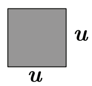
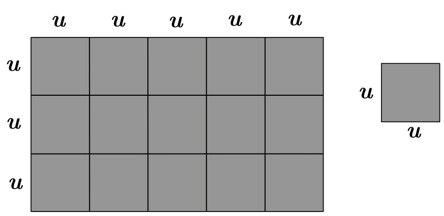
Aula 12 – Áreas de Superfícies Planas

Superfície de um polígono é a reunião do polígono com o seu interior. A figura mostra uma superfície retangular.

Área de uma superfície é um número real positivo a essa superfície. A área expressa a medida de uma superfície numa certa unidade. Vamos considerar como unidade a superfície de um quadrado de lado u.



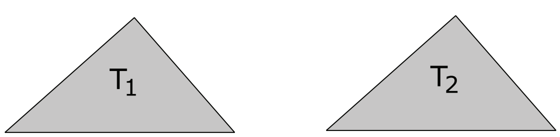
Seja o retângulo de dimensão $5u$ e $3u$.



A área dessa superfície é igual a 15.

Superfícies congruentes

As superfícies de duas figuras congruentes são denominadas congruentes se têm a mesma área.
Na figura, os triângulos são congruentes e daí, área $_{T_1}$ = área $_{T_2}$.



Superfícies equivalentes

Duas superfícies são denominadas equivalentes se têm a mesma área.
Assim, as superfícies das figuras 1 e 2 são equivalentes.

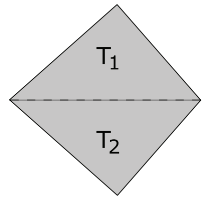


figura 1

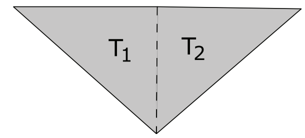


figura 2

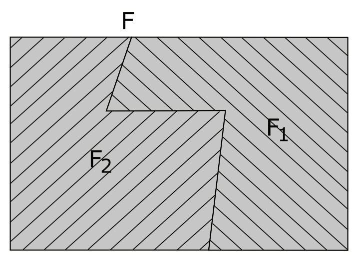
$$\left\{\begin{array}{l} \text{área}_{\textit{figura 1}} = \text{área}_{\,T_1} + \text{área}_{\,T_2} \\ \\ \text{área}_{\textit{figura 2}} = \text{área}_{\,T_1} + \text{área}_{\,T_2} \end{array}\right. \Rightarrow \text{área}_{\textit{figura 1}} = \text{área}_{\textit{figura 2}}$$

Vamos precisar de dois postulados para o estudo de áreas de superfícies planas.

1) Postulado da adição de áreas

Se a superfície de uma figura plana F é a reunião das superfícies das figuras F_1 e F_2 sem pontos interiores comuns, então $\text{área}_F = \text{área}_{F_1} + \text{área}_{F_2}$.

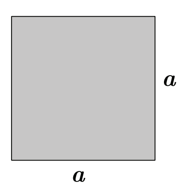
Na figura, a superfície F é a reunião das superfícies F_1 e F_2.



2) Postulado da unidade de áreas

A área da superfície de um quadrado é o quadrado da medida do lado.

Na figura, o quadrado de lado a tem área a^2.



Observações:

1) Quando nos referirmos à área de um quadrado, de um triângulo, etc., estamos nos referindo à área da respectiva superfície.

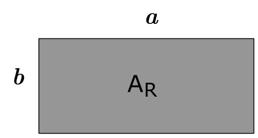
2) Em um retângulo, dois lados adjacentes constituem a base e a altura e são denominados dimensões do retângulo.

Área de um retângulo

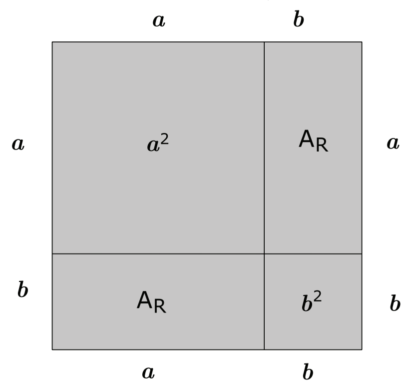
Teorema 1: A área de um retângulo é o produto da base pela sua altura.

Prova:

Considere um retângulo de base a, altura b e área A_R.



Vamos considerar os quadrados de lados a, b e $a + b$.



