(\widehat{ABC}) = 180^\circ - 2a$$

$$m(\widehat{BCA}) = 180^\circ - 2b$$

Por Tales no $\triangle BCP$ vem: $a + b + X = 180^\circ$

Por Tales no $\triangle ABC$ vem:

$$180^\circ - 2a + 180^\circ - 2b + 70^\circ = 180^\circ$$

Logo,

$$\begin{cases} a + b + X = 180^\circ \\ 180^\circ - 2a + 180^\circ - 2b + 70^\circ = 180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + X = 180^\circ & (1) \\ -2a - 2b = -250^\circ & (2) \end{cases}$$

De (2) temos que

$$2a + 2b = 250^\circ \Rightarrow a + b = 125^\circ \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1) vem:

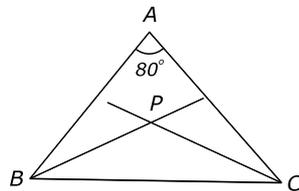
$$125^\circ + X = 180^\circ \Rightarrow X = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

Logo,

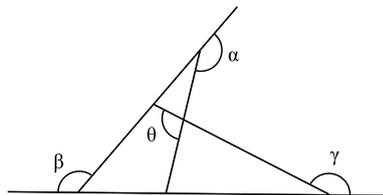
$$m(\widehat{BPC}) = 55^\circ$$

Exercícios Propostos

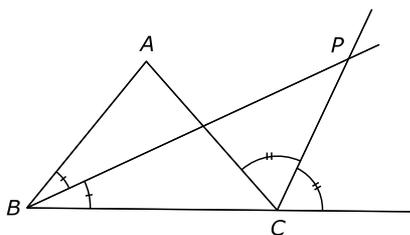
- Na figura a seguir, P é a interseção das bissetrizes internas em \widehat{B} e \widehat{C} . Calcule a medida do ângulo \widehat{BPC} sabendo que o ângulo \widehat{A} mede 80° .



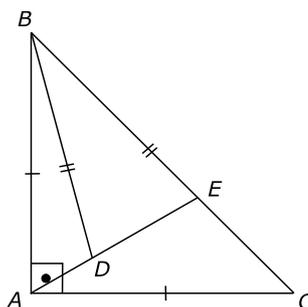
- Na figura a seguir, calcule a soma dos quatro ângulos $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ e $\widehat{\theta}$.



- Na figura a seguir, P é a interseção da bissetriz interna de \widehat{B} com a externa de \widehat{C} . Calcule o ângulo \widehat{BPC} em função de \widehat{A} .

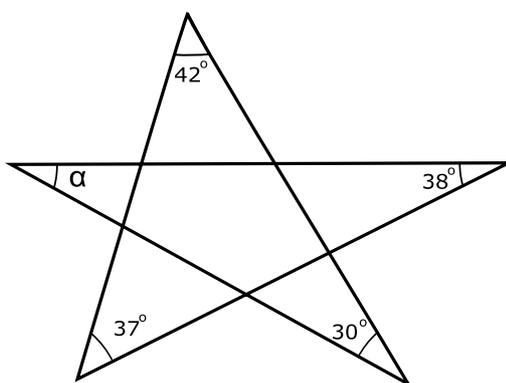


4. Na figura a seguir, o triângulo ABC é retângulo em \hat{A} e isósceles. Sendo $\overline{BD} = \overline{BE}$ e $\widehat{DAC} = 30^\circ$, calcule a medida do ângulo \widehat{ABD} .

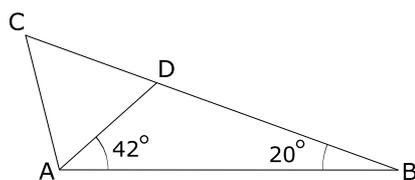


Nota: Nesta questão use o fato de que em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes. Este fato será provado na Aula 2.

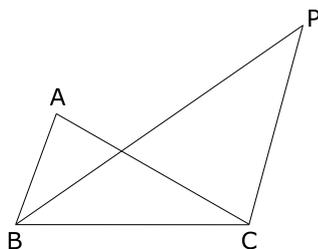
5. Na figura a seguir, calcule o ângulo $\hat{\alpha}$. Dica: Use o resultado do ângulo externo de um triângulo.



6. O triângulo ACD da figura é isósceles de base \overline{AD} . Sendo 42° a medida do ângulo \widehat{BAD} e 20° a medida do ângulo \widehat{ABC} , calcule a medida do ângulo \widehat{ACD} .



7. Seja \widehat{AOB} um ângulo e r uma reta do seu plano que contém O e situada na região não convexa. Seja \overrightarrow{OX} e \overrightarrow{OY} as bissetrizes dos ângulos agudos \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} que formam com r . Se \widehat{AOB} mede 150° , calcule o ângulo \widehat{XOY} .
8. Na figura, P é a interseção da bissetriz interna de B com a bissetriz externa de C . Calcule o ângulo \widehat{BPC} em função do ângulo \widehat{A} .



Gabarito

1. $m(\widehat{BPC}) = 130^\circ$.
2. A soma pedida é 540° .
3. $m(\widehat{BPC}) = \frac{m(\widehat{A})}{2}$.
4. $m(\widehat{ABD}) = 15^\circ$.
5. $m(\widehat{\alpha}) = 33^\circ$.
6. $m(\widehat{ACD}) = 56^\circ$.
7. $m(\widehat{XOY}) = 165^\circ$.
8. $m(\widehat{P}) = \frac{\widehat{A}}{2}$.