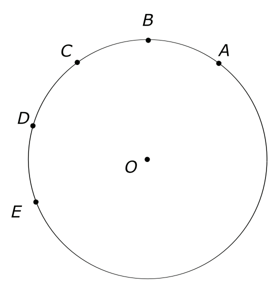
Aula 11 – Polígonos Regulares

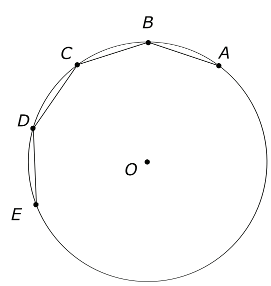
Na Aula 3, em que apresentamos os polígonos convexos, vimos que um polígono regular é um polígono convexo tal que:
a) todos os lados são congruentes entre si;
b) todos os ângulos são congruentes entre si.
Assim, o triângulo equilátero é o triângulo regular e o quadrado é o quadrilátero regular.
Um polígono regular é equilátero e equiângulo.

Teorema Fundamental

Dividindo-se uma circunferência em $n\,(n \geq 3)$ arcos congruentes entre si, então:
a) as cordas que unem os pontos de divisão consecutivos formam um polígono regular inscrito, com n lados.
b) as tangentes traçadas pelos pontos da divisão determinam um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência.
Prova:
Seja uma circunferência dividida em $n\,(n \geq 3)$ arcos congruentes pelos pontos A, B, C, D, E, $\ldots$



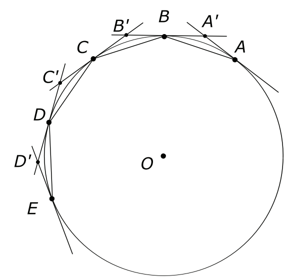
a) Temos que: $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{CD} \equiv \overset{\frown}{DE} \equiv \cdots$ e vamos provar que o polígono $ABCDE\cdots$ é regular.



Os lados desse polígono são congruentes entre si, pois em um mesmo círculo cordas que subentendem arcos congruentes são congruentes.

Os ângulos desse polígono são congruentes entre si, já que são ângulos inscritos de mesma medida e todos medem $\dfrac{180°(n-2)}{n}$, n é o número de lados desse polígono.
Daí, o polígono $ABCDE\cdots$ é regular.

b) Temos que *A'B'*, *B'C'*, *C'D'*, *D'E'*,... são segmentos tangentes à circunferência nos pontos *B*, *C*, *D*, *E*, ..., *A*.



Vamos provar que *A'*, *B'*, *C'*, *D'*,... é regular.
Os triângulos isósceles *AA'B*, *BB'C*, *CC'D*, *DD'E*,... são congruentes entre si pelo caso *ALA*, já que têm congruentes os lados *AB*, *BC*, *CD*, *DE*,... e o ângulos adjacentes a esses lados, pois são ângulos de segmento de mesma medida.
Da congruência desses triângulos, vem que:

$$\hat{A}' \equiv \hat{B}' \equiv \hat{C}' \equiv \hat{D}' \equiv \cdots \text{ e } AA' \equiv A'B \equiv BB' \equiv B'C \equiv CC' \equiv C'D \equiv \cdots$$

somando por exemplo:

$$A'B + BB' \equiv B'C + CC' \Rightarrow A'B' \equiv B'C'$$

Logo,

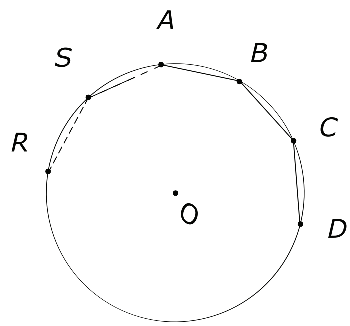
$$A'B' \equiv B'C'$$

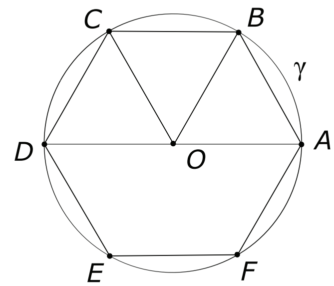
De maneira similar temos que

$$A'B' \equiv B'C' \equiv C'D' \equiv \cdots$$

Daí, o polígono *A'B'C'D'*... é regular.

Propriedade 1: Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência.
Prova:
Seja $ABCD\cdots\ RS$ o polígono regular (vamos tomar o hexágono *ABCDEF* por exemplo).





