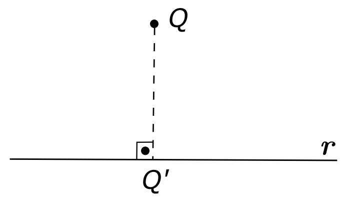
Aula 10 – Triângulo Retângulo

Projeção ortogonal

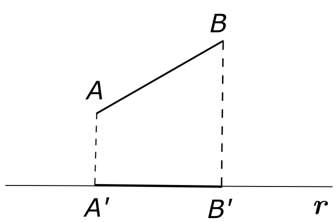
Em um plano, consideremos um ponto e uma reta. Chama-se *projeção ortogonal* desse ponto sobre essa reta o pé da perpendicular traçada do ponto à reta.

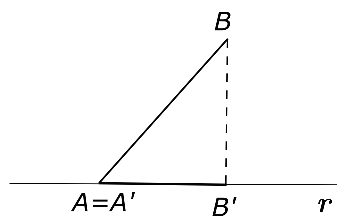
Na figura, o ponto Q' é a projeção ortogonal de Q sobre r.



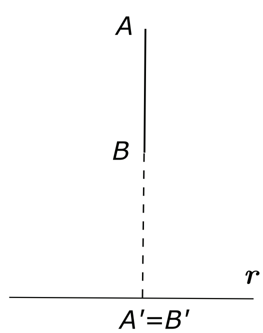
Projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos desse segmento.

Nas figuras, a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta r é o segmento $A'B'$.





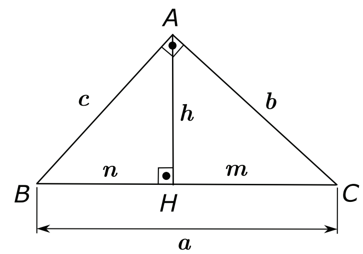
Note que a projeção ortogonal de um segmento cuja reta suporte é perpendicular à reta é o ponto $A' = B'$.



Relações métricas nos triângulos retângulos

Elementos

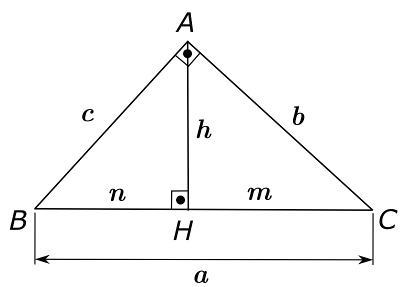
Considere a figura:



$\overline{BC} = a$ é a hipotenusa.
$\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ são os catetos.
$\overline{AH} = h$ é a altura relativa à hipotenusa.
$\overline{BH} = n$ e $\overline{CH} = m$ são, respectivamente, as projeções dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$.

Relações

No triângulo retângulo ABC da figura, sendo:



$\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$,
$\overline{AB} = c$, $\overline{AH} = h$,
$\overline{BH} = n$, e $\overline{CH} = m$

então valem as seguintes relações:

1) $m + n = a$;

2) $b^2 = a \cdot m$;

3) $b \cdot c = a \cdot h$;

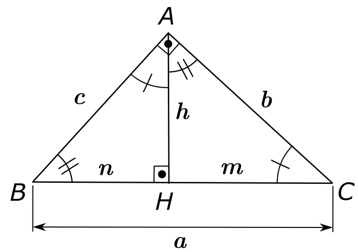
4) $c^2 = a \cdot n$;

5) $b^2 + c^2 = a^2$ (Teorema de Pitágoras);

6) $h^2 = m \cdot n$.

Prova:

Seja o ΔABC retângulo, sendo $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c, \overline{AH} = h, \overline{BH} = n$ e $\overline{CH} = m$.



Como

$$\overline{BH} + \overline{HC} = \overline{BC} \Rightarrow n + m = a \qquad (1)$$

Considere os triângulos AHC e ABC,

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\mathrm{C}} \text{ comum} \\ \\ \mathrm{A\hat{H}C} = \mathrm{B\hat{A}C} = 90^\circ \end{array}\right. \underset{\mathrm{AA}\sim}{\Longrightarrow} \Delta AHC \sim \Delta ABC$$

Daí,

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} b^2 = a \cdot m & \quad (2) \\ b \cdot c = a \cdot h & \quad (3) \end{array}\right.$$

Considere os triângulos AHB e ABC

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{\mathrm{B}} \text{ comum} \\ \\ \mathrm{A\hat{H}B} = \mathrm{B\hat{A}C} = 90^\circ \end{array}\right. \underset{\mathrm{AA}\sim}{\Longrightarrow} \Delta AHB \sim \Delta ABC$$