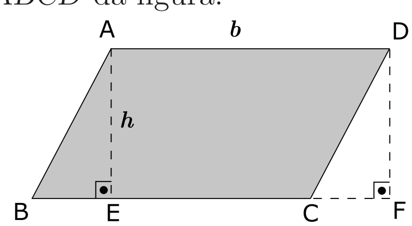
Temos pelos postulados de áreas que:

$$\begin{aligned} & a^2 + A_R + A_R + b^2 = (a+b)^2 \\ \Rightarrow\ & a^2 + 2A_R + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \Rightarrow\ & A_R = ab \end{aligned}$$

Teorema 2: Todo paralelogramo é equivalente a um retângulo de base e altura respectivamente congruentes às do paralelogramo.

Prova:

Seja o paralelogramo $ABCD$ da figura.



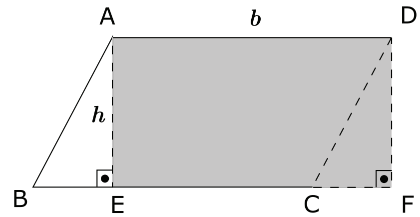
Trace pelos vértices A e D as perpendiculares AE e DF à reta suporte do lado BC.

Vamos provar que $\Delta\ ABE \equiv \Delta\ DCF$.

De fato,

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \text{ (lados opostos de um paralelogramo)} \\ \overline{AE} = \overline{DF} \text{ (altura do paralelogramo)} \end{array} \right. \quad \text{Caso Especial}$$

então a área do paralelogramo $ABCD$ é equivalente à área do retângulo $AEFD$, já que as áreas são iguais.



Conseqüências: Denotando por b e h as medidas da base e altura comuns, vem:

$$\left.\begin{array}{l} A_P = A_R \\ A_R = b \cdot h \quad \text{(Teorema 1)} \end{array}\right. \Rightarrow A_P = b \cdot h$$

Logo:

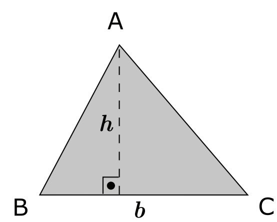
A área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura.

Área de um triângulo

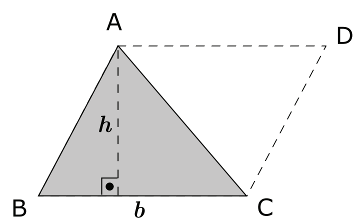
Teorema 3: A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.

Prova:

Considere o triângulo ABC de base b e altura h.



Trace AD e CD, respectivamente, paralelas aos lados BC e AB, daí temos o paralelogramo $ABCD$.



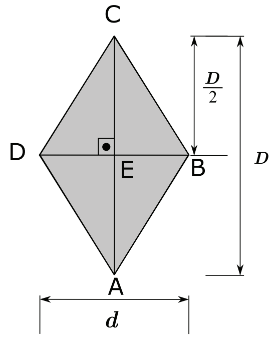
Temos que $\Delta\ ABC \equiv \Delta\ CDA$, pois

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{BC} \\ \overline{AB} = \overline{CD} \\ AC \quad \text{comum} \end{array}\right. \quad (LLL) \Rightarrow A_T = \frac{A_P}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

já que $\mathrm{A}_{\Delta ABC} = \mathrm{A}_{\Delta CDA}$

Área de um losango

Teorema 4: A área de um losango é igual à metade do produto das diagonais.
Prova:
Seja o losango $ABCD$ de centro E cujas diagonais AC e BD medem, respectivamente, D e d.

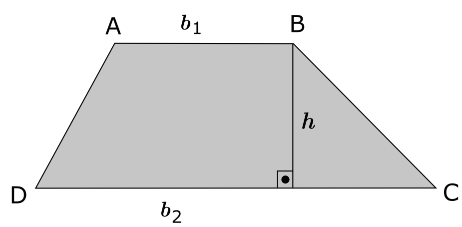


A diagonal BD divide o losango em dois triângulos ABD e CDB.
Pelo postulado de adição de áreas vem:

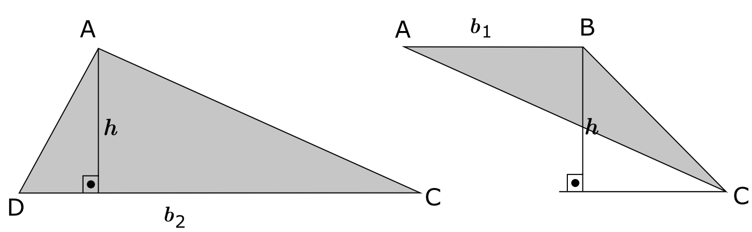
$$
\begin{aligned}
& A_L = A_{\Delta ABD} + A_{\Delta CDB} = \frac{d\cdot\frac{D}{2}}{2} + \frac{d\cdot\frac{D}{2}}{2} \\
\Rightarrow\ & A_L = \frac{Dd}{4} + \frac{Dd}{4} = \frac{Dd}{2} \\
\Rightarrow\ & A_L = \frac{Dd}{2}
\end{aligned}
$$

Área de um trapézio

Teorema 5: A área de um trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das bases.
Prova:
Seja o trapézio $ABCD$ de bases b_1 e b_2 e altura h.