Pelos pontos A, B e C tracemos a circunferência γ e seja O o seu centro. Provemos que γ passa pelos demais vértices do polígono.
Vamos provar que $D \in \gamma$.

Sejam os triângulos OBA e OCD.
Temos que: $\Delta\ OBA \equiv \Delta\ OCD$ pois

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} (\text{lado do polígono regular}) \\ \overline{OB} = \overline{OC} (\text{raios da circunferência}) \\ O\hat{B}A = O\hat{C}D \end{cases} \underset{LAL}{\Longrightarrow}$$

pois, como no triângulo isósceles BOC, $O\hat{C}B \equiv O\hat{B}C$ e que $D\hat{C}B \equiv A\hat{B}C$, vem que $O\hat{B}A \equiv O\hat{C}D$, então

$$\overline{OA} = \overline{OD} \Rightarrow D \in \gamma.$$

De maneira similar, provamos que $E \in \gamma$, $F \in \gamma, \cdots$

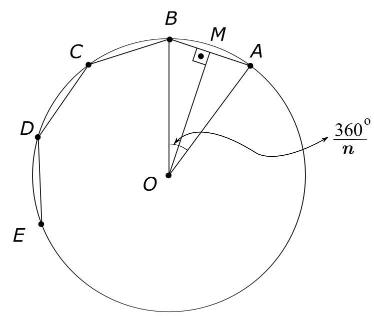
Da unicidade da circunferência que passa por A, B, e C, sai a unicidade de γ por A, B, C, D, $\cdots$ R, S.

Daí, todo polígono regular é inscritível a uma circunferência.

Propriedade 2: Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência. Verificar!!!

Nota:
1) As duas últimas propriedades são recíprocas do Teorema Fundamental.
2) As circunferências inscrita e circunscrita a um polígono regular são concêntricas.

Elementos de um polígono regular



1. *Centro* de um polígono regular é o centro comum das circunferências inscrita e circunscrita.
   Na figura, O é o centro do polígono regular $ABCDE\ldots$.

2. *Raio* de um polígono regular é o raio da circunferência circunscrita.
   Na figura, OA é um raio do polígono regular $ABCDE\ldots$.

3. *Apótema* é o segmento cujos extremos são o centro do polígono regular e o ponto médio de um lado.
   Na figura, OM é um apótema do polígono regular $ABCDE\ldots$.
   O apótema é congruente com o raio da circunferência inscrita.

4. *Ângulo cêntrico* de um polígono regular é o ângulo formado por dois raios consecutivos.
   Na figura, $A\hat{O}B$ é um ângulo cêntrico de um polígono regular de n lados cujo valor é $\dfrac{360°}{n}$.

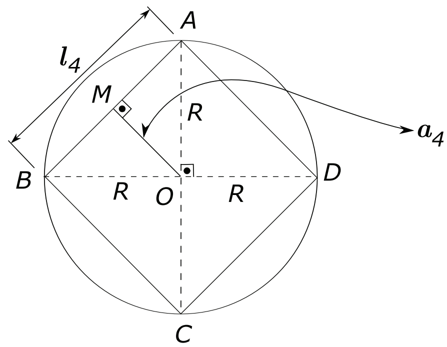
Relações métricas

Cálculo do lado e do apótema dos polígonos regulares em função do raio do círculo circunscrito a estes polígonos.
Vamos denotar que para um polígono regular de n lados:
l_n - medida do lado.
a_n - medida do apótema.

Quadrado

a) Construção:

Inscrever um quadrado em um círculo de raio R; traçam-se dois diâmetros perpendiculares AC e BD. A circunferência fica dividida em quatro arcos congruentes, por corresponderem a ângulos centrais congruentes, e o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado inscrito.



b) Cálculo do lado em função de R:

No triângulo retângulo isósceles AOB, temos:

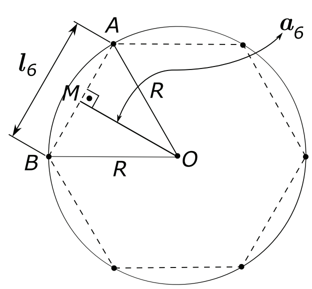
$$l_4^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \Rightarrow l_4 = R\sqrt{2}.$$

c) Cálculo do apótema em função de R:

O apótema $\overline{OM}$ sendo altura do triângulo retângulo AOB relativo à hipotenusa AB é também mediana.

$$\Rightarrow a_4 = \frac{l_4}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Hexágono regular



a) Cálculo do lado em função de R:

Considere AB o lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio R.