Daí

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} = \frac{b}{h} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \qquad (4)$$

Somando (2) e (4):

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a(m + n)$$

De (1)

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

Daí

$$b^2 + c^2 = a^2 \qquad (5)$$

Multiplicando (2) e (4) vem:

$$b^2 \cdot c^2 = a \cdot m \cdot a \cdot n = a^2 m \cdot n,$$

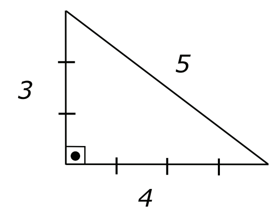
De (3) vem:

$$a^2 \cdot h^2 = a^2 m \cdot n, a \neq 0 \Rightarrow h^2 = m \cdot n \quad (6)$$

Observação:

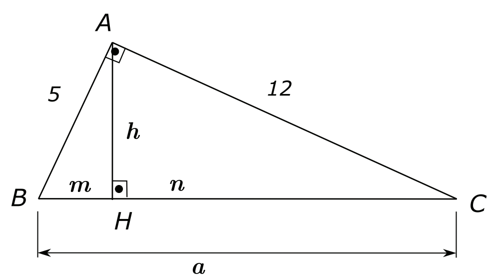
Triângulos pitagóricos são triângulos retângulos cujos lados têm por medida números inteiros.

Exemplo: Os triângulos cujos lados são proporcionais aos números 3, 4 e 5 são retângulos e também pitagóricos.



Exercícios Resolvidos

1. No triângulo retângulo da figura, calcule a, h, m e n.



Solução:

Do resultado anterior, temos:

De (5) vem: $5^2 + 12^2 = a^2 \Rightarrow a^2 = 169 \Rightarrow a = 13$

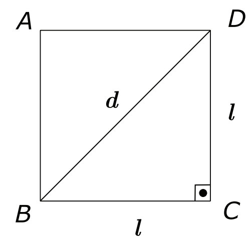
De (2) vem: $5^2 = 13m \Rightarrow m = \dfrac{25}{13}$

De (1) vem: $\dfrac{25}{13} + n = 13 \Rightarrow n = 13 - \dfrac{25}{13} = \dfrac{144}{13} \Rightarrow n = \dfrac{144}{13}$

De (6) vem: $h^2 = \dfrac{25}{13} \cdot \dfrac{144}{13} \Rightarrow h = \dfrac{5 \cdot 12}{13} = \dfrac{60}{13} \Rightarrow h = \dfrac{60}{13}$

2. Calcule a medida de cada diagonal de um quadrado em função da medida l dos lados.

Solução:
Seja $ABCD$ um quadrado de lado l e $\overline{BD}$ uma diagonal cuja medida é d.



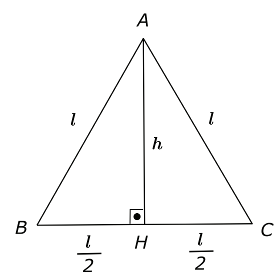
Usando (5) vem:

$$l^2 + l^2 = d^2 \Rightarrow d = l\sqrt{2}$$

Cada diagonal vale $l\sqrt{2}$.

3. Calcule a medida de cada altura de um triângulo equilátero em função da medida l dos lados.

Solução:
Seja ABC um triângulo equilátero de lado l e $\overline{AH} = h$ (altura).



Considere o triângulo retângulo AHC. Como a altura é a mediana no triângulo equilátero, vem:

$$\overline{BH} = \overline{HC} = \frac{l}{2}$$

Daí, por (5) vem:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, cada altura é $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$.

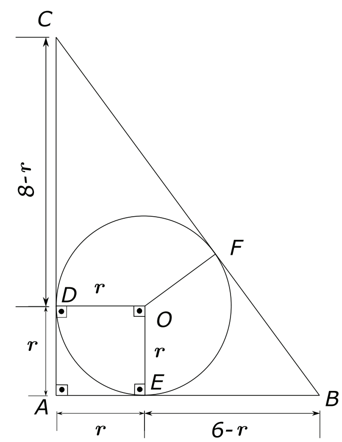
4. Calcule o raio de um círculo inscrito em um triângulo retângulo de catetos 6 cm e 8 cm.

Solução:

Seja ABC o triângulo retângulo em A e r o raio do círculo inscrito.