Podemos dividir este trapézio em dois triângulos que são: $\Delta\ ADC$ e $\Delta\ ABC$ de mesma altura h.



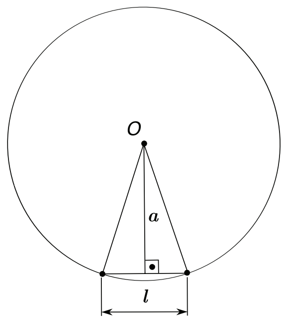
então

$$A_{\text{Trapézio}} = \frac{b_2 \cdot h}{2} + \frac{b_1 \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\text{Trapézio}} = \frac{(b_1 + b_2)h}{2}$$

Área de um polígono regular

Teorema 6: A área de um polígono regular é igual ao produto do semiperímetro pelo apótema.

Prova:



Considere o polígono regular sendo:
$n \rightarrow$ número de lados,
$a \rightarrow$ medida do apótema
$l \rightarrow$ medida do lado e
$p \rightarrow$ semiperímetro.

Podemos decompor esse polígono em n triângulos de base l e altura a, então

$$A_{Polígono} = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}$$

Como $nl = 2p$ (perímetro), então

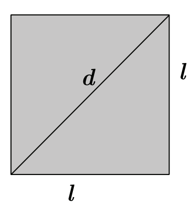
$$A_{Polígono} = \frac{2pa}{2} \Rightarrow A_{Polígono} = pa$$

Exercícios Resolvidos

1. Determine a área de um quadrado em função da sua diagonal d.

Solução:

Seja o quadrado de diagonal d.



Temos que a área de um quadrado é:

$$A_{quadrado} = l^2$$

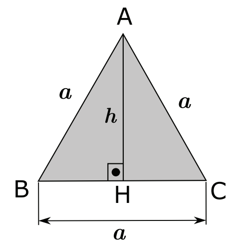
$$d^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow l^2 = \frac{d^2}{2}$$

Logo,

$$A_{quadrado} = \frac{d^2}{2}$$

2. Determine a área de um triângulo equilátero de lado a.

Solução:
Seja um triângulo equilátero ABC de lado a e altura h.



No Δ AHC temos:

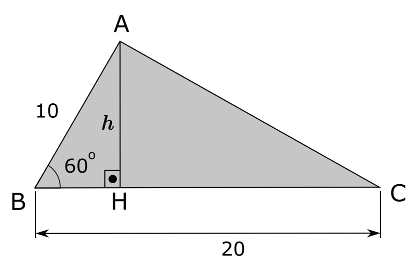
$$
\begin{aligned}
& h^2 + \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 = a^2 \\
\Rightarrow\ & h^2 = a^2 - \tfrac{a^2}{4} = \tfrac{3a^2}{4} \\
\Rightarrow\ & h = \tfrac{a\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Logo, a área pedida é:

$$A_T = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

3. Dois lados de um triângulo medem 10 cm e 20 cm e formam um ângulo de 60°. Calcule a área desse triângulo.

Solução:
Seja ABC o triângulo da figura, onde $\overline{AB} = 10$ cm, $\overline{BC} = 20$ cm e $\overline{AH} = h$.



Temos que

$$A_{\Delta ABC} = \frac{20h}{2} = 10h \quad (1)$$

No Δ AHB

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \Rightarrow h = 5\sqrt{3} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), vem:

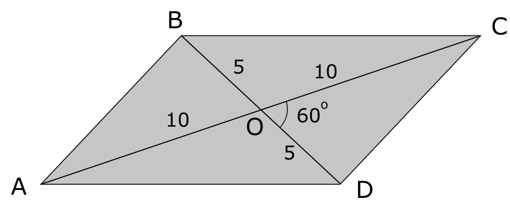
$$A = 10 \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow A = 50\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Observação:
Se dois lados de um triângulo medem a e b e formam um ângulo α, então a área desse triângulo é:

$$A = \frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

4. As diagonais de um paralelogramo medem 10 metros e 20 metros e formam um ângulo de 60°. Achar a área do paralelogramo.

Solução:
Seja um paralelogramo com diagonais que medem 10 metros e 20 metros e formam um ângulo de 60°. As diagonais se cortam ao meio.



