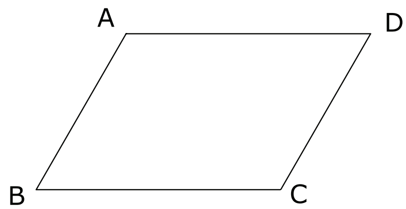
# Aula 5 – Quadriláteros Notáveis

## Paralelogramo

Definição: É o quadrilátero convexo que possui os lados opostos paralelos.
A figura mostra um paralelogramo $ABCD$.




Teorema 1: Se ABCD é um paralelogramo, então:

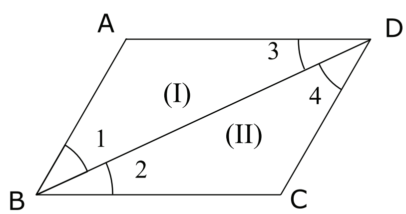
i) Os lados opostos são congruentes.

ii) Os ângulos opostos são congruentes.

iii) Dois ângulos consecutivos são suplementares.

iv) As diagonais cortam-se ao meio.

Prova: Seja o paralelogramo ABCD da figura:




i) Tracemos a diagonal $BD$ e consideremos os triângulos (I) e (II), assim formados. Temos:

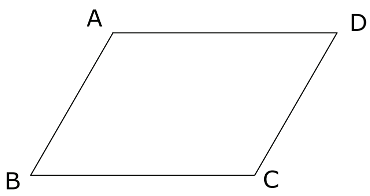
$$\left\{\begin{array}{l}\hat{1} \equiv \hat{4} \text{ (alternos internos)} \\ BD \equiv BD \text{ (comum)} \\ \hat{3} \equiv \hat{2} \text{ (alternos internos)}\end{array}\right. \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta I = \Delta II \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} AB \equiv CD \\ \text{e} \\ BC \equiv AD\end{array}\right.$$

ii) Se $\Delta I = \Delta II$ (item i), então $\hat{A} \equiv \hat{C}$, pois são ângulos opostos a lados congruentes em triângulos congruentes.

Por outro lado:

$$\begin{array}{l}\hat{1} \equiv \hat{4} \Rightarrow m(\hat{1}) = m(\hat{4}) \\ \hat{2} \equiv \hat{3} \Rightarrow m(\hat{2}) = m(\hat{3})\end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m(\hat{1}) + m(\hat{2}) = m(\hat{4}) + m(\hat{3}) \Rightarrow \\ m(\hat{B}) = m(\hat{D}) \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{D}\end{array}\right.$$

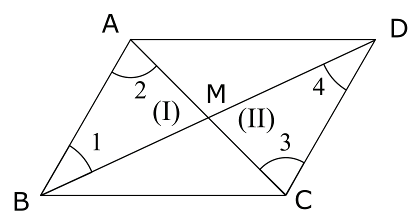
iii) Seja o paralelogramo $ABCD$.




Temos que:
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ \\ \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \\ \hat{D} + \hat{A} = 180^\circ \end{cases} \text{(ângulos colaterais internos)}$$

iv) Seja o paralelogramo $ABCD$, tracemos as diagonais $AC$ e $BD$, que se cortam em um ponto $M$.




$$\begin{cases} \hat{1} \equiv \hat{4} \text{ (alternos internos)} \\ AB \equiv CD \text{ (item i)} \\ \hat{3} \equiv \hat{2} \text{ (alternos internos)} \end{cases} \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta I = \Delta II \Rightarrow \begin{cases} \overline{AM} = \overline{MC} \\ \text{e} \\ \overline{BM} = \overline{MD} \end{cases}$$

$\Rightarrow M$ é ponto médio das diagonais $AC$ e $BD$.

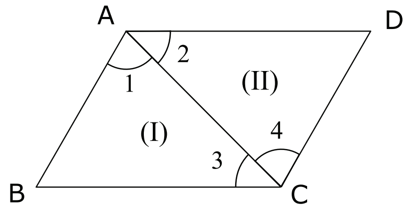
OBS: Todo quadrilátero convexo que gozar de uma das propriedades acima será um paralelogramo e gozará de todas as outras propriedades.