A medida da hipotenusa $\overline{BC}$ é:

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow \overline{BC} = 10\ cm$$



Temos por resultado anterior que:

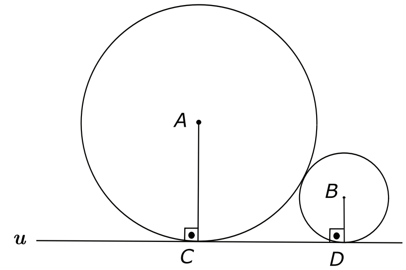
$$\overline{CD} = \overline{CF} = 8 - r$$
$$\overline{BE} = \overline{BF} = 6 - r$$

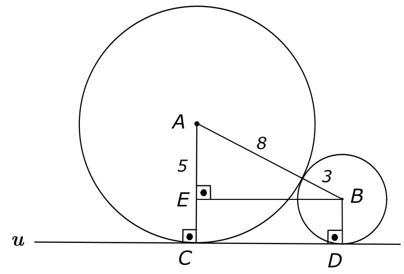
Temos que:

$$\overline{BC} = \overline{BF} + \overline{CF} = 8 - r + 6 - r = 10$$

$$\Rightarrow 14 - 2r = 10 \Rightarrow 2r = 4 \Rightarrow r = 2.$$

5. Na figura, as circunferências de centros A e B e raios 8 cm e 3 cm, respectivamente, são tangentes exteriormente e tangenciam à reta u nos pontos C e D. Calcule a medida do segmento CD.





Solução:
Se as circunferências são tangentes exteriormente, a distância entre os seus centros é igual à soma das medidas dos raios, ou seja,

$$\overline{AB} = 3 + 8 = 11$$

Traçando por B a paralela à tangente u, BE, temos:

$$\overline{AE} = 8 - 3 = 5 \Rightarrow \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 = \overline{AB}^2 \Rightarrow$$

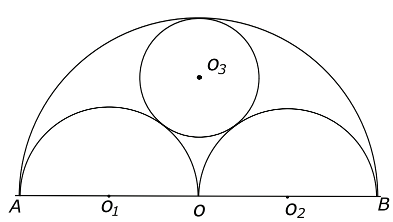
$$5^2 + \overline{EB}^2 = 11^2 \Rightarrow \overline{EB}^2 = 121 - 25 = 96$$

$$\Rightarrow \overline{EB} = 4\sqrt{6}$$

Mas $EBDC$ é retângulo $\Rightarrow \overline{EB} = \overline{CD} = 4\sqrt{6}$ cm.
Logo,

$$\overline{CD} = 4\sqrt{6} \text{ cm.}$$

6. Dada a figura em que $\overline{OA} = \overline{OB} = 6$ metros, calcule o raio do círculo de centro O_3.



Solução:
Seja r o raio do círculo de centro O_3,

$$\overline{OO_3} = 6 - r, \ \overline{O_2O_3} = 3 + r \quad \text{e} \quad \overline{OO_2} = \frac{6}{2} = 3$$

Temos que no $\Delta\ OO_3O_2$, usando Teorema de Pitágoras, vem:

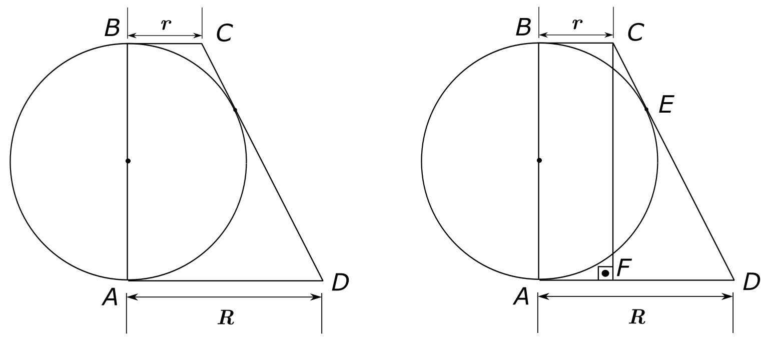
$$\overline{OO_3}^2 + \overline{OO_2}^2 = \overline{O_2O_3}^2 \Rightarrow (6-r)^2 + 3^2 = (3+r)^2$$

$$\Rightarrow 36 - 12r + r^2 + 9 = 9 + 6r + r^2 \Rightarrow 18r = 36$$

$$\Rightarrow r = 2$$

Daí, o raio do círculo de centro O_3 é 2 metros.

