Aula 3 – Polígonos Convexos

Conjunto convexo

Definição: Um conjunto de pontos chama-se convexo se, quaisquer que sejam dois pontos distintos desse conjunto, o segmento que tem esses pontos por extremidades está contido nesse conjunto.
Exemplo 1: A figura 1 mostra um conjunto convexo, e a figura 2 mostra um conjunto não convexo.

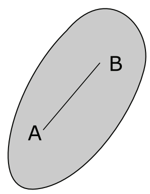


Fig. 1

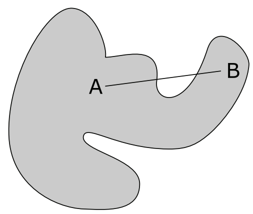


Fig. 2

Exemplo 2: O círculo é convexo, figura 1, e a circunferência, figura 2, não é convexa.

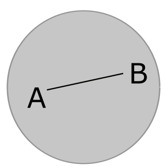


fig. 1

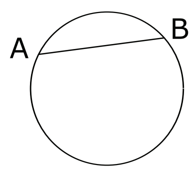
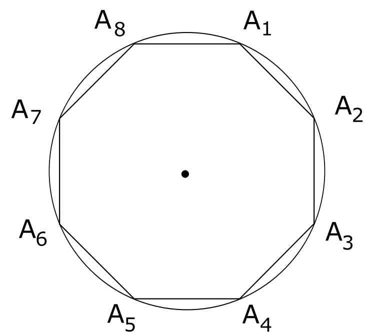


fig. 2

Polígono

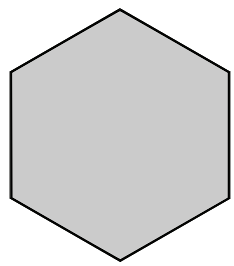
Definição: Consideremos um número n $(n \geq 3)$ de pontos ordenados $A_1, A_2, \ldots A_n$ de modo que três pontos consecutivos sejam não colineares e consideremos os segmentos consecutivos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_nA_1$. Denomina-se polígono a figura constituída pelos pontos dos n segmentos consecutivos $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_nA_1$.
Exemplo: A figura mostra um polígono de 8 vértices ou 8 lados.



Região poligonal

Definição: A reunião de um polígono com o seu interior chama-se região poligonal ou superfície poligonal.

Exemplo: A figura mostra uma região poligonal.



Polígono convexo

Definição: Denomina-se polígono convexo àquele cujo interior é um conjunto convexo.

Exemplo: A figura 1 mostra um polígono convexo e a figura 2 mostra um polígono não convexo.

figura 1

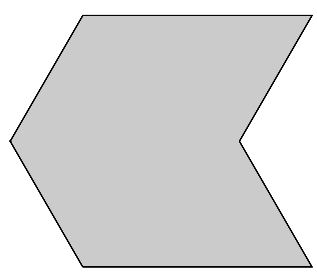


figura 2

Classificação

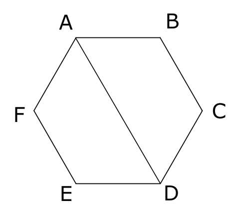
Os polígonos convexos, quanto ao número de lados n ($n \geq 3$) classificam-se em:

triângulo	$n = 3$	eneágono	$n = 9$
quadrilátero	$n = 4$	decágono	$n = 10$
pentágono	$n = 5$	undecágono	$n = 11$
hexágono	$n = 6$	dodecágono	$n = 12$
heptágono	$n = 7$	$\vdots$	$\vdots$
octógono	$n = 8$	icoságono	$n = 20$

Diagonal

Definição: Chama-se diagonal de um polígono convexo todo segmento que une dois vértices não consecutivos.

Exemplo: Na figura o segmento AD é uma diagonal do polígono ABCDEF.



Perímetro

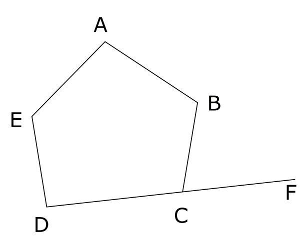
Definição: O perímetro de um polígono é a soma das medidas dos lados desse polígono.

Notação: $2p$.

Ângulos

Definição: Chama-se ângulo interno de um polígono convexo o ângulo formado por dois lados do mesmo vértice.

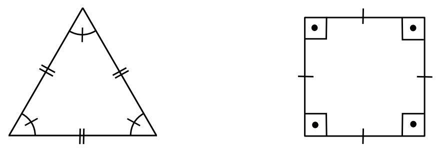
Exemplo: Na figura, o ângulo $\mathrm{A\hat{B}C}$.