Temos que

$$A_{Paralelogramo} = A_{\Delta OCB} + A_{\Delta OAB} + A_{\Delta OCD} + A_{\Delta OAD}$$
$$A_{Paralelogramo} = \frac{5{\cdot}10 \operatorname{sen} 120^\circ}{2} + \frac{5{\cdot}10 \operatorname{sen} 60^\circ}{2} + \frac{5{\cdot}10 \operatorname{sen} 60^\circ}{2} + \frac{5{\cdot}10 \operatorname{sen} 120^\circ}{2}$$

Como $\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, vem:

$$A_{Paralelogramo} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 10\sqrt{3}}{4} = 50\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

5. Um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular tem o mesmo perímetro que é 120 cm. Determinar a razão entre a soma das áreas do triângulo equilátero e do quadrado para a área do hexágono regular.

Solução:
O triângulo equilátero tem perímetro 120 cm, então o lado desse triângulo é $\frac{120}{3}$ cm = 40 cm, pelo Exercício 2, a área desse triângulo é

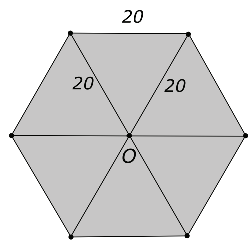
$$S_1 = \frac{40^2\sqrt{3}}{4} = 400\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

O quadrado tem perímetro 120 cm, então o lado desse quadrado é $\frac{120}{4}$ cm = 30 cm, temos que a área do quadrado é:

$$S_2 = 30^2 = 900\ \text{cm}^2$$

O hexágono regular tem perímetro 120 cm, então o lado desse hexágono é $\frac{120}{6}$ cm $= 20$ cm e sua área é:

$$S_3 = \frac{6 \cdot 20^2\sqrt{3}}{4} = 600\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$



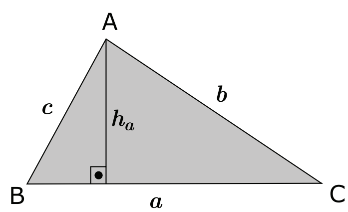
Daí, a razão pedida é:

$$\frac{S_1 + S_2}{S_3} = \frac{400\sqrt{3} + 900}{600\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} + 9}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12 + 9\sqrt{3}}{18} = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{6}$$

Expressões da área de um triângulo

1) Área de um triângulo em função dos lados

Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo ABC e $p = \frac{a+b+c}{2}$



Temos, pelo Exercício Proposto 15 da Aula 10, que:

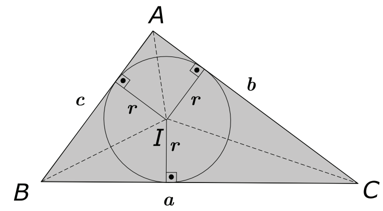
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Logo, a área do triângulo ABC é:

$$S = \frac{a.h_a}{2} = \frac{a\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2}$$
$$\Rightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

2) Área de um triângulo *ABC* em função dos lados e do raio r da circunferência inscrita

Considere o triângulo ABC da figura, sendo r o raio do círculo inscrito e os lados desse triângulo sendo a, b e c.

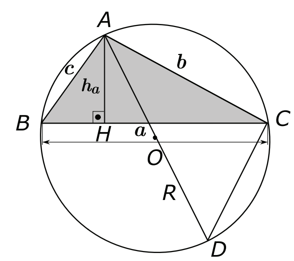


Sendo S a área do triângulo ABC, temos:

$$S = S_{IBC} + S_{IAC} + S_{IAB} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{r(a+b+c)}{2} \Rightarrow S = pr$$

3) Área de um triângulo em função dos lados e do raio do círculo circunscrito

Considere o triângulo ABC da figura, sendo a sua área S, inscrito em um círculo de raio R e centro O. Trace pelo vértice a altura AH de medida h_a e o diâmetro AD.



Temos que

$$S = \frac{ah_a}{2} \qquad (1)$$

Sejam os triângulos AHB e ACD, temos

$$\left\{\begin{array}{l} m(A\hat{H}B) \;= m(A\hat{C}D) = 90^\circ \\ m(A\hat{B}H) = m(A\hat{D}C) = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \end{array}\right. \underset{AA\sim}{\Longrightarrow} \Delta AHB \sim \Delta ACD$$

Logo,

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{h_a}{b} = \frac{c}{2R} \Rightarrow h_a = \frac{bc}{2R} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) vem:

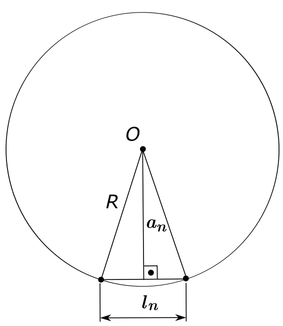
$$S = \frac{a \cdot \frac{bc}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R} \Rightarrow S = \frac{abc}{4R}$$

4) Área de um círculo

Teorema 7: A área de um círculo é o produto do número π pelo quadrado do raio.