7. Na figura, calcule a altura do trapézio retângulo $ABCD$.



Solução:
Seja E a interseção de $\overline{CD}$ com a circunferência dada. Temos que:

$$\overline{BC} = \overline{CE} \text{ e } \overline{AD} = \overline{DE} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED} = r + R$$

Traçando $\overline{CF}$ paralela a AB passando por C vem que:

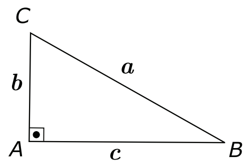
$$\overline{CF}^2 + \overline{FD}^2 = \overline{CD}^2 \Rightarrow \overline{CF}^2 + (R-r)^2 = (r+R)^2$$
$$\Rightarrow \overline{CF}^2 = r^2 + 2rR + R^2 - R^2 + 2rR - r^2 = 4rR$$
$$\Rightarrow \overline{CF} = 2\sqrt{Rr}$$

Como $ABCF$ é retângulo, temos que $\overline{AB} = \overline{CF}$.
Daí, a altura pedida é $\overline{AB} = 2\sqrt{Rr}$.

Teorema: Lei dos co-senos
Em todo triângulo, o quadrado de um lado é igual a soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo co-seno do ângulo por ele formado.

Nota:

1) Seja um triângulo retângulo ABC de lados a, b e c.



$\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos agudos. Pelo Teorema de Pitágoras $b^2 + c^2 = a^2$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a} \\[2ex] \cos \hat{B} = \dfrac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a} \\[2ex] \operatorname{tg} \hat{B} = \dfrac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \dfrac{b}{c} \\[2ex] \operatorname{sen}^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1 \end{cases}$$

2) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(180 - \alpha)$, $\cos \alpha = -\cos(180 - \alpha)$

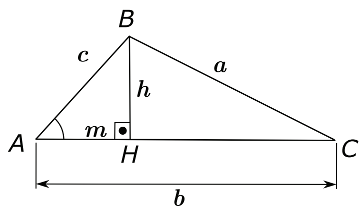
3)

θ	$30°$	$45°$	$60°$
$\operatorname{sen} \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Prova:

Seja o triângulo ABC, vamos provar que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$



Trace a altura $\overline{BH} = h$ relativa ao lado $\overline{AC}$ e denomine $\overline{AH} = m$.

$$\Delta\ ABH \begin{cases} c^2 = h^2 + m^2 & (1) \\ \cos \hat{A} = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c \cdot \cos \hat{A} & (2) \end{cases}$$

$$\Delta\ BCH \begin{cases} a^2 = h^2 + (b-m)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot m + m^2 \\ \Rightarrow a^2 = b^2 + h^2 + m^2 - 2 \cdot b \cdot m \quad (3) \end{cases}$$

Substituindo (1) e (2) em (3) vem:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

De maneira similar:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

Natureza de um triângulo (Síntese de Clairaut)

Observando a lei dos co-senos em um triângulo ABC onde $a > b$ e $a > c$, temos:

$$\text{Se} \begin{cases} \hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \textit{ é acutângulo} \\ \hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \textit{ é retângulo} \\ \hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \Delta ABC \textit{ é obtusângulo} \end{cases}$$

Portanto, dado um triângulo cujos lados medem a, b e c, se $a > b$ e $a > c$, então os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são agudos.

Para determinar a natureza do terceiro ângulo, comparamos o quadrado da maior medida com a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados.

Exemplo:

1) Um triângulo cujos lados medem 6, 8 e 9 é acutângulo porque $9^2 < 6^2 + 8^2$.

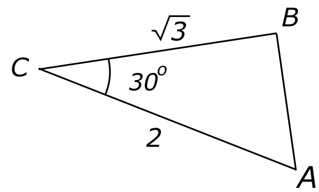
2) Um triângulo cujos lados medem 12, 16 e 20 é retângulo porque $20^2 = 12^2 + 16^2$.

3) Um triângulo cujos lados medem 6, 9 e 13 é obtusângulo porque $13^2 > 6^2 + 9^2$.

Exercícios Resolvidos

8. Dado um triângulo ABC tal que $\overline{AC} = 2$, $\overline{BC} = \sqrt{3}$ e $A\hat{C}B = 30^\circ$. Determine a medida do lado AB.

Solução:
Seja o triângulo ABC, tal que $\overline{AC} = 2$, $\overline{BC} = \sqrt{3}$ e $A\hat{C}B = 30°$.