Definição: Chama-se ângulo externo de um polígono convexo o ângulo formado por um lado qualquer e o prolongamento do lado adjacente.
Exemplo: Na figura anterior, o ângulo $\mathsf{B\hat{C}F}$.

Polígono regular

Definição: Chama-se polígono regular todo polígono convexo que tem:
(a) todos os lados congruentes entre si.
(b) todos os ângulos congruentes entre si.
Exemplos: Um triângulo equilátero. Um quadrado.

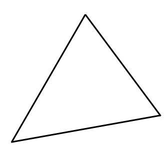


Número de diagonais

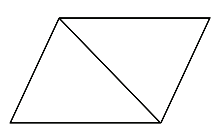
O número d de diagonais distintas de um polígono convexo de n ($n \geq 3$) lados é:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

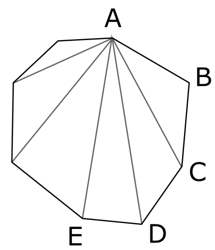
Considere o triângulo, $n = 3$:
Temos que o número de diagonais que sai de cada vértice é: 0.



Ou seja, $d_v = 3 - 3 = 0$.
Considere o quadrilátero, $n = 4$:
O número de diagonais que sai de cada vértice é 1, ou seja, $d_v = 1 = 4 - 3$



Considere o polígono convexo de n lados:



temos que o número de diagonais que sai de cada vértice é $n - 3$,

$$d_v = n - 3.$$

Como cada diagonal tem extremidades em dois vértices, cada diagonal foi contada duas vezes.
Daí, o número d de diagonais é: $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Exercícios Resolvidos

1. Calcule o número de diagonais de um pentadecágono convexo.

Solução:
Temos

$$n = 15 \Rightarrow d = \frac{15(15-3)}{2} = 90.$$

2. Qual é o polígono convexo que possui 65 diagonais?

Solução:
Temos que

$$d = 65 \Rightarrow 65 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 3n = 130$$

$$\Rightarrow n^2 - 3n - 130 = 0$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9+520}}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+23}{2} = 13 \\[2ex] \dfrac{3-23}{2} = -10 \text{ (não serve).} \end{cases}$$

Logo, o polígono pedido é o polígono de 13 lados.

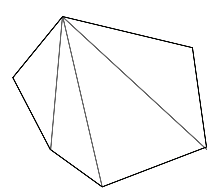
3. Qual o polígono convexo cujo número de diagonais é igual ao quádruplo do número de lados?

Solução:
Temos que
$$d = 4n \Rightarrow 4n = \frac{n(n-3)}{2}.$$
Como $n \neq 0$, temos que:
$$n - 3 = 8 \Rightarrow n = 11.$$
O polígono convexo é o undecágono.

Soma dos ângulos internos

A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n $(n \geq 3)$ lados é:
$$S_i = 180°(n-2).$$

Prova:
Seja um polígono convexo de n lados. De um vértice qualquer tracemos todas as diagonais que têm esse vértice como um dos extremos e consideremos os $n-2$ triângulos assim formados.



A soma das medidas dos ângulos internos do polígono é exatamente igual à soma das medidas dos ângulos internos desses $n-2$ triângulos.
Daí,
$$S_i = (n-2)180°.$$
Exemplo: A soma das medidas dos ângulos internos de um icoságono convexo é:
$$S_i = (20-2)180° = 3240°.$$

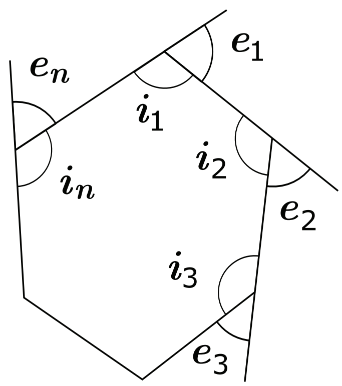
Soma dos ângulos externos

A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo de $n(n \geq 3)$ lados é 360°.

Prova:

Seja um polígono convexo de n lados, e sejam i_1 e e_1, i_2 e $e_2, \cdots, i_n$ e e_n, respectivamente, o ângulo interno e ângulo externo considerados de cada vértice.