Teorema 2: Se um quadrilátero convexo tem dois lados opostos paralelos e congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

Prova:

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com $AD \parallel BC$ e $AD \equiv BC$.

Tracemos a diagonal $AC$ e sejam os triângulos (I) e (II). Temos:



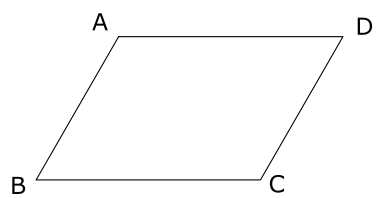

$$\left\{\begin{array}{l} AC \equiv AC \text{ (comum)} \\ \hat{2} \equiv \hat{3} \text{ (alternos internos)} \\ AD \equiv BC \text{ (hipótese)} \end{array}\right. \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \Delta I \equiv \Delta II \Rightarrow \hat{1} \equiv \hat{4}$$

Logo, os lados $AB$ e $CD$ do quadrilátero são paralelos.
Daí, $AD \parallel BC$ e $AB \parallel CD \Rightarrow ABCD$ é um paralelogramo.

## Exercícios Resolvidos

**1.** Em um paralelogramo $ABCD$, o ângulo $\hat{A}$ mede $50°$. Determine os outros três ângulos desse paralelogramo.

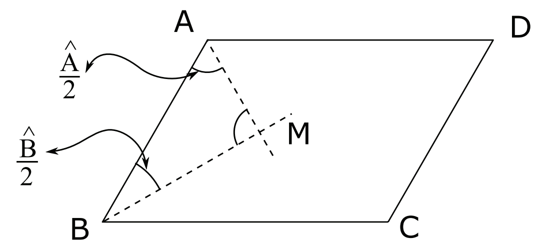
**Solução:** Seja $ABCD$ um paralelogramo e $\hat{A} = 50°$.




Usando (ii) e (iii) do teorema 1, vem:
$\hat{A} + \hat{B} = 180°$ e $\hat{A} = \hat{C}$ e $\hat{B} = \hat{D}$
$\Rightarrow \hat{B} = 130°, \hat{C} = 50°$ e $\hat{D} = 130°$.

**2.** Determine o ângulo entre as bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo.

**Solução:** Seja $ABCD$ o paralelogramo da figura e $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{BM}$ as bissetrizes dos ângulos consecutivos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.




Temos que:

$$\frac{\hat{A}}{2} + \hat{M} + \frac{\hat{B}}{2} = 180° \Rightarrow \hat{M} = 180° - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} \ \ (1)$$

Do teorema 1(iii),

$$\hat{A} + \hat{B} = 180° \ \ (2).$$

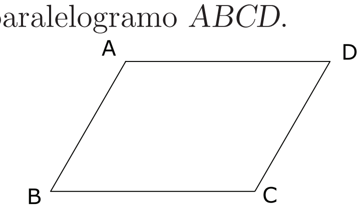
Substituindo (2) em (1), vem:

$$\hat{M} = 180° - \frac{180°}{2} = 90°.$$

Daí, o ângulo pedido é 90°.

**3.** Em um paralelogramo *ABCD*, $\overline{AB} = 2x + 1, \overline{BC} = 3x + 4, \overline{CD} = 9$ e $\overline{AD} = y + 1$. Calcule os valores de $x$ e $y$.

**Solução:** Seja o paralelogramo *ABCD*.




Pelo teorema 1(item i) vem: $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{BC} = \overline{AD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 9 \\ 3x + 4 = y + 1 \end{cases} \Rightarrow$

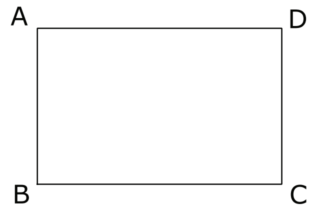
$$\begin{cases} x = 4 \\ \ \text{e} \\ 3 \cdot 4 + 4 = y + 1 \Rightarrow 16 = y + 1 \Rightarrow y = 15. \end{cases}$$

Daí, $x = 4$ e $y = 15$.