$$m(A\hat{O}B) = \frac{360°}{6} = 60°$$

O triângulo AOB é isósceles $\Rightarrow m(O\hat{A}B) = m(O\hat{B}A) = \dfrac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

Daí, $\Delta\ AOB$ é equilátero $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = R$
Logo,

$$l_6 = R$$

b) Cálculo do apótema em função de R:

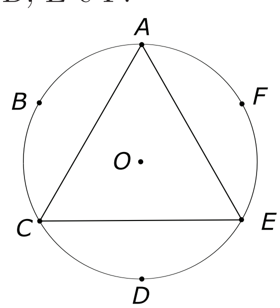
$\Delta\ AMO$ retângulo $\Rightarrow a_6^2 + \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = R^2$

$\Rightarrow a_6^2 = R^2 - \dfrac{R^2}{4} = \dfrac{3R^2}{4} \Rightarrow a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

c) Construção:
Inscrever um hexágono regular em uma circunferência de raio R; é suficiente marcar consecutivamente, a partir de um ponto A da circunferência, com a abertura do compasso igual ao raio, os arcos AB, BC, $\cdots$ e traçar as correspondentes cordas.

Triângulo equilátero

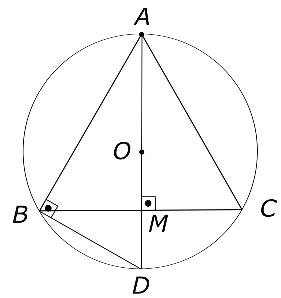
a) Construção:
Dividir a circunferência em 6 partes congruentes, a partir de um ponto A qualquer, obtendo-se B, C, D, E e F.



Ligar os pontos A com C, C com E e E com A obtendo o $\Delta\ ACE$, que é equilátero.
Note que $\overset{\frown}{ABC} \equiv \overset{\frown}{CDE} \equiv \overset{\frown}{EFA} =\ 120^\circ$.

b) Cálculo do lado em função de R:

Seja ABC um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio R.

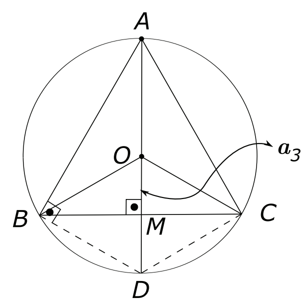


Trace o diâmetro AD, observe que $\overset{\frown}{BD} = 60° \Rightarrow \overline{BD} = l_6 = R$

$\Delta\ ABD$ retângulo $\Rightarrow \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2$

$$\Rightarrow l_3^2 + R^2 = (2R)^2 \Rightarrow l_3^2 = 3R^2 \Rightarrow l_3 = R\sqrt{3}$$

c) Cálculo do apótema em função de R:



O quadrilátero $BDCO$ é um losango $\Rightarrow \overline{OM} = \dfrac{\overline{OD}}{2}$

Daí,

$$a_3 = \frac{R}{2}.$$

Exercícios Resolvidos

1. Calcule a medida do ângulo cêntrico de um decágono.

Solução:

Temos que o ângulo cêntrico é:

$$\frac{360°}{n} \Rightarrow a_c = \frac{360°}{10} = 36°.$$

2. Calcule a medida do lado de um quadrado inscrito em um círculo de raio 10 cm.

Solução:
Temos que $l_4 = R\sqrt{2} \Rightarrow l_4 = 10\sqrt{2}$ cm.

3. Calcule o lado de um triângulo equilátero inscrito em um círculo, sabendo que o lado do hexágono inscrito nesse círculo mede $5\sqrt{6}$ cm.

Solução:
Temos que $l_3 = R\sqrt{3}$ e $l_6 = 5\sqrt{6}$.
Mas

$$\begin{aligned} l_6 = R \ &\Rightarrow l_3 = 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \\ &\Rightarrow l_3 = 5\sqrt{18} = 5 \cdot 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \\ &\Rightarrow l_3 = 15\sqrt{2} \text{ cm.} \end{aligned}$$

4. Calcule o perímetro de um triângulo inscrito em um círculo, sabendo que o apótema do quadrado inscrito nesse círculo mede $3\sqrt{5}$ cm.

Solução:
Temos

$$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 3\sqrt{5} = \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{10}}{2} = 3\sqrt{10}.$$

Como

$$l_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow l_3 = 3\sqrt{10}\sqrt{3} \Rightarrow l_3 = 3\sqrt{30}.$$

Logo, o perímetro pedido é: $3l_3 = 3 \cdot 3\sqrt{30} = 9\sqrt{30}$.