Temos:



$$\begin{cases} i_1 + e_1 & = & 180^\circ \\ i_2 + e_2 & = & 180^\circ \\ \vdots & & \vdots & (+) \\ i_n + e_n & = & 180^\circ \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S_i + S_e = 180^\circ n \Rightarrow S_e &= 180^\circ n - S_i = 180^\circ n - 180^\circ(n-2) = \\ &= 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ \\ &\Rightarrow S_e = 360^\circ. \end{aligned}$$

Exemplo: A soma das medidas dos ângulos externos de um dodecágono é:

$$S_e = 360^\circ.$$

Ângulos de um polígono regular

Seja um polígono regular de n lados, e considere as medidas dos ângulos internos de a_i e as medidas dos ângulos externos de a_e. Então:

$$a_i = \frac{180°(n-2)}{n} \quad \text{e} \quad a_e = \frac{360°}{n}.$$

Exercícios Resolvidos

4. Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um eneágono convexo.

Solução:
Temos $n = 9$ e $S_i = (9-2)180° = 1260°$.

5. Calcule a medida do ângulo externo de um octógono regular.

Solução:
Temos $n = 8$ e $a_e = \dfrac{360°}{8} = 45°$.

6. Calcule a medida do ângulo interno de um decágono regular.

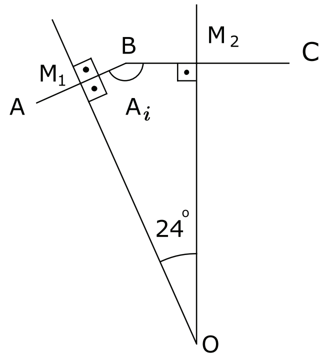
Solução:
Temos $n = 10$ e $a_i = \dfrac{180(10-2)}{10} = 18 \cdot 8 = 144°$.

7. O ângulo interno de um polígono regular é nove vezes o seu ângulo externo. Qual é esse polígono?

Solução:
Temos $a_i = 9 \cdot a_e \Rightarrow \dfrac{180(n-2)}{n} = 9\dfrac{360°}{n} \Rightarrow n - 2 = 18 \Rightarrow n = 20$.
Portanto, o polígono é o icoságono.

8. As mediatrizes de dois lados consecutivos de um polígono regular formam um ângulo de 24°. Determine o número de diagonais desse polígono.

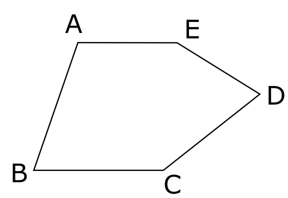
Solução:
Considere o ângulo de 24° entre as mediatrizes de dois lados consecutivos do polígono regular.



Temos que no quadrilátero M_1BM_2O a soma dos ângulos internos é $360°$, então
$A_i + 90° + 90° + 24° = 360° \Rightarrow A_i = 156° = \dfrac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow 156°n = 180°n - 360° \Rightarrow 24n = 360 \Rightarrow n = 15$.
Daí, o número de diagonais é

$$d = \frac{15(15-3)}{2} = 90.$$

9. A figura, mostra um pentágono convexo $ABCDE$. Sendo AE paralelo a BC, calcule o valor de $\hat{C} + \hat{D} + \hat{E}$.



Solução:
Vamos determinar a soma dos ângulos internos desse pentágono convexo.

$$S_i = 180°(5-2) = 540°$$

Como $AE \parallel BC$, temos que $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos colaterais internos. Então,

$$\hat{A} + \hat{B} = 180°.$$

Logo,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 540° \quad \text{e} \quad \hat{A} + \hat{B} = 180°$$

$$\Rightarrow \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 540° - 180° = 360°.$$

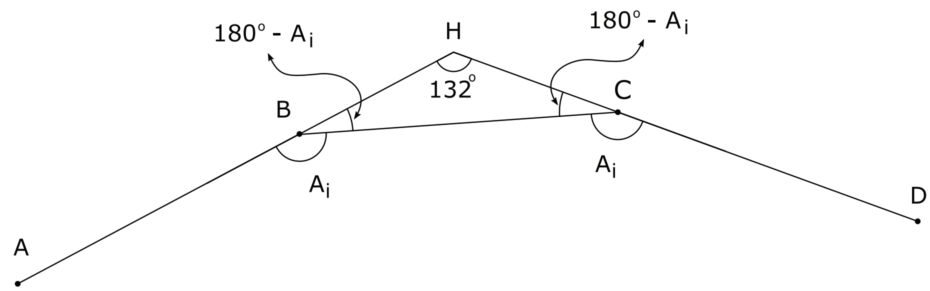
Daí,

$$\hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = 360°.$$

10. Prolongando-se os lados AB e CD de um polígono regular $ABCDE\cdots$, obtém-se um ângulo de 132°. Qual é esse polígono?

Solução:

Seja o polígono regular e prolongue os lados AB e CD obtendo-se um ângulo de 132°.



