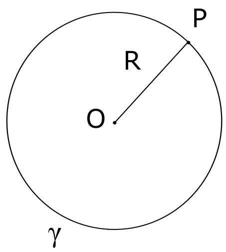
Aula 4 – Ângulos em uma Circunferência

Circunferência

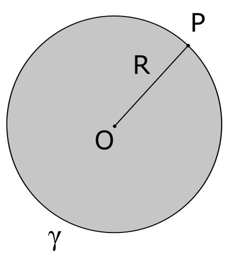
Definição: Circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano cuja distância a um ponto fixo desse plano é uma constante positiva.
A figura representa uma circunferência γ de centro em O e raio de medida R, ou seja,



$$\gamma = \{P \in \gamma \quad \overline{OP} = R\}$$

Círculo

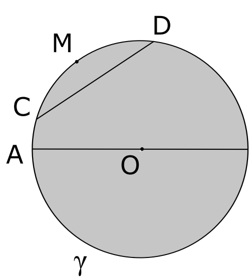
Definição: Círculo é a reunião de uma circunferência com o seu interior.
A figura, representa um circulo γ de centro em O e raio de medida R, ou seja,



$$\gamma = \{P \in \gamma \quad \overline{OP} \leq R\}$$

Elementos de um círculo

Seja o círculo de centro O da figura.



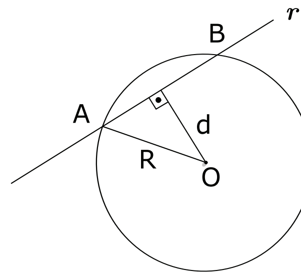
Temos:
AO - raio
AB - diâmetro
CD - corda
$\overset{\frown}{CMD}$ - arco

Sendo R a medida do raio, temos : $\overline{AO} = R$ e $\overline{AB} = 2\ R$.

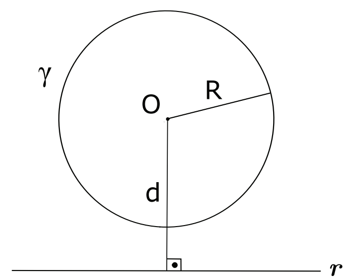
Posições relativas de reta e circunferência

Seja uma reta r, uma circunferência γ de centro em O e raio R, e d a distância do centro O à reta r. A reta e a circunferência podem ocupar entre si uma das três posições:

$1^{\underline{a}}$ posição: A reta r é secante à circunferência γ, isto é, a reta tem dois pontos distintos comuns com a circunferência nos pontos A e B.
Note que $d < R$ e $r \cap \gamma = \{A, B\}$.

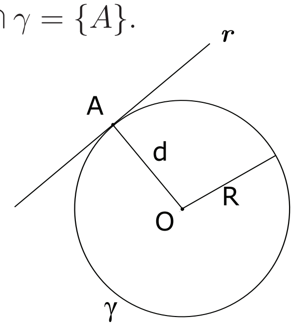


$2^{\underline{a}}$ posição: A reta r é exterior à circunferência γ, isto é, r não tem ponto comum com γ. Todos os pontos da reta r são exteriores à circunferência γ.



$3^{\underline{a}}$ posição: A reta r é tangente à circunferência γ, isto é, a reta tem um só ponto comum com a circunferência, e os outros pontos da reta são exteriores à circunferência.

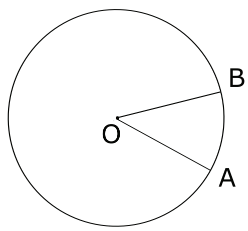
Note que $d = R$ e $r \cap \gamma = \{A\}$.



Teorema: Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que tem uma extremidade no ponto de tangência.
A recíproca é verdadeira.
Nota: Vamos provar este teorema na *Aula 6*.

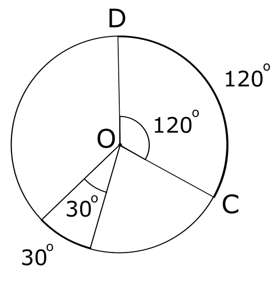
Ângulo central

Definição: Ângulo central de uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência.
Na figura, o ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo central da circunferência de centro O.
O arco $\overset{\frown}{AB}$ situado no interior do ângulo $A\hat{O}B$ é denominado arco correspondente.