Prova:

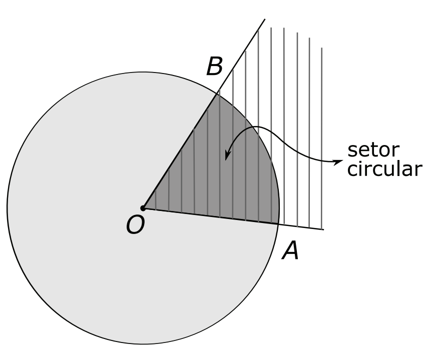
Pelo Teorema 6, temos que a área de um polígono regular é o produto da medida do semiperímetro pelo apótema, ou seja, $A_{Polígono\ regular} = p \cdot a$.
Seja um círculo de raio R, considere os polígonos regulares inscritos e os circunscritos nesse círculo.
Com o crescimento do número de lados, as áreas dos polígonos se aproximam da área do círculo, assim como os seus perímetros se aproximam do perímetro da circunferência e os apótemas se aproximam do raio do círculo.



Note que $l_n \to 0$, $2p \to C$ e $a_n \to R$, onde C é o comprimento da circunferência.

Daí, a área do círculo é:
$A_c = \pi R \cdot R = \pi R^2 \Rightarrow A_c = \pi R^2$

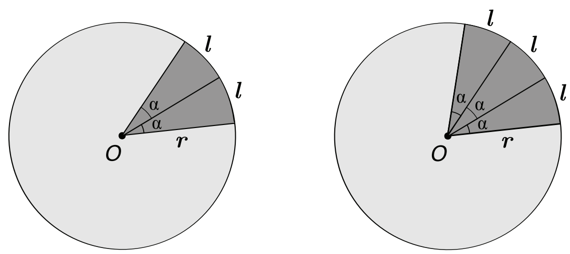
Área do setor circular



Setor circular:
Seja, em um plano, um círculo de centro O e um setor angular $A\hat{O}B$, conforme figura.

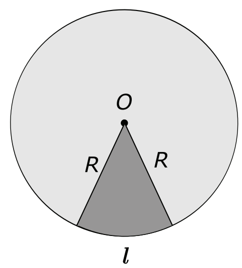
O conjunto dos pontos comuns ao círculo e ao setor angular chama-se setor circular.

Note que se dobrarmos o arco (ou ângulo central) dobra-se a área do setor; triplicando o arco (ou ângulo central), a área do setor é triplicada, e assim por diante.



Daí, a área do setor é proporcional ao comprimento do arco (ou a medida do ângulo central).

De um modo geral:

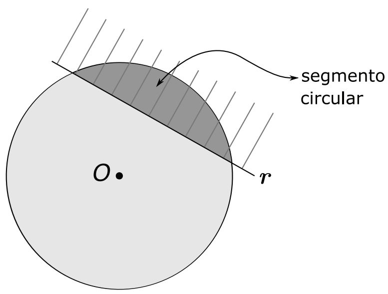


$$\begin{array}{lcl} \text{comprimento} & & \text{área} \\ 2\pi R & - & \pi R^2 \\ l & - & A_{setor} \end{array} \Rightarrow A_{setor} = \frac{l \cdot \pi R^2}{2\pi R} = \frac{lR}{2} \Rightarrow A_{setor} = \frac{lR}{2}$$

Logo, a área de um setor circular é igual ao semiperímetro do comprimento do arco pelo raio.
Temos, também, que:

$$\begin{array}{lcl} 2\pi \text{ rad} & - & \pi R^2 \\ \alpha \text{ rad} & - & A_{setor} \end{array} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{2\pi} \Rightarrow A_{setor} = \frac{\alpha R^2}{2}$$

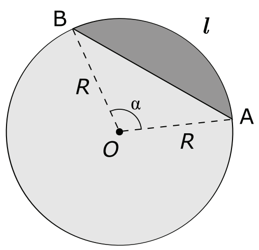
Segmento circular



Seja, em um plano, um círculo e um semiplano de origem na reta r secante ao círculo, conforme a figura.

O conjunto dos pontos comuns ao círculo e ao semiplano denomina-se *segmento circular*.