No ΔHBC vem:

$$132^\circ + 180^\circ - A_i + 180^\circ - A_i = 180^\circ$$

$$2A_i = 312^\circ \Rightarrow A_i = 156^\circ = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$$

$$\Rightarrow 156^\circ n = 180^\circ n - 360^\circ \Rightarrow 24^\circ n = 360^\circ$$

$$\Rightarrow n = 15.$$

Portanto, o polígono é o pentadecágono.

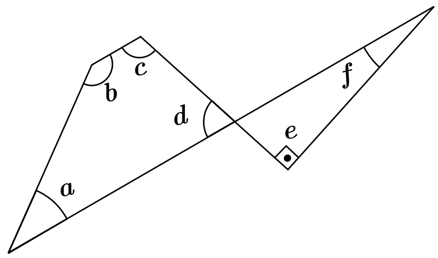
Exercícios Propostos

1. Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um undecágono convexo.

2. A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 1080°. Calcule o número de diagonais desse polígono.

3. Num quadrilátero convexo, a soma de dois ângulos internos consecutivos mede 190°. Determine o maior dos ângulos formado pelas bissetrizes internas dos dois outros ângulos.

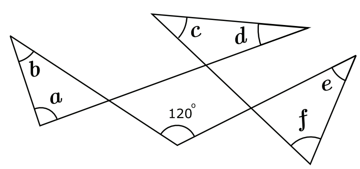
4. Na figura, os ângulos a, b, c e d medem, respectivamente, $\frac{x}{2}, 2x, \frac{3x}{2}$ e x. O ângulo e é reto. Qual é a medida do ângulo f?



5. Num polígono regular convexo $ABCDE\cdots$, o ângulo $B\hat{A}D$ mede $18°$. Calcule o número de lados do polígono.

6. Seja $ABCD\cdots$ um polígono regular. Calcule o número de diagonais desse polígono sabendo que as diagonais AC e BD formam um ângulo de $20°$.

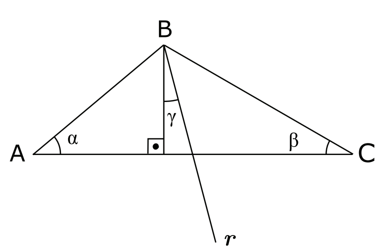
7. Na figura, detemine a soma das medidas dos ângulos $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} + \hat{e} + \hat{f}$.



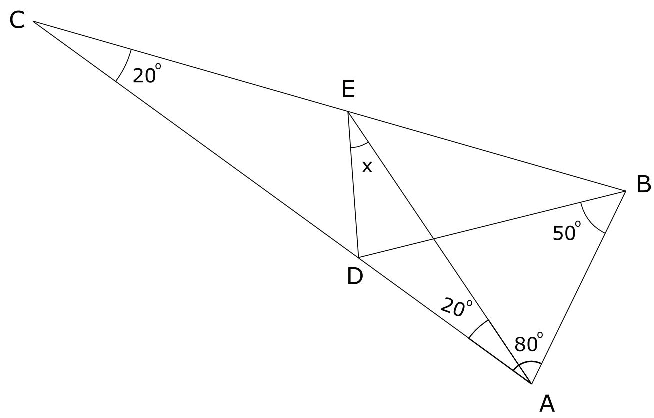
8. Os lados de um polígono regular de n lados, $n > 4$, são prolongados para formar uma estrela. Determine o número de graus em cada vértice da estrela.

9. Achar dois polígonos regulares cuja razão entre os ângulos internos é $\dfrac{3}{5}$ e a razão entre o número de lados é $\dfrac{1}{3}$.

10. Na figura, r é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Se $\alpha = 40°$ e $\beta = 30°$, determine a medida do ângulo γ.



11. Dado o triângulo isósceles ABC de base AB, calcule o valor de x.



12. Dados dois polígonos regulares com $n+1$ lados e n lados, respectivamente, determine n sabendo que o ângulo interno do polígono de $n+1$ lados excede o ângulo interno do polígono de n lados de $5°$.

13. Um polígono convexo tem cinco lados mais que o outro. Sabendo-se que o número total de diagonais vale 68, determine o número de diagonais de cada polígono.

Gabarito

1. $1620°$.
2. 20.
3. $95°$.
4. $18°$.
5. 20.
6. 135.
7. $300°$.
8. $\dfrac{180°(n-4)}{n}$.
9. Os polígonos são o quadrado e o dodecágono regular.
10. $\gamma = 5°$.
11. $x = 30°$.
12. $n = 8$.
13. 14 e 54.