Medida do ângulo central e do arco correspondente

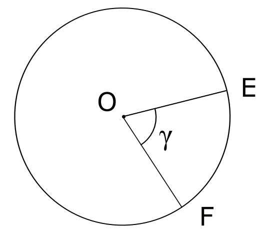
Se tomarmos para unidade de arco (arco unitário) o arco definido na circunferência por um ângulo central unitário (unidade de ângulo), temos:
A medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente.
Considerando a circunferência de centro O:
1) Se $m(A\hat{O}B) = 30°$, então $m(\overset{\frown}{AB}) = 30°$, e reciprocamente;
$A\hat{O}B = 30° \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = 30°$.
2) Se $m(C\hat{O}D) = 120°$, então $m(\overset{\frown}{CD}) = 120°$ e reciprocamente;
$C\hat{O}D = 120° \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 120°$.



Observação:

Para simplificar a simbologia, na maioria dos casos, vamos confundir um arco AB com sua medida $m(\overset{\frown}{AB})$, indicando ambos por $\overset{\frown}{AB}$.

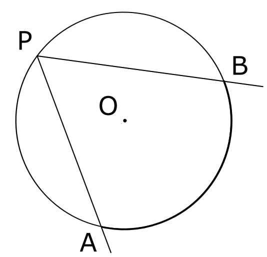
Na figura $\gamma = \overset{\frown}{EF}$



Ângulo inscrito

Definição: Ângulo inscrito em uma circunferência é o ângulo que tem o vértice nessa circunferência e os lados secantes a mesma.

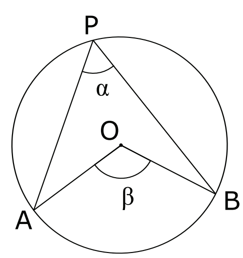
Na figura, o ângulo $A\hat{P}B$ é inscrito na circunferência γ. O arco $\overset{\frown}{AB}$ situado no interior do ângulo $A\hat{P}B$ é denominado arco correspondente.



Teorema: Um ângulo inscrito é a metade do ângulo central correspondente ou a medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco correspondente.

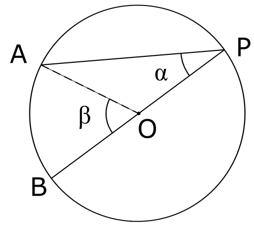
Seja $A\hat{P}B$ o ângulo inscrito de medida α e $A\hat{O}B$ o ângulo central correspondente de medida β.

Vamos provar que $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ ou $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

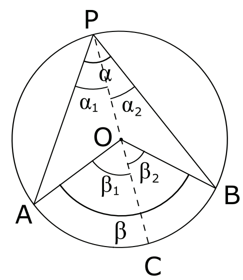


Prova: Temos três casos a considerar:

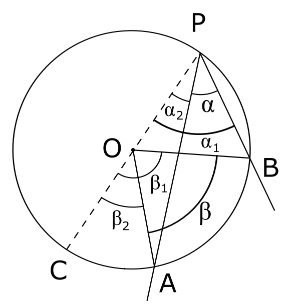
$1^{\underline{o}}$ caso: O está em um lado do ângulo.



$2^{\underline{o}}$ caso: O é interno ao ângulo.



$3^{\underline{o}}$ caso: O é externo ao ângulo.



No $1^{\underline{o}}$ caso:
$\overline{OP} = \overline{OA}$ (raio) $\Rightarrow \Delta\ OPA$ é isósceles $\Rightarrow \hat{P} = \alpha = \hat{A}$
β é ângulo externo no $\Delta\ OAP \Rightarrow \beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$

Logo $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e como $\beta = \overset{\frown}{AB}$, vem que $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

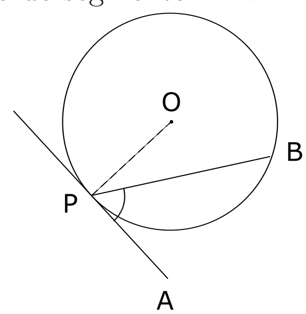
No $2^{\underline{o}}$ caso:
Sendo C o ponto de interseção de $\overrightarrow{PO}$ com a circunferência e sendo:
$A\hat{P}C = \alpha_1$, $A\hat{O}C = \beta_1$, $C\hat{P}B = \alpha_2$ e $C\hat{O}B = \beta_2$, temos pelo $1^{\underline{o}}$ caso que
$\beta_1 = 2\alpha_1$ e $\beta_2 = 2\alpha_2 \Rightarrow \beta_1 + \beta_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) \Rightarrow \beta = 2\alpha$.