Área do segmento circular

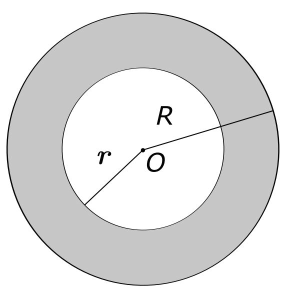


Seja, na figura, R o raio do círculo, α é a medida do ângulo central e l o comprimento do arco.

$$A_{segmento} = A_{setor\ OAB} - A_{\Delta OAB} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{1}{2}R \cdot R \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{R^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$$

$$A_{segmento} = \frac{R^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha), \alpha \text{ em radianos.}$$

Área da coroa circular



Coroa circular

Seja em um plano duas circunferências de mesmo centro O, conforme a figura ao lado.

Coroa circular é a união dessas circunferências com os pontos do plano compreendidos entre elas.

Área da coroa circular:

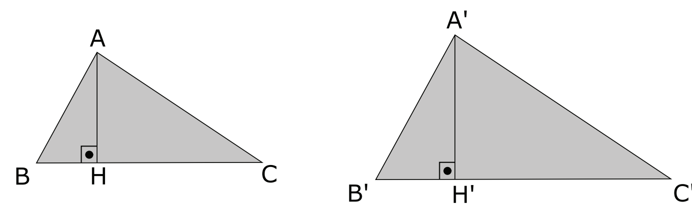
$$A_{coroa} = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow A_{coroa} = \pi(R^2 - r^2)$$

Razão entre áreas de dois triângulos semelhantes

Teorema: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Prova:

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$ e seja k a razão de semelhança.



Temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{A'H'}} = k$$

Sejam S_1 e S_2 as áreas dos triângulos ABC e $A'B'C'$, então

$$S_1 = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2} \quad \text{e} \quad S_2 = \frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{A'H'}}{2}$$

então

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{\overline{BC} \cdot \overline{AH}}{2}}{\frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{A'H'}}{2}} = k \cdot k \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

Razão entre áreas de dois polígonos semelhantes

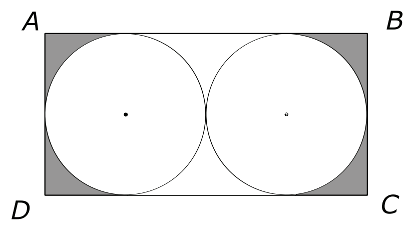
Teorema: A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes quaisquer é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Prova:

A demonstração desse teorema é análoga à anterior, dividindo os dois polígonos de n lados em $n-2$ triângulos ordenadamente semelhantes.

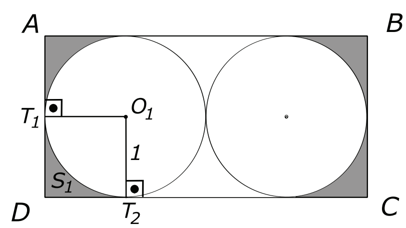
Exercícios Resolvidos

6. Determine a área da região hachurada, onde $ABCD$ é retângulo e os raios das circunferências valem 1 cm.



Solução:

Considere a figura dada, com os raios das circunferências igual a 1 cm.



Vamos achar a área hachurada.

Temos que:

$$S_1 = 1^2 - \pi \cdot \frac{1^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Note que $O_1T_1DT_2$ é quadrado e $T_1\hat{O}_1T_2 = 90°$.

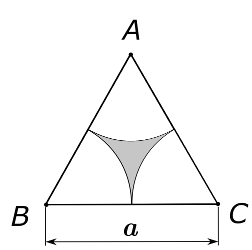
Daí, a área pedida é:

$$S_p = 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = (4 - \pi)\ \text{cm}^2$$

7. Considere um triângulo equilátero de lado a, onde foram traçados três círculos de raio $\frac{a}{2}$, com centros nos vértices desse triângulo. Calcule a área exterior aos círculos e interior ao triângulo equilátero.

Solução:

Considere a figura com os dados do exercício:



Vamos então achar a área hachurada. Note que

$$A\hat{B}C = 60^\circ = B\hat{C}A = B\hat{A}C$$

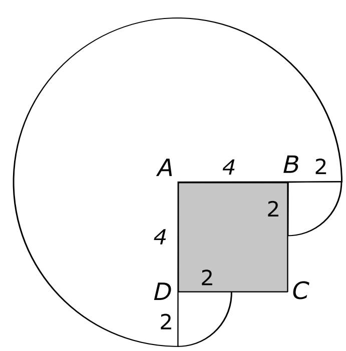
então $A_p = A_{\Delta ABC} - \frac{A_c}{2}$, onde A_c é a área do círculo de raio $\frac{a}{2}$.
Então,

$$A_p = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\pi a^2}{8}$$

$$A_p = \frac{2a^2 \cdot \sqrt{3} - \pi a^2}{8} = \frac{a^2(2\sqrt{3} - \pi)}{8}$$