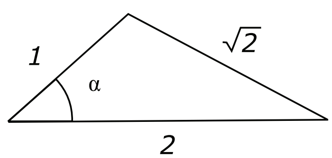
Usando a lei dos co-senos, vem:

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos \hat{C}$$

$$\overline{AB}^2 = 4 + 3 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2} = 7 - 6 = 1$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 1$$

9. Na figura, calcule $\cos \alpha$.

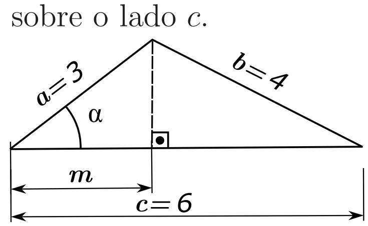


Solução:
Pela lei dos co-senos, vem:

$$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos \alpha$$
$$2 = 1 + 4 - 4 \cdot \cos \alpha \Rightarrow 2 - 5 = -4 \cos \alpha$$
$$\Rightarrow \cos \alpha = \tfrac{3}{4}$$

10. Dado um triângulo de lados $a = 3$ cm, $b = 4$ cm e $c = 6$ cm, calcule a projeção do lado a sobre o lado c.

Solução:
Seja o triângulo de lados $a = 3$ cm, $b = 4$ cm e $c = 6$ cm. Seja a projeção do lado a sobre o lado c.



Pela lei dos co-senos vamos encontrar $\cos \alpha$.

$$4^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$$

$$16 = 45 - 36 \cdot \cos\alpha \Rightarrow 36 \cdot \cos\alpha = 29 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{29}{36}$$

Temos que $\cos\alpha = \dfrac{m}{3} \Rightarrow m = 3 \cdot \cos\alpha$

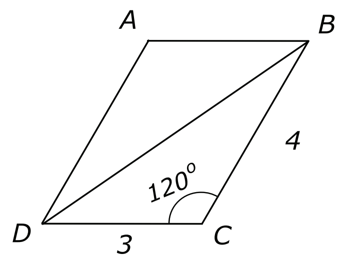
Logo,

$$m = 3 \cdot \frac{29}{36} \Rightarrow m = \frac{29}{12}$$

11. Um dos ângulos internos de um paralelogramo de lados 3 e 4 medem 120°. Calcule a maior diagonal deste paralelogramo.

Solução:

Seja o paralelogramo $ABCD$ de lados 3 e 4 e um dos ângulos internos vale 120°.



$\overline{BD}$ é a maior diagonal. Usando a lei dos co-senos, vem:

$\overline{BD}^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120°$

$\overline{BD}^2 = 9 + 16 - 24 \cdot (-\cos 60°)$

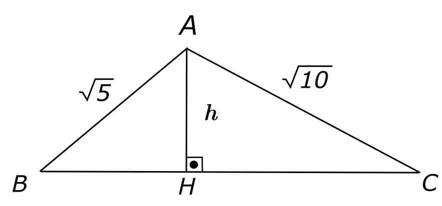
$\overline{BD}^2 = 25 - 24 \cdot (-\frac{1}{2})$

$\overline{BD}^2 = 37 \Rightarrow \overline{BD} = \sqrt{37}$

12. Os lados de um triângulo medem $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ e 5. Qual o comprimento da altura relativa ao lado maior?

Solução:

Seja um triângulo ABC cujos lados medem $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ e 5. O maior lado é 5.



Seja $h = \overline{AH}$ a altura relativa ao lado BC.

Usando a lei dos co-senos, vamos achar $\cos\hat{B}$.

$(\sqrt{10})^2 = (\sqrt{5})^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\hat{B}$

$10 = 5 + 25 - 10 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\hat{B}$

$20 = 10 \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \hat{B}$

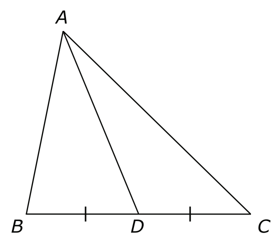
$\cos \hat{B} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, mas $\cos \hat{B} = \dfrac{\overline{BH}}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{BH}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \overline{BH} = 2$

Usando o Teorema de Pitágoras no $\Delta\ ABH$, vem:

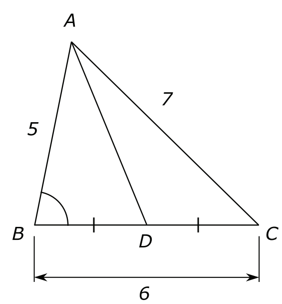
$$(\sqrt{5})^2 = 2^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 5 - 4 \Rightarrow h = 1$$

13. Na figura, D é ponto médio do lado BC. Sendo $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 7$ cm e $\overline{BC} = 6$ cm, calcule a medida do segmento AD.



Solução:

Seja a figura dada, D é ponto médio do lado BC, $\overline{AB} = 5$ cm, $\overline{AC} = 7$ cm e $\overline{BC} = 6$ cm.