## Paralelogramos particulares

### a) Retângulo

Definição: É o paralelogramo que possui um ângulo reto.
Nota: O retângulo tem os quatro ângulos retos.
De fato, seja $ABCD$ um retângulo, então um dos ângulos é reto.




Vamos escolher $\hat{A} = 90°$.

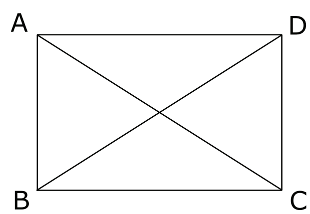
Como $ABCD$ é paralelogramo, temos que:

$$\hat{A} = \hat{C}, \ \ \hat{A} + \hat{B} = 180° \ \ \text{e} \ \ \hat{B} = \hat{D}$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 90°, \ \ 90° + \hat{B} = 180° \Rightarrow \hat{B} = 90°$$

e daí, $\hat{D} = 90°$, ou seja, os 4 ângulos são retos.

Teorema 3: Em todo retângulo as diagonais são congruentes entre si.
Prova: Seja $ABCD$ o retângulo da figura.



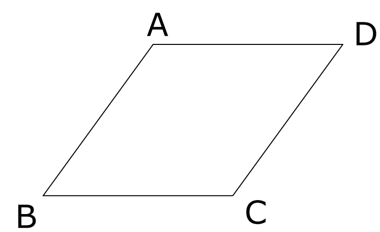

Tracemos as diagonais $AC$ e $BD$. Vamos provar que $\overline{AC} = \overline{BD}$.
De fato,

$$\Delta\ ABC \equiv \Delta\ DCB, \text{ já que: } \begin{cases} \hat{B} = \hat{C} = 90° \\ AB \equiv CD \\ BC \text{ (lado comum)} \end{cases} \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \overline{AC} \equiv \overline{BD}.$$

## b) Losango

Definição: É o paralelogramo que possui dois lados consecutivos congruentes.

Nota: O losango tem os quatro lados congruentes.
De fato, seja $ABCD$ um losango.




Temos que dois lados consecutivos têm a mesma medida, ou seja,

$$\overline{AB} = \overline{BC} \quad (1).$$

Mas como $ABCD$ é um paralelogramo,

$$\overline{AB} = \overline{CD} \quad (2)$$

e

$$\overline{BC} = \overline{AD} \quad (3).$$

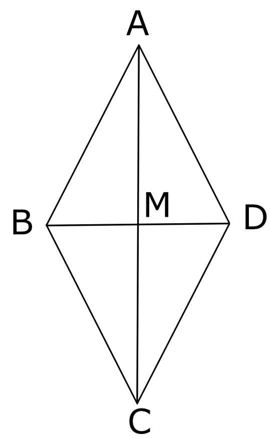
De (1), (2) e (3), vem:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}.$$

Logo, os quatro lados têm a mesma medida.

Teorema 4: Em um losango:
a) as diagonais são perpendiculares.
b) as diagonais são bissetrizes dos ângulos opostos.

Prova: Seja $ABCD$ o losango da figura:




Tracemos as diagonais $AC$ e $BD$, que se cortam em $M$, ponto médio de ambas (teorema 1, item (iv)),
$\Delta\ ABD$ é isósceles, $AM$ é mediana relativa à base $BD$, então $AM$ é altura e bissetriz em relação a esta base. Portanto, $AC$ é perpendicular à $BD$. O que prova o item a) e $AC$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$.
De modo análogo, sejam os triângulos isósceles $CBD$, $ABC$ e $ADC$, então $AC$ é bissetriz do ângulo $\hat{C}$, $BD$ bissetriz dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$.

**c) Quadrado**

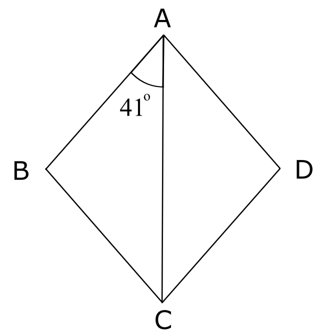
Definição: É o paralelogramo que possui dois lados consecutivos congruentes e um ângulo reto.