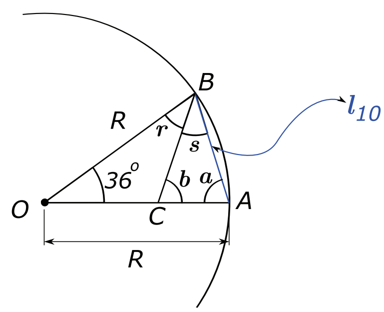
5. Determine a razão entre o apótema do quadrado e o apótema de um hexágono regular, inscritos em um círculo de raio R.

Solução:
Temos que

$$a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \text{ e } a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{a_4}{a_6} = \frac{\frac{R\sqrt{2}}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Decágono regular

a) Cálculo do lado em função do raio:
Seja AB o lado de um decágono regular inscrito em uma circunferência de raio R.



O ângulo central $A\hat{O}B$ é tal que:

$$m(A\hat{O}B) = \frac{360°}{10} = 36°$$

No triângulo isósceles $A\hat{O}B$, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ de medidas a e $(r+s)$ valem cada um $\dfrac{180° - 36°}{2} = 72°$.
Traçando a bissetriz BC do ângulo $\hat{B}$, temos

$$r = s = \frac{72°}{2} = 36°$$

então o triângulo OBC é isósceles e $\overline{OC} = \overline{BC}$.
No Δ ABC temos que $b = 180° - 36° - 72° = 72°$
$\Rightarrow \Delta$ ABC é isósceles $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{OC} = l_{10}$
Usando o Teorema da bissetriz interna

$$\Rightarrow \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{l_{10}}{R} = \frac{R - l_{10}}{l_{10}}$$

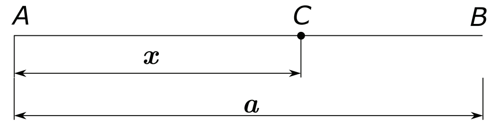
$$\Rightarrow l_{10}^2 = R^2 - R \cdot l_{10} \Rightarrow l_{10} = (\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{R}{2}$$

Segmento áureo

Definição: Seja um segmento AB e C um ponto de AB, tal que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BC} \quad (1).$$

O segmento AC, cuja medida satisfaz a relação (1) é o segmento áureo do segmento AB.



Considerando $\overline{AB} = a$ e $\overline{AC} = x$ e substituindo em (1) vem:

$$x^2 = a(a-x) \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \\ \\ \dfrac{-a - a\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(Não serve)} \end{cases}$$

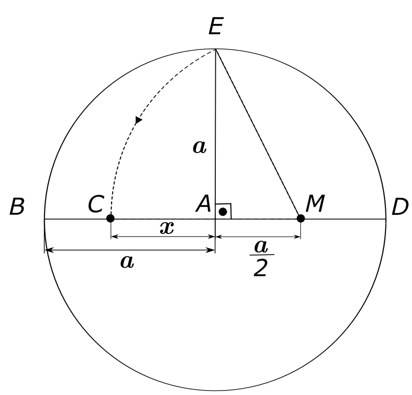
$$\Rightarrow x = \overline{AC} = (\sqrt{5} - 1)\frac{a}{2}$$

Observação:

Note que o segmento de medida $(\sqrt{5} - 1)\dfrac{R}{2}$ é o segmento áureo do raio.

b) Construção de um segmento áureo

1) Trace uma circunferência de centro A e raio a.
2) Trace o diâmetro BD e o raio AE perpendiculares.
3) Considere o ponto médio M de AD.
4) Transporte ME sobre o diâmetro BD, achando o ponto C.
5) Ache AC, que é o segmento procurado.



$$\overline{ME}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$
$$\overline{ME} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Justificativa:

$\Delta\ EAM$ é retângulo.

$$\overline{ME} = \overline{MC} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Daí,

$$\overline{AC} = \overline{MC} - \overline{MA} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = (\sqrt{5}-1)\frac{a}{2}$$

De forma similar, como

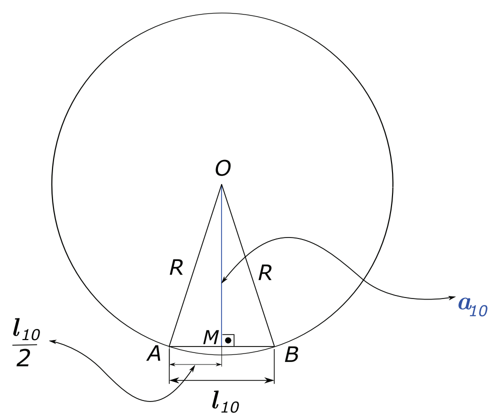
$$l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

construímos o lado do decágono regular inscrito em uma circunferência de raio R.