Logo $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e como $\beta = \overset{\frown}{AB}$, vem que $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

No $3^{\underline{o}}$ caso:
Sendo C o ponto de interseção de $\overrightarrow{PO}$ com a circunferência e sendo:
$B\hat{P}C = \alpha_1$, $B\hat{O}C = \beta_1$, $A\hat{P}C = \alpha_2$ e $A\hat{O}C = \beta_2$,
temos pelo $1^{\underline{o}}$ caso que
$\beta_1 = 2\alpha_1$ e $\beta_2 = 2\alpha_2 \Rightarrow \beta_1 - \beta_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) \Rightarrow \beta = 2\alpha$.
Daí $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ e como $\beta = \overset{\frown}{AB}$, vem que $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

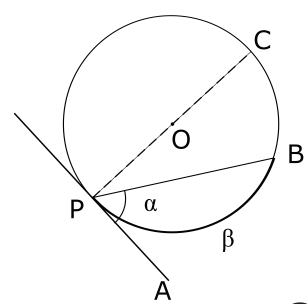
Ângulo de segmento

Definição: Ângulo de segmento é o ângulo que tem o vértice em uma circunferência, um lado secante e o outro tangente à circunferência.
A figura mostra um ângulo de segmento $A\hat{P}B$.



O arco $\overset{\frown}{PB}$ no interior do ângulo $A\hat{P}B$ é denominado arco correspondente.

Teorema: A medida de um ângulo de segmento é igual a metade da medida do arco correspondente.
Prova:
Seja a figura, sendo α a medida do ângulo de segmento $A\hat{P}B$ e β a medida do arco correspondente $\overset{\frown}{AB}$, temos que provar que $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$.



Temos que o ângulo $A\hat{P}C$ é reto, e como o arco $\overset{\frown}{PBC}$ é uma semi-circunferência, temos que $m(A\hat{P}C) = \dfrac{m(\overset{\frown}{PC})}{2}$ (1).

Por outro lado $m(B\overset{\frown}{PC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$ (2).

Subtraindo as duas relações, vem:

$m(\mathrm{A\hat{P}C})$ - $m(B\overset{\frown}{PC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{PC})}{2} - \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} \Rightarrow$

$$m(A\hat{P}B) = \frac{m(\overset{\frown}{PC}) - m(\overset{\frown}{BC})}{2} \Rightarrow m(A\hat{P}B) = \frac{m(\overset{\frown}{PB})}{2}, \text{ ou seja,}$$

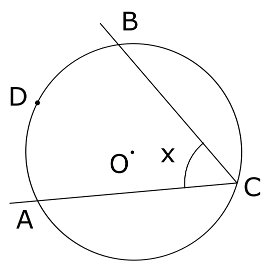
$$\alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Obs:

Note que consideramos o ângulo α agudo. Faça o teorema com α reto e obtuso.

Exercícios Resolvidos

1. Na figura, o arco $\overset{\frown}{ADB}$ mede 110°. Calcule o valor de x.

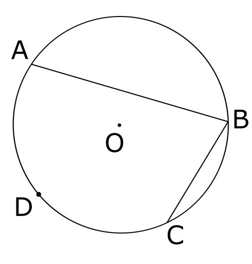


Solução:

Sendo x a medida do ângulo inscrito $A\hat{C}B$ vem:

$x = \dfrac{m(\overset{\frown}{ADB})}{2} = \dfrac{110°}{2} = 55°.$

2. Na figura, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 75°. Calcule a medida do arco $\overset{\frown}{ADC}$.



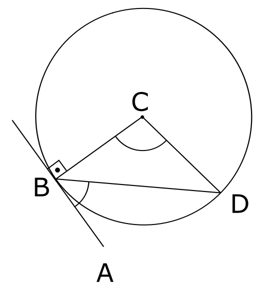
Solução:

$A\hat{B}C$ é ângulo inscrito $\Rightarrow m(A\hat{B}C) = \dfrac{m(\overset{\frown}{ADC})}{2}$

$\Rightarrow m(\overset{\frown}{ADC}) = 2 \cdot 75° = 150°$.

Logo $m(\overset{\frown}{ADC}) = 150°$.