Nota: Pela definição dada, temos que todo quadrado é um losango (possui dois lados congruentes) e todo quadrado é um retângulo ( possui um ângulo reto).
Daí, o quadrado é um quadrilátero convexo regular, sendo simultaneamente retângulo e losango, portanto gozando de todas as propriedades relativas a eles.

## Exercícios Resolvidos

**4.** Calcule os ângulos de um losango, sabendo que uma diagonal forma com um lado um ângulo de 41°.

**Solução:** Seja o losango $ABCD$ da figura




Temos pelas propriedades de losango que:

$$\hat{A} = \hat{C} = 2 \cdot 41^\circ = 82^\circ$$

pois a diagonal $AC$ é bissetriz dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$.
Por outro lado,

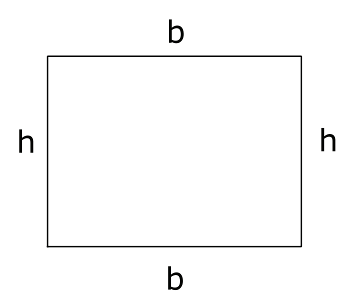
$$\hat{B} = \hat{D} = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ.$$

Daí, os ângulos do losango são:

$$82^\circ, 98^\circ, 82^\circ \text{ e } 98^\circ.$$

**5.** Calcular os lados de um retângulo cujo perímetro mede 40 cm, sabendo que a base excede a altura de 4 cm.

**Solução:** Seja o retângulo cujo perímetro mede 40 cm e a base excede a altura de 4 cm.



Seja a base $b$ e a altura $h$. Temos que:

$$\begin{cases} 2b + 2h = 40 \\ b = h + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + h = 20 & (1) \\ b = h + 4 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1) vem:

$$h + 4 + h = 20 \Rightarrow 2h = 16 \Rightarrow h = 8.$$

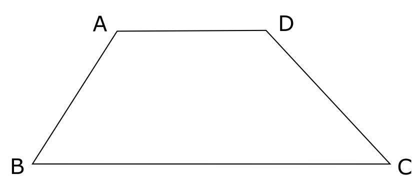
De (2) vem que

$$b = 8 + 4 = 12.$$

Daí, os lados do retângulo são 8 cm e 12 cm.

**Trapézio**

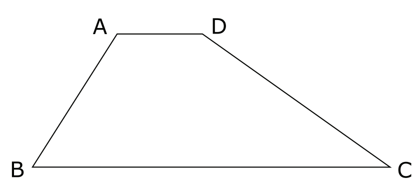
Definição: Um quadrilátero convexo é chamado trapézio se possui dois lados paralelos.




A figura mostra um trapézio $ABCD$ de bases $AD$ e $BC$.

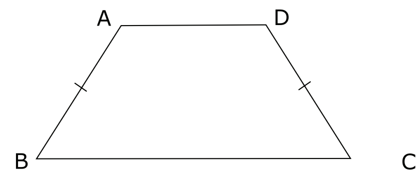
Classificação: Podemos classificar os trapézios em três tipos:

1º tipo: Escaleno - os lados não paralelos não são congruentes.
A figura mostra um trapézio $ABCD$ escaleno.



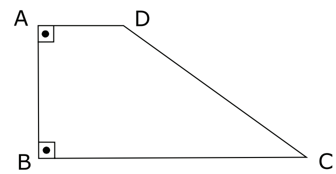
$2^{\underline{o}}$ tipo: Isósceles - os lados não paralelos são congruentes.

A figura mostra um trapézio isósceles.




$3^{\underline{o}}$ tipo: Retângulo - um lado é perpendicular às bases.

A figura mostra um trapézio retângulo $ABCD$, onde $AB$ é perpendicular às bases $AD$ e $BC$.

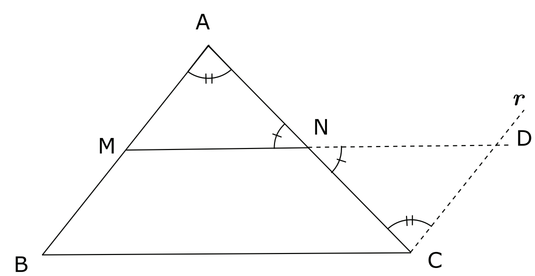



Teorema 5: Em um triângulo o segmento que une os pontos médios de dois lados é tal que:

a) ele é paralelo ao terceiro lado.

b) sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.