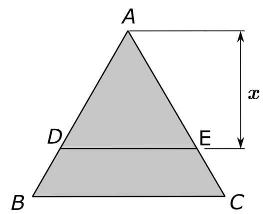
8. No canto A de uma casa de forma quadrada $ABCD$, de 4 metros de lado, prende-se uma corda flexível e inextensível em cuja extremidade livre é amarrada uma pequena estaca que serve para riscar o chão, o qual se supõe que seja plano. A corda tem 6 metros de comprimento, do ponto em que está presa até sua extremidade livre. Mantendo-se a corda sempre esticada, de tal forma que inicialmente sua extremidade livre esteja encostada à parede BC, risca-se o contorno no chão, em volta da casa, até que a extremidade livre toque a parede CD.
a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.
b) Calcule a área da região exterior à casa, delimitada pelo traçado da estaca.

Solução:
a)



b)$A_p = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} + \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi + 27\pi + \pi = 29\pi \text{ m}^2$

9. O triângulo ABC é equilátero sendo 30 cm a medida do lado que está representado na figura. Determine o valor da altura x do triângulo ADE, se este triângulo e o trapézio $DBCE$ têm a mesma área.

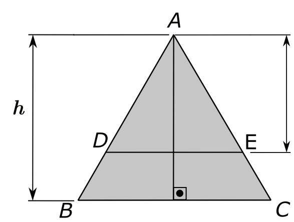


Solução:

Considere a figura, sendo o $\Delta\ ABC$ equilátero, sendo

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 30$$

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \quad (1)$$



Temos por resultado anterior que

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \quad (2)$$

Considere

$$\begin{aligned} & S_{ADE} = y \quad (3) \\ \Rightarrow\ & S_{ABC} = S_{ADE} + S_{\text{Trapézio}DBCE} = 2y \quad (4) \end{aligned}$$

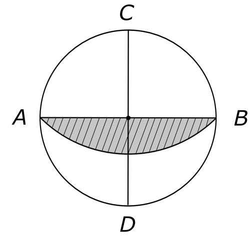
já que $S_{ADE} = S_{\text{Trapézio}DBCE}$

Substituindo (1), (3) e (4) em (2) vem:

$$\frac{y}{2y} = \left(\frac{x}{15\sqrt{3}}\right)^2$$

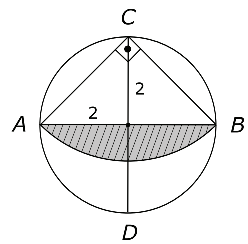
$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & \tfrac{1}{2} = \tfrac{x^2}{225\cdot 3} \\ \Rightarrow\ & x^2 = \tfrac{225\cdot 3}{2} \Rightarrow x = \tfrac{15\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow\ & x = \tfrac{15\sqrt{6}}{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

10. Considere a circunferência, representada a seguir, de raio 2 cm e os diâmetros AB e CD perpendiculares. Com centro em C e raio CA foi traçado o arco $\overset{\frown}{AB}$. Determine a área da região assinalada.



Solução:

Seja a circunferência dada, com raio 2 cm e os diâmetros AB e CD perpendiculares. Temos que



$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{AC} = 2\sqrt{2} \text{ e } A\hat{C}B = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

Denotando a área pedida por A_p vem que:

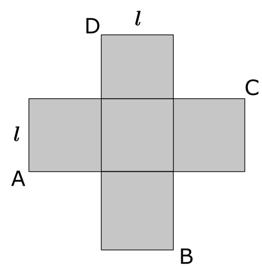
$$A_p = A_{setor\ CAB} - A_{\Delta ACB} = \frac{\pi \cdot (2\sqrt{2})^2}{4} - \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = \frac{8\pi}{4} - \frac{8}{2} = 2\pi - 4$$

Daí, a área da região assinalada é $2(\pi - 2)$ cm^2.

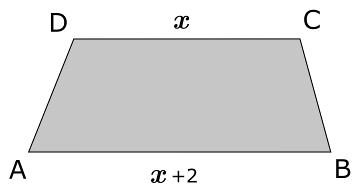
Exercícios Propostos

1. Se o comprimento de um retângulo for aumentado em 10% e a largura em 40%, qual é o aumento da área do retângulo?

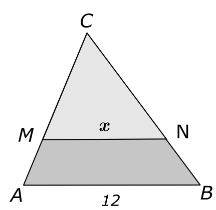
2. Cinco quadrados de lado l formam a cruz da figura. Determine a área do quadrilátero convexo de vértices A, B, C e D.