c) Cálculo do apótema em função de R:

No $\Delta\ AMO$ retângulo temos:

$$\overline{OM}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{AM}^2$$



onde:

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= a_{10} \\ \overline{AO} &= R \quad\quad \text{e} \\ \overline{AM} &= \frac{l_{10}}{2} = \frac{R}{4}(\sqrt{5}-1) \end{aligned}$$

Daí,

$$a_{10}^2 = R^2 - \left(\frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)\right)^2 \Rightarrow a_{10}^2 = R^2 - \frac{R^2}{16}(5+1-2\sqrt{5})$$

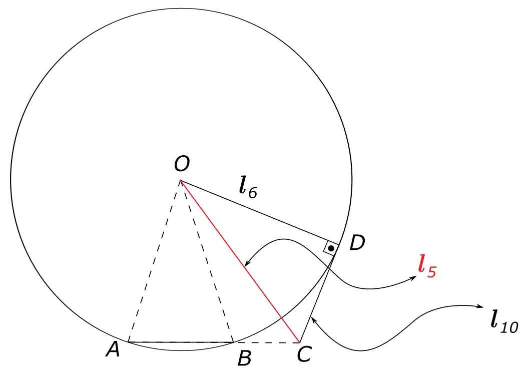
$$\Rightarrow a_{10}^2 = \frac{16R^2 - R^2(6-2\sqrt{5})}{16} \Rightarrow a_{10}^2 = \frac{R^2(10+2\sqrt{5})}{16}$$

$$\Rightarrow a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Pentágono

a) Cálculo do lado em função do raio:

Considere AB o lado do decágono regular.



Prolongue AB, de modo que $\overline{AC} = \overline{AO} = R$.

Trace OC; o segmento OC é o lado do pentágono regular inscrito na circunferência de raio $\overline{AO} = \overline{AC} = R$, porque o ângulo $C\hat{A}O$ mede 72°.

Pelo ponto C, trace a tangente CD à circunferência.

Por propriedade de relações métricas no círculo temos:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CB} \quad (1)$$

Mas AB é segmento áureo do raio $\overline{AC} = R$, então

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{CB} \quad (2).$$

De (1) e (2) vem que:

$$\overline{CD} = \overline{AB}.$$

Daí,

$$\overline{CD} = l_{10}.$$

Portanto, o triângulo OCD tem por hipotenusa o lado do pentágono regular e por catetos os lados do hexágono regular e do decágono regular, ou seja:

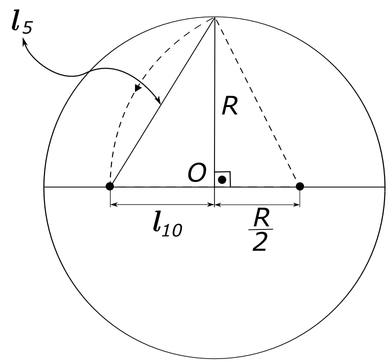
$$l_5^2 = l_6^2 + l_{10}^2 \Rightarrow l_5^2 = R^2 + \left((\sqrt{5}-1)\frac{R}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow l_5^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}(5+1-2\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow l_5^2 = \frac{R^2}{4}(4+6-2\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

b) Construção:



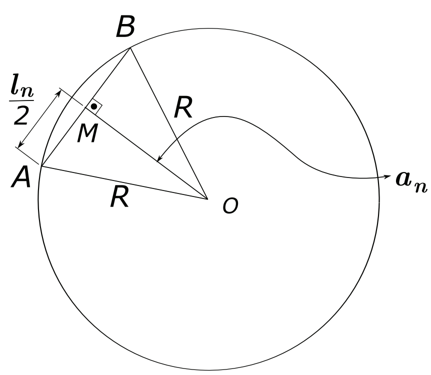
1) Construir o l_{10}.

2) Construir um triângulo retângulo de catores R e l_{10}.

3) A hipotenusa desse triângulo é o l_5.

Expressão geral do apótema de um polígono regular

Seja AB o lado de medida l_n de um polígono regular de n lados. Seja OM o apótema desse polígono de medida a_n e R o raio da circunferência circunscrita.