Prova: Considere $M$ e $N$ pontos médios dos lados $AB$ e $AC$, respectivamente, de um triângulo $ABC$.




Vamos provar que

$$MN \parallel BC \text{ e } \overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

a) Pelo ponto $C$ tracemos uma reta $r$ paralela a $AB$ e prolonguemos $MN$ até encontrar a reta $r$ em $D$, conforme figura.
Temos:

$$\left\{\begin{array}{l} C\hat{N}D = A\hat{N}M \text{ (opostos pelo vértice)} \\ \overline{CN} = \overline{AN} \text{ (hipótese)} \\ N\hat{C}D = M\hat{A}N \text{ (alternos internos)} \end{array}\right. \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta CDN \equiv \Delta AMN$$

$\Rightarrow \overline{CD} = \overline{AM}$.

Daí, o quadrilátero $BMDC$ possuindo dois lados opostos $\overline{CD}$ e $\overline{BM}$ congruentes e paralelos é um paralelogramo (teorema 2 desta Aula).
Portanto,

$$MN \parallel BC$$

b) Como $BMDC$ é um paralelogramo, temos que : $\overline{MD} = \overline{BC}$.
Mas

$$\overline{MN} + \overline{ND} = \overline{MD} \Rightarrow \overline{MN} + \overline{ND} = \overline{BC} \quad (1).$$

Da congruência dos triângulos $CDN$ e $AMN$, temos que

$$\overline{ND} = \overline{MN} \quad (2).$$

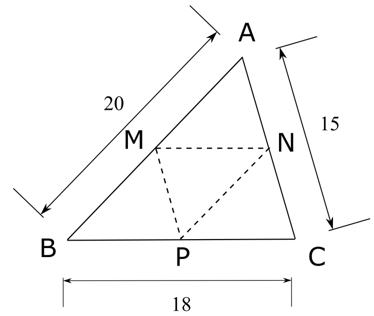
Substituindo (2) em (1), vem:

$$\overline{MN} + \overline{MN} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}.$$

Definição: O segmento $\overline{MN}$ do teorema 5 é denominado uma base média do triângulo $ABC$.

## Exercícios Resolvidos

**6.** No triângulo $ABC$ da figura, $M$, $N$ e $P$ são os pontos médios dos lados $AB$, $AC$ e $BC$, respectivamente. Se $\overline{AB} = 20$, $\overline{BC} = 18$ e $\overline{AC} = 15$, calcule o perímetro do triângulo $MNP$.




**Solução:** Temos pelo teorema 5 que:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$\overline{NP} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

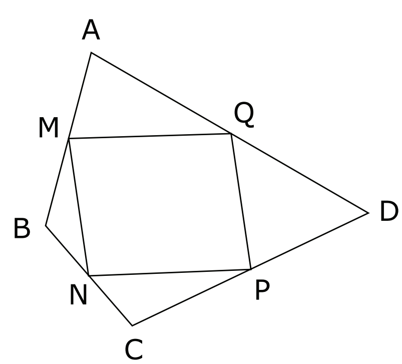
$$\overline{PM} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$$

Daí, o perímetro do triângulo $MNP$ é:

$$\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PM} = 9 + 10 + 7,5 = 26,5.$$

**7.** Mostre que os pontos médios de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo.

**Solução:** Seja $ABCD$ um quadrilátero, $M$, $N$, $P$ e $Q$ os respectivos pontos médios de $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$.



Temos pelo teorema 5:

$$\Delta ABC \Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{AC} \text{ e } \overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

$$\Delta DAC \Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{AC} \text{ e } \overline{PQ} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

$\Rightarrow \overline{MN} \parallel \overline{PQ}$ e $\overline{MN} = \overline{PQ}$.

Logo pelo teorema 2, $MNPQ$ é paralelogramo.

Teorema 6: Em um trapézio o segmento de reta que une os pontos médios dos lados não paralelos é tal que:

a) ele é paralelo às bases.

b) sua medida é igual a semi-soma das medidas das bases.