3. Na figura, o ângulo $B\hat{C}D$ mede $100°$. Calcule a medida do ângulo $A\hat{B}D$.



Solução:

O ângulo $A\hat{B}D$ é um ângulo de segmento, então

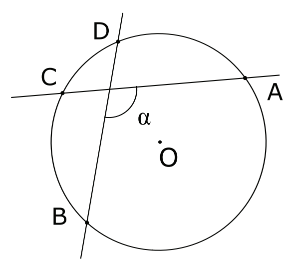
$m(A\hat{B}D) = \dfrac{m(B\hat{C}D)}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°$.

Note que $B\hat{C}D = \overset{\frown}{BD}$, já que o ângulo $B\hat{C}D$ é central.

Daí $m(A\hat{B}D) = 50°$.

Definição: *Ângulo excêntrico interno* é o ângulo formado por duas secantes que se interceptam no interior da circunferência, fora do centro.

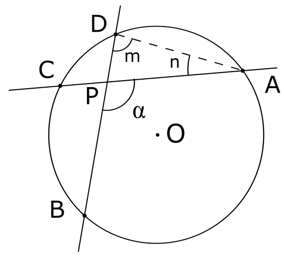
Na figura, α é um ângulo excêntrico interno.



4. Considere a figura anterior. Mostre que $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$.

Solução:

Consideremos a figura dada.



α - ângulo excêntrico interno.

Considere o $\Delta\ PAD \Rightarrow \alpha$ - ângulo externo do $\Delta\ PAD$.

Considere $P\hat{D}A = m$ e $P\hat{A}D = n$, então $\alpha = m + n \quad (1)$.

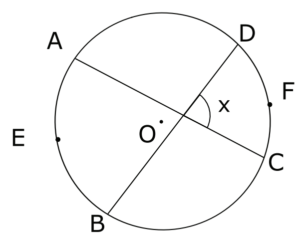
Mas m e n são ângulos inscritos, então

$$m = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \quad (2) \qquad \text{e} \qquad n = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \quad (3).$$

Substituindo (2) e (3) em (1) vem:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}.$$

5. Na figura, o arco $\overset{\frown}{AEB}$ mede $100°$, e o arco $\overset{\frown}{CFD}$ mede $60°$. Calcule o valor de x.



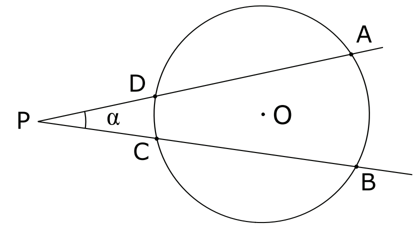
Solução:

O ângulo x é excêntrico interno, usando o exercício 4, vem:

$$x = \frac{100° + 60°}{2} = 80°.$$

Definição: *Ângulo excêntrico externo* é o ângulo formado por duas secantes que se interceptam no exterior da circunferência.

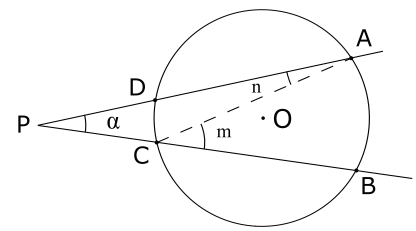
Na figura, α é um ângulo excêntrico externo.



6. Considere a figura anterior. Mostre que $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$

Solução:

Consideremos a figura dada:



α - ângulo excêntrico externo.

Considere o Δ PAC. Seja $B\hat{C}A = m$ e $D\hat{A}C = n$ (ângulos inscritos),

m é ângulo externo do Δ PAC

$$m = \alpha + n \Rightarrow \alpha = m\text{-}n \ (1).$$

Temos que:

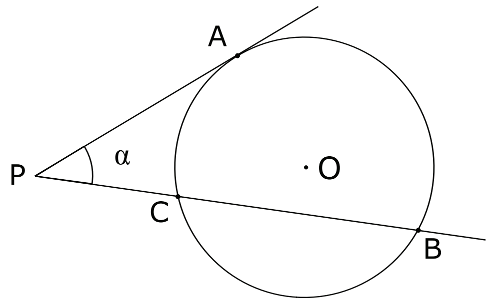
$m = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ (2) e $n = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{2}$ (3).