Usando a lei dos co-senos para o $\Delta\ ABC$, vem:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \hat{B}$

$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \hat{B}$

$49 = 25 + 36 - 60 \cos \hat{B} \Rightarrow 49 = 61 - 60 \cos \hat{B}$

$\Rightarrow \cos \hat{B} = \dfrac{12}{60} = \dfrac{1}{5}$

Considerando que $\overline{BD} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$ e usando a lei dos co-senos para o Δ

ABD vem:

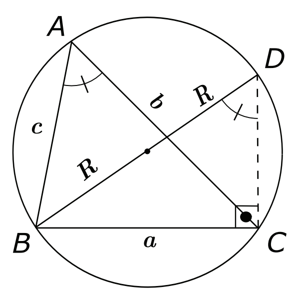
$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BD} \cdot \cos \hat{B} \Rightarrow \overline{AD}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \cos \hat{B}$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2 = 25 + 9 - 30 \cdot \frac{1}{5} = 34 - 6 = 28$$

$$\overline{AD} = 2\sqrt{7}\ cm$$

Observação:
A lei dos co-senos permite determinar medianas, bissetrizes, alturas, projeções de um lado sobre o outro, etc.

Teorema: Lei dos senos
As medidas dos lados de um triângulo são proporcionais aos senos dos ângulos opostos na mesma razão do diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo.
Prova:
Seja ABC um triângulo de lados $a,\ b$ e c, inscrito em uma circunferência de raio R. Tracemos o diâmetro BD.



O triângulo BDC é retângulo em $\hat{C}$, já que $B\hat{C}D = \dfrac{\overset{\frown}{BAD}}{2}$ e $\overset{\frown}{BAD}= 180°$.

Temos que $\hat{D} = \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$ (ângulo inscrito).
Desse triângulo retângulo temos:

$$\text{sen}\, \hat{D} = \frac{a}{2R}$$

Mas

$$\hat{A} = \hat{D} \Rightarrow \text{sen}\, \hat{A} = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}\, \hat{A}} = 2R$$

De maneira similar, temos que

$$\frac{b}{\text{sen}\, \hat{B}} = 2R \ \ e \ \ \frac{c}{\text{sen}\, \hat{C}} = 2R$$

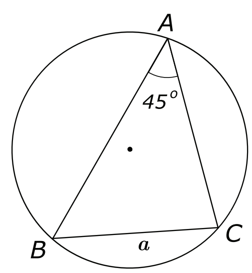
Portanto:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

Exercícios Resolvidos

14. Em um círculo de raio 5 metros está inscrito um triângulo ABC no qual $\hat{A}$ mede 45°. Determine a medida do lado oposto ao ângulo $\hat{A}$ desse triângulo.

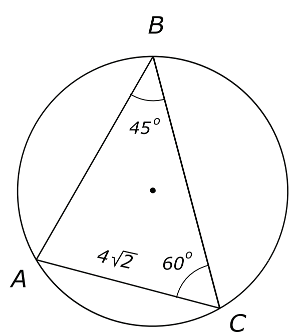
Solução:
Seja $\Delta\ ABC$ e considere o raio do círculo circunscrito ao triângulo de 5 metros e o ângulo $\hat{A} = 45°$. Seja a medida pedida a.



Pela lei dos senos temos:
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}45°} = 2 \cdot 5 \Rightarrow a = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\ metros.$$

15. Num triângulo ABC, tem-se: $\hat{B} = 45°$, $\hat{C} = 60°$ e $\overline{AC} = 4\sqrt{2}$ metros. Calcule a medida do lado AB e o raio do círculo circunscrito.

Solução:
Seja o triângulo ABC e o círculo circunscrito a este triângulo.
$\hat{B} = 45°$, $\hat{C} = 60°$ e $\overline{AC} = 4\sqrt{2}$ metros.



Pela lei dos senos vem:

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}45°} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}60°} = 2R$$

$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overline{AB}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$\Rightarrow 8 = \frac{2\overline{AB}}{\sqrt{3}} = 2R$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 4\sqrt{3} \text{ e } R = 4$$

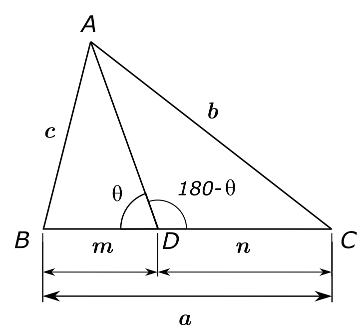
Daí, a medida do lado AB é $4\sqrt{3}$ metros, e o raio do círculo circunscrito é 4 metros.