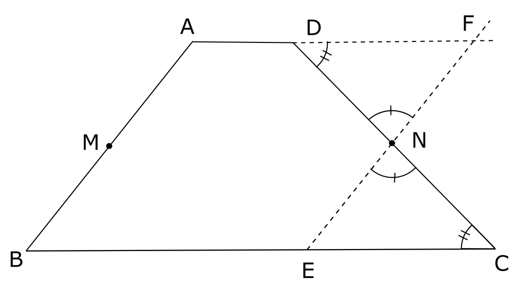
Prova: Sejam $M$ e $N$ os pontos médios dos lados não paralelos $AB$ e $CD$, respectivamente, de um trapézio $ABCD$. Vamos provar que:

$a)$ $MN \parallel AD \parallel BC$

$b)$ $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$

a) Tracemos pelo ponto $N$ uma reta paralela ao lado $AB$.

Sejam $E$ e $F$ os pontos em que essa reta paralela encontra, respectivamente, a base $BC$ e o prolongamento da base $AD$. Temos:



$$\left\{\begin{array}{l} C\hat{N}E = D\hat{N}F \text{ (opostos pelo vértice)} \\ \overline{CN} = \overline{DN} \text{ (hipótese)} \\ E\hat{C}N = F\hat{D}N \text{ (alternos internos)} \end{array}\right. \underset{\text{ALA}}{\Longrightarrow} \Delta CEN \equiv \Delta DFN$$

$\Rightarrow \overline{EN} = \overline{FN}$.

Como $\overline{AB} = \overline{EF}$ (lados opostos do paralelogramo $BAFE$) $\Rightarrow \overline{AM} = \overline{EN}$, já que

$$\overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{2} \text{ e } \overline{EN} = \frac{\overline{EF}}{2}.$$

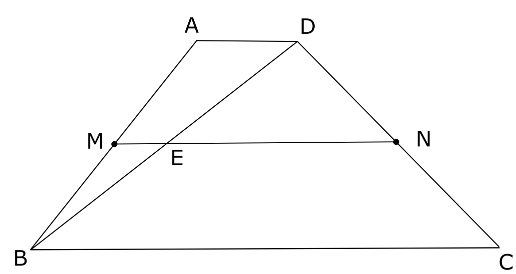
Daí, $BENM$ é um paralelogramo, já que

$$BM \equiv EN \text{ e } BM \parallel EN.$$

Logo,

$$MN \parallel AD \parallel BC.$$

b) Temos a figura:




Trace a diagonal $BD$ e denomine a interseção de $MN$ com $BD$ de $E$.

No $\Delta$ $ABD$, $\overline{ME}$ base média, então $\overline{ME} = \dfrac{\overline{AD}}{2}$ (teorema 5).

No $\Delta$ $BCD$, $\overline{EN}$ base média, então $\overline{NE} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$ (teorema 5).

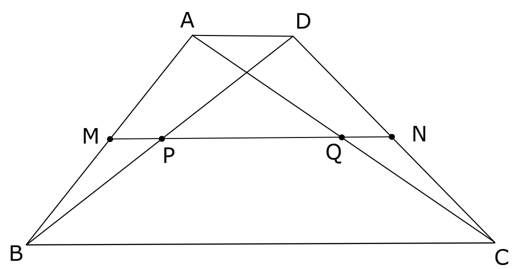
Daí,

$$\overline{MN} = \overline{ME} + \overline{EN} = \frac{\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}.$$

**Definição**: O segmento $\overline{MN}$ do teorema 6 é denominado base média do trapézio $ABCD$.

Teorema 7: Em um trapézio, o segmento de reta que une os pontos médios das diagonais é tal que:
a) ele é paralelo as bases.
b) sua medida é igual a semi-diferença das medidas das bases.