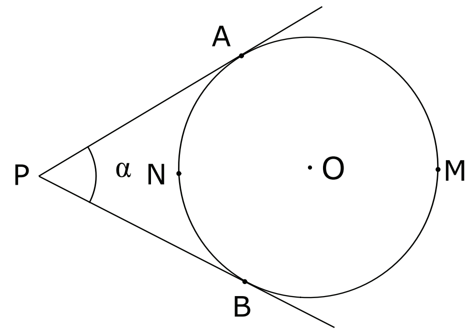
Substituindo (2) e (3) em (1) vem:

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}.$$

Obs:

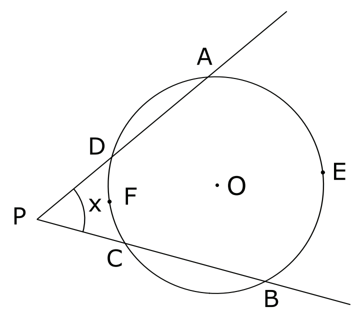
Esta relação continua válida nos casos em que um ou ambos os lados são tangentes ao círculo.





$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{AC}}{2} \qquad\qquad \alpha = \frac{\overset{\frown}{AMB} - \overset{\frown}{ANB}}{2}$$

7. Na figura, o arco $\overset{\frown}{AEB}$ mede 140°, e o arco $\overset{\frown}{CFD}$ mede 30°. Calcule o valor de x.

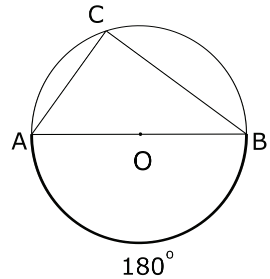


Solução:
O ângulo x é excêntrico externo, usando o exercício 6, vem:

$$x = \frac{140^\circ - 30^\circ}{2} = 55^\circ.$$

8. Considere uma circunferência de centro O e um diâmetro AB. Tome um ponto C, qualquer dessa circunferência, distintos de A e B. Calcule a medida do ângulo $A\hat{C}B$.

Solução:
De acordo com o enunciado, temos a figura:

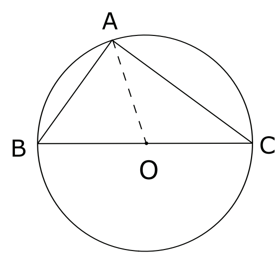


O diâmetro AB divide a circunferência em duas semi-circunferências de medida 180°, cada uma. Sendo $A\hat{C}B$ inscrito, temos:

$$m(A\hat{C}B) = \frac{180°}{2} = 90°.$$

9. Mostre que em um triângulo retângulo a mediana relativa à hipotenusa tem medida igual à metade da medida da hipotenusa.

Solução:
Seja ABC o triângulo retângulo e AO a mediana relativa à hipotenusa BC. Vamos mostrar que $\overline{AO} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

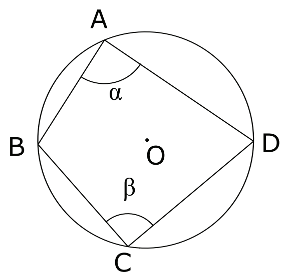


De fato, o ângulo $B\hat{A}C$, sendo reto, está inscrito em uma circunferência e seus lados AB e AC passam pelos extremos B e C de um diâmetro dessa circunferência. (exercício 8).
Temos que $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$ como raios de uma mesma circunferência. Daí $\overline{AO} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$.

Definição: Um quadrilátero convexo é chamado inscrito em uma circunferência se os quatro vértices pertencem a essa circunferência.

10. Mostre que, em todo quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência, os ângulos opostos são suplementares.

Solução:
Seja o quadrilátero $ABCD$ inscrito na circunferência conforme a figura.

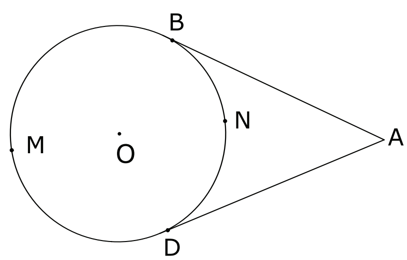


Denotamos por $\alpha = B\hat{A}D$ e $\beta = B\hat{C}D$. Vamos mostrar que $\alpha + \beta = 180°$.
De fato,
$m(\overset{\frown}{BCD}) = 2\alpha$ e $m(\overset{\frown}{BAD}) = 2\beta$
e como $m(\overset{\frown}{BCD}) + m(\overset{\frown}{BAD}) = 360°$ vem:

$$2\alpha + 2\beta = 360° \Rightarrow \alpha + \beta = 180°.$$

Obs: A recíproca do exercício 10 é verdadeira.