Relação de Stewart

Seja o triângulo ABC de lados a, b e c. Trace um segmento AD interno ao triângulo, determinando sobre o lado BC os segmentos BD e CD de medidas m e n, respectivamente.
Vamos provar que:

$$\overline{AD}^2 \cdot a = b^2 \cdot m + c^2 \cdot n - a \cdot m \cdot n$$

Esta relação é denominada *Relação de Stewart*.
Prova:
Considere a figura com os dados do teorema:



Aplicando a lei dos co-senos nos triângulos ABD e ACD, temos:

$$c^2 = \overline{AD}^2 + m^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot m \cdot \cos\theta \qquad (1)$$
$$b^2 = \overline{AD}^2 + n^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot n \cdot \cos(180^\circ - \theta) \qquad (2)$$

Multiplicando as relações (1) e (2) por n e m, respectivamente, vem:

$$c^2 n = \overline{AD}^2 n + m^2 n - 2 \cdot \overline{AD} \cdot m \cdot n \cdot \cos\theta \qquad (3)$$
$$b^2 m = \overline{AD}^2 m + n^2 m + 2 \cdot \overline{AD} \cdot n \cdot m \cdot \cos\theta \qquad (4)$$

Somando membro a membro das relações (3) e (4), temos:

$b^2m + c^2n = \overline{AD}^2(m+n) + m \cdot n(m+n)$

$\Rightarrow b^2m + c^2n = \overline{AD}^2 \cdot a + m \cdot n \cdot a$

$\Rightarrow \overline{AD}^2 \cdot a = b^2m + c^2n - a \cdot m \cdot n$

Observação:

O segmento AD é chamado *ceviana*.

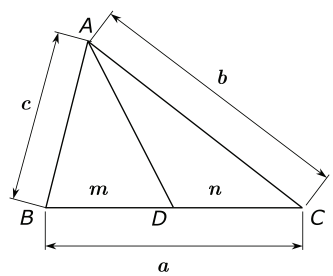
Ceviana é todo segmento que une o vértice de um triângulo à reta suporte do lado oposto.

Exemplo de ceviana: bissetriz interna, altura, mediana, etc.

Exercício 16: Dado um triângulo ABC de lados a, b e c, calcule as medidas das três medianas.

Solução:

Seja $\overline{AD}$ a mediana relativa ao lado BC.



Daí:

$m = n = \dfrac{a}{2}$ e $\overline{AD} = m_a$

Usando a relação de Stewart, vem:

$$m_a^2 \cdot a = b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow m_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{4}(2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - a^2) \Rightarrow m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot b^2 + 2 \cdot c^2 - a^2}$$

De maneira similar, temos:

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot a^2 + 2 \cdot c^2 - b^2}$$

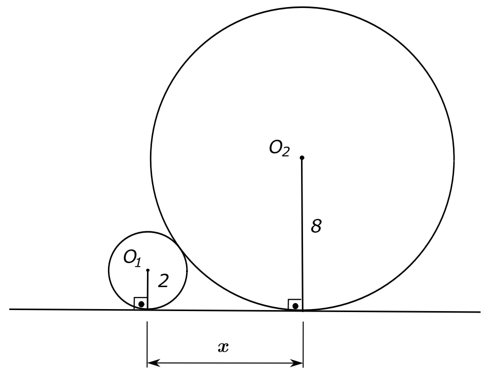
e

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 - c^2}$$

Exercícios Propostos

1. No retângulo $ABCD$ de lados $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 3$, o segmento $\overline{DM}$ é perpendicular à diagonal $\overline{AC}$. Determine a medida do segmento AM.

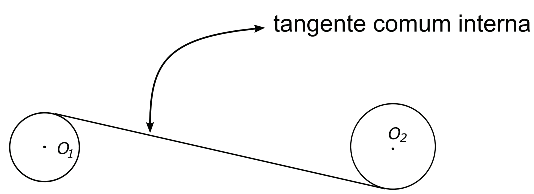
2. Determine o valor de x na figura a seguir:



3. Um ponto P dista 5 metros do centro de um círculo de raio de 13 metros. Calcule a medida da menor corda desse círculo que passa por P.