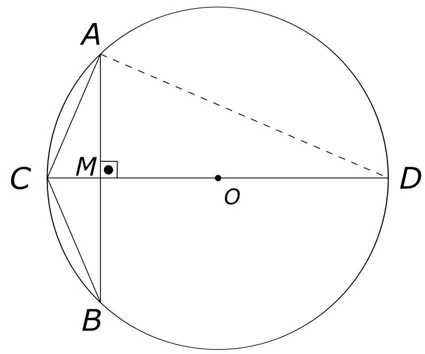
Do Δ AOM temos:

$$R^2 = a_n^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 \Rightarrow a_n^2 = R^2 - \frac{l_n^2}{4}$$

$$\Rightarrow a_n = \sqrt{\frac{4R^2 - l_n^2}{4}} \Rightarrow a_n = \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2}$$

Expressão geral do lado de um polígono regular de $2n$ lados em função do de n lados

Seja AB o lado de medida l_n de um polígono regular de n lados. Trace o diâmetro CD perpendicular à corda AB.



O ponto C divide o arco AB em dois arcos congruentes e daí AC será o lado do polígono de $2n$ lados, cuja medida vamos denotar por l_{2n}.
Do triângulo retângulo CAD vem:

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CM} \qquad (1).$$

Mas

$$\overline{CM} = R - \overline{OM}, \quad \overline{CD} = 2R, \quad \overline{AC} = l_{2n}$$

e

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2} \text{ (apótema do polígono de } n \text{ lados).}$$

Substituindo estes valores em (1) vem:

$$l_{2n}^2 = 2R\left(R - \frac{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}{2}\right)$$

$$l_{2n}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}$$

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

Exercícios Resolvidos

6. Calcule a medida do lado de um dodecágono regular em função do raio R da circunferência circunscrita.

Solução:
Temos que:

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_6^2}}.$$

Mas $l_6 = R$, então

$$l_{12} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - R^2}} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{R^2(2-\sqrt{3})} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

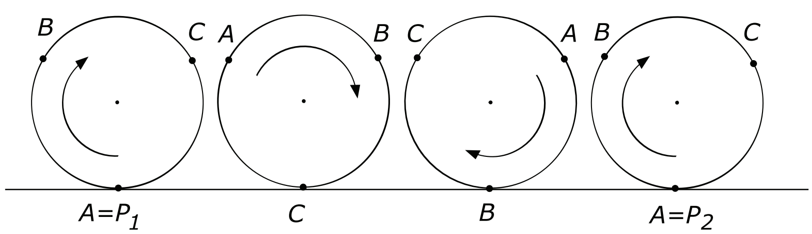
Logo, $l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Comprimento de uma circunferência

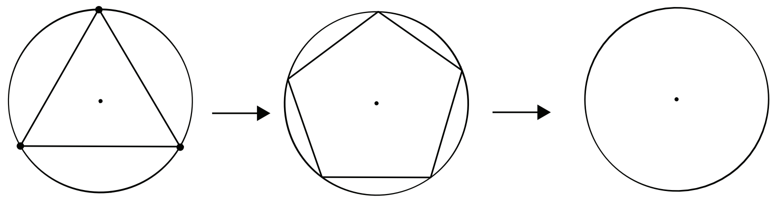
Segmento retificante da circunferência

Retificar uma circunferência é determinar um segmento, denominado *segmento retificante da circunferência*, cujo comprimento seja o comprimento da circunferência.

A figura seguinte mostra que $\overline{P_1P_2}$ é o segmento retificante da circunferência.



Seja um polígono regular inscrito em uma circunferência. Se dobrarmos o número de lados desse polígono, basta tomar os pontos médios dos arcos correspondentes para obter um novo polígono regular cujo perímetro tem medida maior que o polígono anterior. Se dobrarmos sucessivamente e indefinidamente o número de lados desse polígono, teremos o perímetro de um polígono que se aproxima do comprimento da circunferência circunscrita.

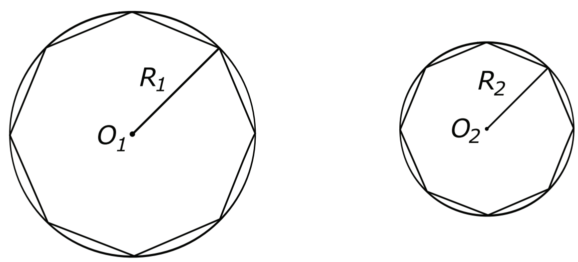


Definição: *Comprimento de uma circunferência* é o número para que tendem os perímetros dos polígonos inscritos nessa circunferência quando o número de lados aumenta indefinidamente.

Teorema: A razão entre o comprimento de uma circunferência qualquer e a medida do diâmetro é constante.