11. Na figura, AB e AD são tangentes a circunferência de centro O. Sabendo-se que o arco $\overset{\frown}{BMD}$ mede 190°, calcule a medida do ângulo $B\hat{A}D$.



Solução:
Considere a figura dada no enunciado. Temos que:

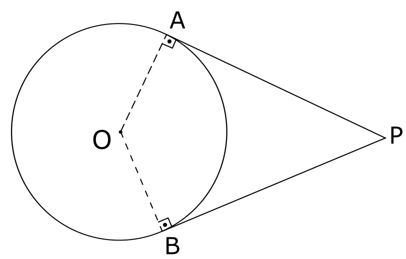
$$m(\overset{\frown}{BMD}) + m(\overset{\frown}{BND}) = 360° \Rightarrow m(\overset{\frown}{BND}) = 360° - 190° = 170°.$$

Do (exercício 6 OBS) vem:

$$B\hat{A}D = \frac{\overset{\frown}{BMD} - \overset{\frown}{BND}}{2} = \frac{190° - 170°}{2} = 10°.$$

12. Seja a circunferência γ de centro O e um ponto P exterior a γ. Trace pelo ponto P as semi-retas $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a γ nos pontos A e B. Mostre que $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Solução:
De acordo com o enunciado temos a figura:

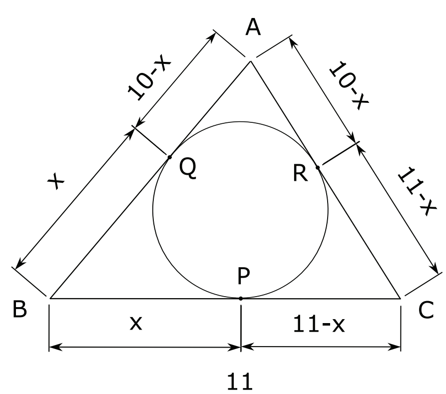


Os triângulos PAO e PBO são congruentes pelo Caso Especial, já que

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{AO} = \overline{BO} \\ OP = OP \text{ (lado comum)} \\ O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90^\circ \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$$

13. Seja um triângulo ABC, a circunferência γ de centro O inscrita nesse triângulo, e P o ponto de tangência de γ com o lado BC. Sendo $\overline{AB} = 10; \overline{BC} = 11$ e $\overline{AC} = 9$, quanto mede $\overline{BP}$?

Solução:
De acordo com o enunciado, temos a figura a seguir:



Temos que:

$$\begin{cases} \overline{BP} = \overline{BQ} = x \\ \overline{AQ} = \overline{AR} = 10 - x, \text{pelo exercício 12} \\ \overline{CP} = \overline{CR} = 11 - x. \end{cases}$$

Daí

$$10 - x + 11 - x = 9 \Rightarrow 12 = 2x \Rightarrow x = 6.$$

Logo,

$$\overline{BP} = 6.$$

Definição: Um quadrilátero convexo é circunscritível a uma circunferência se os quatro lados são tangentes a essa circunferência.

14. Em todo quadrilátero convexo circunscritível a uma circunferência, a soma das medidas dos lados opostos são iguais.

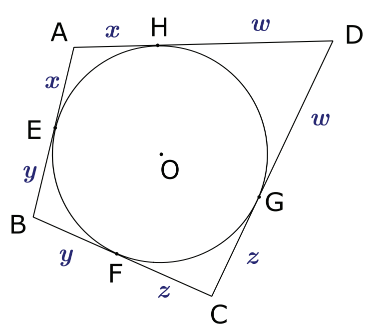
Solução:

Seja o quadrilátero $ABCD$ circunscritível a uma circunferência de centro O, onde E, F, G e H são os pontos de tangência dos lados AB, BC, CD e AD, respectivamente.

Vamos provar que:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

Pelo exercício 12 temos:



$\overline{AE} = \overline{AH} = x;$
$\overline{CF} = \overline{CG} = z;$
$\overline{BE} = \overline{BF} = y;$
$\overline{DG} = \overline{DH} = w;$
Logo :

$$\overline{AB} + \overline{CD} = x + y + w + z \qquad (1)$$

$$\overline{AD} + \overline{BC} = x + w + y + z \quad (2)$$

De (1) e (2):

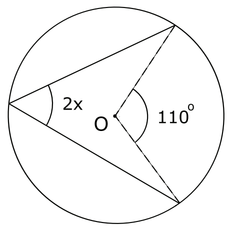
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

Este resultado é conhecido como *Teorema de Ptolomeu ou Hiparco*.