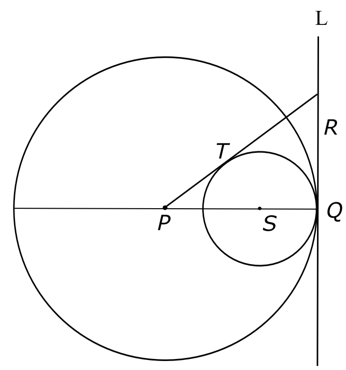
4. Dado um triângulo isósceles ABC em que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$ cm e $\overline{BC} = 12$ cm, calcule o raio do círculo inscrito no triângulo.

5. Os centros das duas circunferências a seguir estão separados de 41 metros. A menor circunferência tem raio igual a 4 metros e a maior, igual a 5 metros. Calcule o comprimento da tangente comum interna.

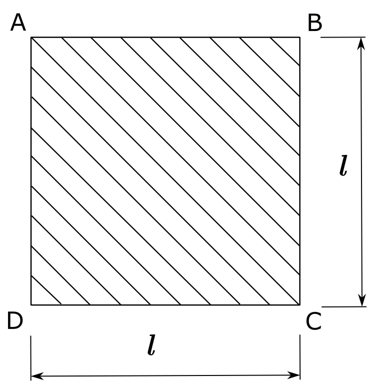


6. Do mesmo lado de uma reta são traçados três círculos tangentes à reta e tangentes entre si dois a dois. Sabendo que dois deles têm raio igual a 12 metros, calcule o raio do terceiro círculo.

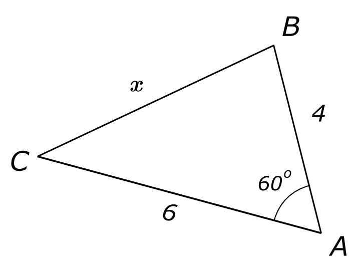
7. Na figura seguinte, as circunferências de centros P e S são ambas tangentes à reta L no mesmo ponto Q e a reta que passa por P e R tangencia a circunferência menor no ponto T. Calcule a medida do segmento QR sabendo que os raios das circunferências medem, respectivamente, 8 metros e 3 metros.



8. Um quadrado $ABCD$ de lado l tem cada um de seus lados divididos em 9 partes iguais. Ligando-se com segmentos de reta os pontos da divisão, segundo a diagonal AC, obtém-se o hachurado mostrado na figura. Calcule a soma dos comprimentos dos 17 segmentos assim obtidos.



9. No triângulo ABC da figura, calcule x.



10. Em um triângulo ABC, $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{AC} = 5$ cm e $\overline{BC} = 7$ cm. Calcule:

    a) a projeção do lado AC sobre o lado AB;

    b) a altura relativa ao lado AB.

11. Determine a medida do lado BC de um triângulo ABC, onde $\overline{AC} = 10$ cm, $\overline{AB} = 6$ cm e a projeção ortogonal do lado $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$ vale $10,4$ cm.

12. Sabendo que dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 4 cm e 5 cm, respectivamente, e uma das diagonais 6 cm, calcule a medida da outra diagonal.

13. Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 metros e 12 metros e formam um ângulo de $60°$. Calcule as diagonais.

14. Num triângulo ABC, temos $\overline{AC} = 3$ metros, $\overline{BC} = 4$ metros e $\alpha = B\hat{A}C$. Se $\overline{AB} = 3$ metros, calcule $\cos\alpha$.

15. Num triângulo ABC, as medidas dos lados BC e AC medem 5 metros e 6 metros, respectivamente, e o seno do ângulo $\hat{A}$ vale 0,6. Calcule o seno do ângulo $\hat{B}$.

16. Calcular as alturas de um triângulo cujos lados medem 6 metros, 10 metros e 12 metros.

17. Mostre que, em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das três medianas é igual a três vezes a metade do quadrado da hipotenusa.

18. Em um triângulo ABC, os lados medem a, b e c. Calcule a medidas das três alturas.

Gabarito

1. $\dfrac{9}{5}$.

2. 8.

3. 24 metros.

4. O raio é 3 cm.

5. 40 metros.

6. 3 metros.

7. $\overline{QR} = 6$ metros.

8. $9\sqrt{2}\,l$.

9. $2\sqrt{7}$.

10. a) $\dfrac{5}{2}$ cm, b) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

11. $\overline{BC} = 12$ cm.

12. $\sqrt{46}$ cm.

13. $4\sqrt{7}$ metros e $4\sqrt{19}$ metros.

14. $\dfrac{1}{9}$.

15. 0,72.

16. $\dfrac{8\sqrt{14}}{3}$ metros, $\dfrac{8\sqrt{14}}{5}$ metros e $\dfrac{4\sqrt{14}}{3}$ metros.

17. Demonstração.

18.
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{e}$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

onde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, p semiperímetro.