Prova:

Considere duas circunferências de raios R_1 e R_2 e comprimentos C_1 e C_2, respectivamente, e suponha os polígonos regulares de n lados, inscritos nessa circunferência.



Temos que os polígonos regulares inscritos são semelhantes e daí,

$$\frac{P_n^1}{P_n^2} = \frac{R_1}{R_2}$$

onde P_n^1 e P_n^2 são os respectivos perímetros.

Fazendo o número de lados crescer indefinidamente, as medidas dos perímetros P_n^1 e P_n^2 vão tender para C_1 e C_2 que são os comprimentos das circunferências.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{2R_1}{2R_2}$$

Logo,

$$\frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}.$$

Exercícios Resolvidos

7. Determine o valor de 1 radiano em graus.

Solução:
Temos que:

$$\begin{array}{lcl} \pi \text{ rad} & - & 180^\circ \\ 1 \text{ rad} & - & \alpha \end{array} \Rightarrow \alpha = \frac{180 \cdot 1}{\pi} \approxeq 57^\circ 17' \text{ se } \pi \approxeq 3,1415.$$

8. Se o raio de uma circunferência aumenta 1 metro, quanto aumenta o seu comprimento?

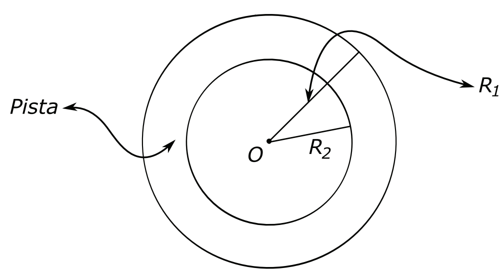
Solução:
Seja a circunferência de raio $R \Rightarrow$ o comprimento $C = 2\pi R$.
Aumentando R de 1 metro, vem: $R + 1 \Rightarrow$ o novo comprimento é:

$$C' = 2\pi(R+1) = 2\pi R + 2\pi = C + 2\pi$$

O comprimento aumenta 2π metros.

9. Uma pista circular foi construída por duas circunferências concêntricas, cujos comprimentos são de 1.500 metros e 1.000 metros aproximadamente. Quanto mede sua largura?

Solução:



Temos que:

$$1.500 = 2\pi R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{750}{\pi}$$

$$1.000 = 2\pi R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{500}{\pi}.$$

A largura da pista circular é:

$$R_1 - R_2 = \frac{750}{\pi} - \frac{500}{\pi} = \frac{250}{\pi} \text{ metros.}$$

Nota:
A razão constante do comprimento da circunferência para a medida do diâmetro é representada por π.
Assim,

$$\frac{C}{2R} = \pi \qquad (1)$$

Expressão do comprimento de uma circunferência

De (1) vem que

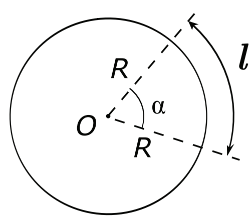
$$C = 2\pi R$$

onde C é o comprimento da circunferência e R é o raio da circunferência.

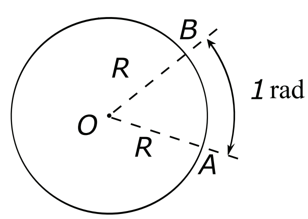
Comprimento de um arco de circunferência

O comprimento de um arco de circunferência, que vamos denotar por l, é proporcional à sua medida (α).
Seja α em graus:

$$\begin{array}{lcl} 360^\circ & - & 2\pi R \\ \alpha & - & l \end{array} \Rightarrow l = \frac{\pi R \alpha}{180^\circ}$$



Definição: Denomina-se 1 radiano todo arco de circunferência cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência que o contém.



Temos que:

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ rad} & \rightleftharpoons & \overset{\frown}{AB} = R, \quad \overset{\frown}{AB} = l_1 \to \text{ comprimento do arco AB.} \\ 2 \text{ rad} & \to & l_2 = 2R, \quad l_2 \to \text{ comprimento do arco para 2 rd} \\ \vdots & & \\ \alpha \text{ rad} & \to & l = \alpha R \end{array}$$

ou seja,
$l = \alpha R \quad (1),$
onde
$l \rightarrow$ comprimento do arco AB.
$\alpha \rightarrow$ ângulo em radianos.
$R \rightarrow$ raio.
Daí, como o comprimento de uma circunferência de raio R é $2\pi R$, usando (1) vem:

$$2\pi R = \alpha R \Rightarrow \alpha = 2\pi$$

daí, o ângulo de 1 volta é 2π.