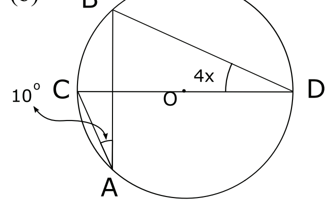
Exercícios Propostos

1. Nas figuras, calcule o valor de x.

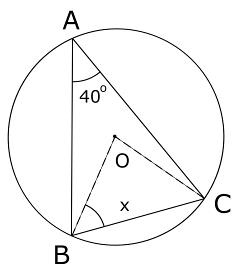
(a)



(b)

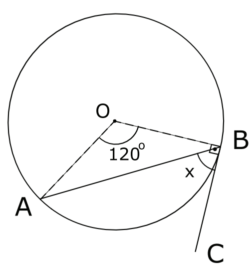


(c)

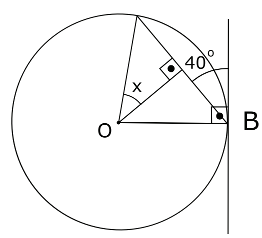


2. Nas figuras, calcule o valor e x.

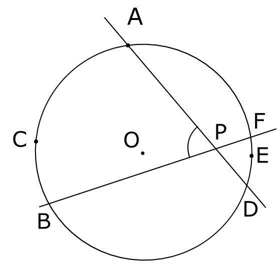
(a)



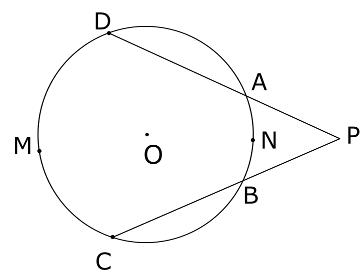
(b)



3. Na figura, o arco $\overset{\frown}{ACB}$ mede 100°, e o arco $\overset{\frown}{DEF}$ mede 36°. Calcule a medida do ângulo $A\widehat{P}B$.

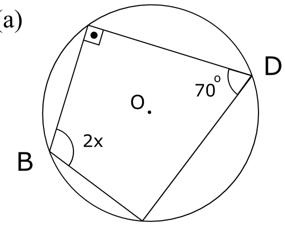


4. Na figura, o arco $\overset{\frown}{CMD}$ mede 120°, e o arco $\overset{\frown}{ANB}$ mede 24°. Calcule a medida do ângulo $A\widehat{P}B$.

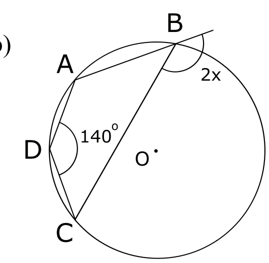


5. Nas figuras, calcule o valor de x.

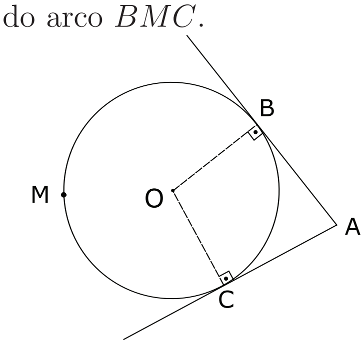
(a)



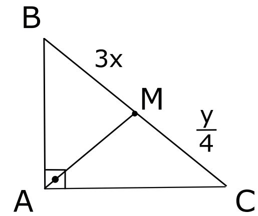
(b)



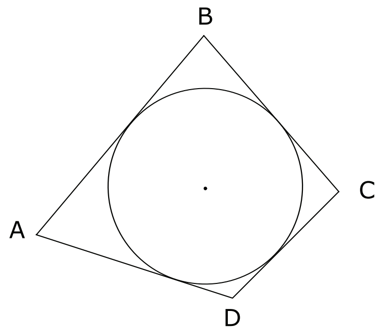
6. Na figura, $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são tangentes à circunferência e $B\hat{A}C = 80°$. Calcule a medida do arco $\overset{\frown}{BMC}$.



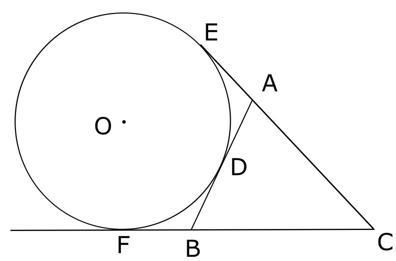
7. Na figura, sendo M o ponto médio da hipotenusa BC do triângulo ABC, e $\overline{AM} = 10$, calcule x e y.