3. No trapézio $ABCD$, a área mede 21 cm^2 e a altura mede 3 cm. Determine as medidas das bases AB e CD.



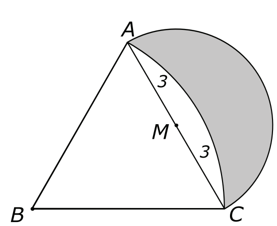
4. Na figura, S_1 é a área do quadrilátero $MNBA$ e S_2 a área do triângulo ABC. Se $S_1 = 51\% S_2$, determine o valor de x se $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$.



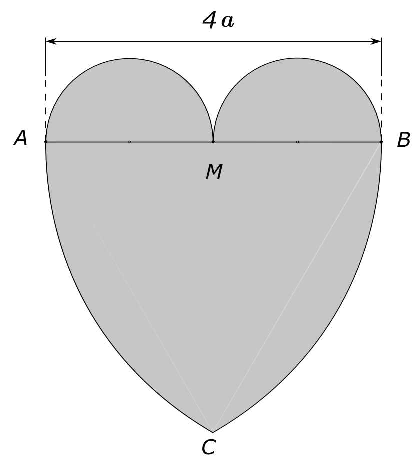
5. Considere um triângulo sendo dados dois ângulos, α e β, e o lado adjacente a esses dois ângulos sendo a. Determine a área desse triângulo em função desses dois ângulos e o lado adjacente a esses dois ângulos.

6. Se p é o perímetro de um triângulo equilátero inscrito num círculo, determine a área do círculo em função de p.

7. Sabendo-se que o triângulo ABC é equilátero de lado 6 cm, o arco menor tem centro em B e o arco maior tem centro no ponto médio de $\overline{AC}$. Determine a área da região assinalada.



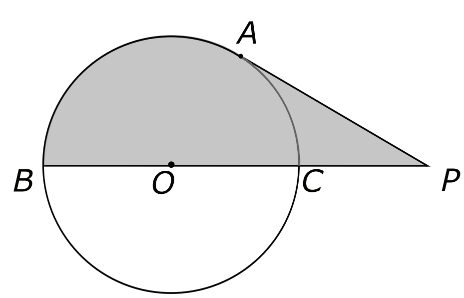
8. Seja dado um segmento de reta AB de medida $4a$ e o ponto médio M do segmento AB. Constroem-se dois semicírculos com centros nos pontos médios dos segmentos AM e BM e raios iguais a a. Com centros, respectivamente, em A e B, raios iguais a $4a$, descrevem-se os arcos BC e AC. Calcule a área da figura assim construída.



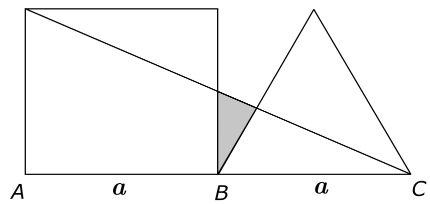
9. Calcule a área do trapézio cujas bases medem 1 metro e 6 metros e os lados oblíquos, respectivamente, 4 metros e 3 metros.

10. Se o perímetro de um triângulo retângulo é 60 metros e a altura relativa à hipotenusa é 12 metros:
a) calcule os lados desse triângulo;
b) calcule a área desse triângulo.

11. O círculo de centro O da figura a seguir tem $\sqrt{6}$ cm de raio. Se PA é tangente à circunferência e a medida do segmento PC é igual a $\sqrt{6}$ cm, determine a área hachurada em cm^2.



12. São dados um quadrado de lado a e um triângulo equilátero de lado a. Calcule a área hachurada, sabendo que os pontos A, B e C são alinhados.



13. Considere o triângulo equilátero de altura $2\sqrt{3}$. Seja P um ponto qualquer interior desse triângulo e sejam x, y e z as distâncias desse ponto aos lados do triângulo equilátero. Determine a soma dessas distâncias.

Gabarito

1. 54 %.
2. $5\ l^2$.
3. $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 6$ cm.
4. $8,4$.
5. $\dfrac{a^2 \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{2(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}$.
6. $\frac{\pi p^2}{27}$.
7. $\frac{3(6\sqrt{3}-\pi)}{2}$ cm^2.
8. $\frac{(19\pi-12\sqrt{3})}{3}a^2$.
9. 8,4 m^2.
10. a) 15 metros, 20 metros e 25 metros; b) 150 m^2.
11. $(3\sqrt{3}+2\pi)$ cm^2.
12. $\frac{a^2(2\sqrt{3}-1)}{44}$.
13. $2\sqrt{3}$.