Exercícios Resolvidos

10. Calcule o comprimento de um arco de 36° em uma circunferência de raio 5 cm.

Solução:
Temos que:

$$l = \frac{\pi R \alpha}{180},$$

onde
$R \rightarrow$ raio $= 5$ cm.
$\alpha = 36^\circ$.
$l \rightarrow$ comprimento do arco.

$$l = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 36}{180} = \pi.$$

Daí, o comprimento é π cm.

11. Qual a razão entre o comprimento de uma circunferência e o perímetro de um triângulo equilátero inscrito?

Solução:
O comprimento da circunferência é $2\pi R$, onde R é o raio.
O lado do triângulo equilátero inscrito no círculo é:

$$l_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow \quad \text{o perímetro do triângulo é } 3R\sqrt{3}.$$

Daí, a razão pedida é:

$$\frac{2\pi R}{3R\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Exercícios Propostos

1. Qual o polígono regular cujo ângulo cêntrico mede $24°$?

2. Calcule o lado de um quadrado inscrito em um círculo de raio igual a $2\sqrt{5}$ cm.

3. A altura de um triângulo equilátero inscrito mede 10 cm. Calcule o lado do hexágono regular inscrito nesse mesmo círculo.

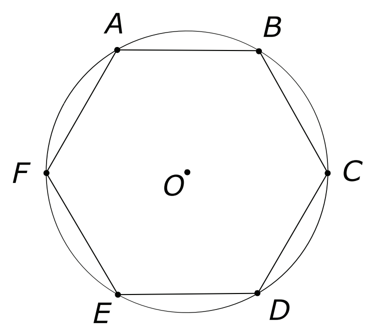
4. Qual a razão entre os lados de dois triângulos equiláteros, um inscrito e outro circunscrito à mesma circunferência?

5. No hexágono regular $ABCDEF$ da figura, o lado mede $\sqrt{2}$ cm. Calcular:

   a) o apótema;

   b) o raio do círculo inscrito;

   c) a diagonal AC.



6. Determine a razão entre o apótema do quadrado e o apótema de um hexágono regular, inscritos em um círculo de raio r.

7. Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500 km sobre uma pista circular de raio 200 metros. Determine o número de voltas completas que ele deve dar.

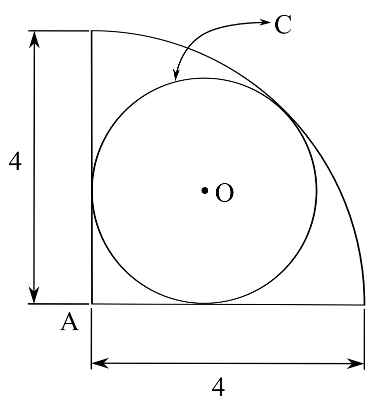
8. Calcule o comprimento de uma circunferência, sabendo que o apótema de um triângulo equilátero inscrito neste círculo é $3\sqrt{2}$ cm.

9. Em uma circunferência, um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad tem comprimento de 4 cm. Calcule a medida do raio dessa circunferência.

10. Um triângulo inscrito em uma circunferência de raio 10 cm determina neste três arcos cujos comprimentos são proporcionais aos números 3, 4 e 5. Determine os ângulos desse triângulo.

11. Um trator tem as rodas da frente com $0,60$ metros de diâmetro e as traseiras com o dobro desse diâmetro. Qual a distância percorrida pelo trator se as rodas da frente deram 2000 voltas a mais que as traseiras?

12. Calcule o comprimento da circunferência C da figura abaixo.



13. Determinar a razão entre o perímetro do quadrado inscrito em um círculo de raio R e o perímetro do quadrado circunscrito a esse mesmo círculo.

14. O ponto mais baixo de uma roda gigante circular de raio R metros dista 1 metro do solo. A roda está girando com três crianças que estão, duas a duas, à mesma distância. Determine a altura de duas delas, no momento em que a outra está no ponto mais alto.

Gabarito

1. Pentadecágono.

2. $2\sqrt{10}$ cm.

3. $\dfrac{20}{3}$ cm.

4. $\dfrac{1}{2}$.

5. a) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm, b) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ cm, c) $\sqrt{6}$ cm.

6. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

7. 398.

8. $12\pi\sqrt{2}$ cm.

9. $\dfrac{24}{\pi}$ cm.

10. $45^\circ,\ 60^\circ$ e 75°.

11. 2400π metros.

12. $8\pi(\sqrt{2}-1)$.

13. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

14. $\dfrac{2+R}{2}$.