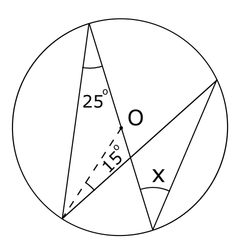
8. Na figura, o quadrilátero $ABCD$ é a circunscritível à circunferência de centro O. Sendo $\overline{AB} = 10, \overline{BC} = 8$ e $\overline{CD} = 6$, calcule $\overline{AD}$.



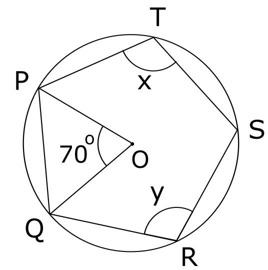
9. Na figura, os segmentos AB, CE e CF são tangentes à circunferência de centro O. Sendo $\overline{CE} = 4$, calcule o perímetro do triângulo ABC.



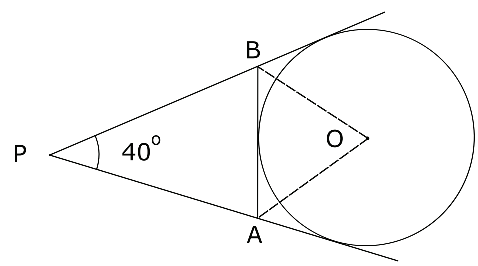
10. Seja a circunferência de centro O, representado na figura. Determine o valor de x.



11. Seja o pentágono $PQRST$ da figura, inscrito na circunferência de centro O. Sabe-se que o ângulo $P\hat{O}Q$ vale $70°$; chamando-se de x e y os ângulos $P\hat{T}S$ e $Q\hat{R}S$, respectivamente, determine $x + y$.

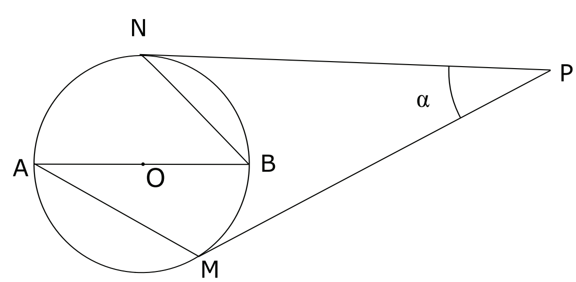


12. O triângulo PAB é formado por três tangentes ao círculo de centro O e $A\hat{P}B = 40°$. Calcule o ângulo $A\hat{O}B$.



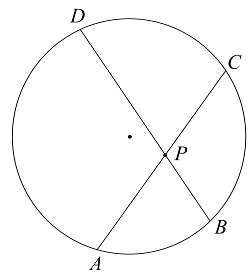
13. ABC é um triângulo cujos ângulos medem $40°, 60°$ e $80°$. Circunscreve-se ao triângulo uma circunferência, e à circunferência um novo triângulo MNP que toca a circunferência nos pontos A, B e C. Calcule o menor ângulo do triângulo MNP.

14. Na figura, AB é um diâmetro, a corda $\overline{AM}$ é o lado do triângulo equilátero inscrito e $\overline{BN}$ o lado do quadrado inscrito. Calcule o ângulo α, formado pelas tangentes PM e PN.



15. Determine o raio do círculo inscrito num triângulo retângulo de semi-perímetro 24 cm e hipotenusa 20 cm.

16. Na figura, a medida do ângulo $A\hat{C}D$ mede 70° e a medida do ângulo $A\hat{P}D$ mede 110°. Determine a medida do ângulo $B\hat{A}C$.



Gabarito

1. (a) $x = 27°30'$, (b) $x = 2°30'$, (c)$x = 50°$.
2. (a) $x = 60°$, (b) $x = 40°$.
3. 68°.
4. 48°.
5. (a) $x = 55°$, (b) $x = 70°$.
6. 260°.
7. $x = \dfrac{10}{3}$ e $y = 40$.
8. 8.
9. 8.
10. $x = 40°$.
11. 215°.
12. 70°.
13. 20°.
14. 30°.
15. O raio do círculo inscrito é 4 cm.
16. $m(B\hat{A}C) = 40°$.