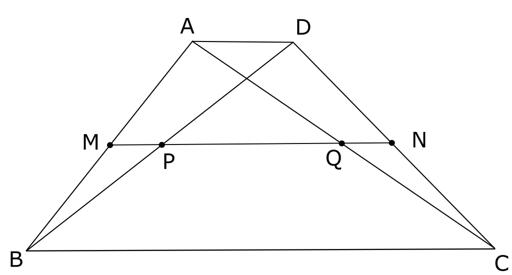
Prova:
a) Seja o trapézio $ABCD$, vamos mostrar primeiro que os pontos médios $M$ e $N$ dos lados não paralelos e os pontos médios $P$ e $Q$ das suas diagonais estão situados sobre uma mesma reta paralela às bases.




De fato, no $\Delta$ $BCA$, $MQ$ liga os pontos médios dos lados e pelo teorema 5, $MQ \parallel BC$.
Analogamente no triângulo $BCD$, $PN \parallel BC$ e no triângulo $CAD$, $QN \parallel BC$.
Então os quatro pontos $M$, $P$, $Q$ e $N$ estão colocados sobre uma mesma reta paralela às bases.
Logo,

$$PQ \parallel AD \parallel BC$$

b) Seja o trapézio $ABCD$, e considere os pontos médios das diagonais:




Do item a) temos que $M$, $P$, $Q$ e $N$ estão em uma mesma reta, e esta é paralela as bases. Então,

$$\Delta\ BDC,\ \overline{PN} = \frac{\overline{BC}}{2} \text{ (teorema 5)}$$

$$\Delta\ ADC,\ \overline{QN} = \frac{\overline{AD}}{2}\ \text{(teorema 5).}$$

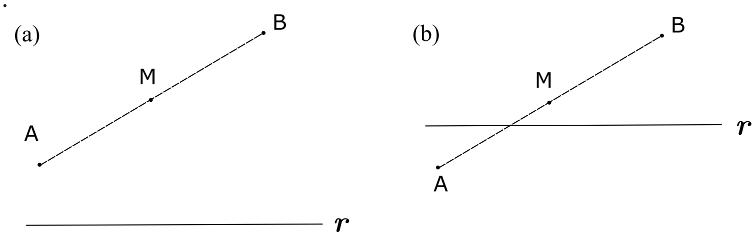
Daí,

$$\overline{PQ} = \overline{PN} - \overline{QN} = \frac{\overline{BC}}{2} - \frac{\overline{AD}}{2} \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{\overline{BC} - \overline{AD}}{2}$$

Definição: O segmento $\overline{PQ}$ do teorema 7 é denominado *mediana de Euler*.

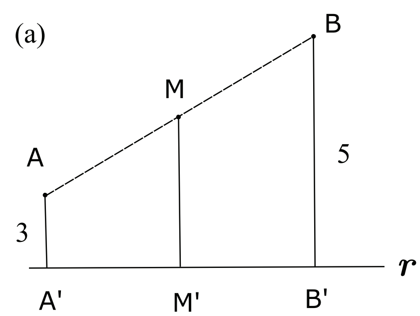
## Exercícios Resolvidos

**8.** Se os pontos $A$ e $B$ distam, respectivamente, 3 cm e 5 cm da reta $r$, calcule a distância do ponto $M$, médio de $AB$ a essa reta, em cada caso.




**Solução:**

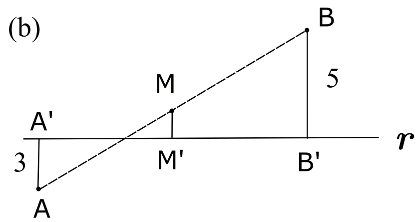
a) Vamos achar as projeções $A'$, $M'$ e $B'$ de $A$, $M$ e $B$ sobre a reta $r$.



Temos então o trapézio *AA'B'B* e *MM'* base média, logo,

$$MM' = \frac{3+5}{2} = 4 \text{ cm}.$$

b)

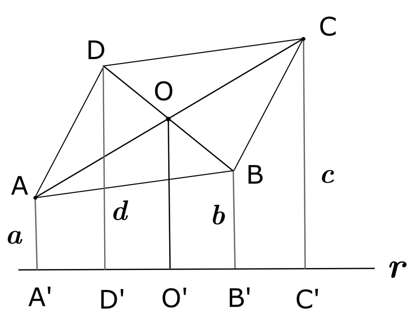



Temos que *A'B'* e *AB* são as diagonais do trapézio. Neste caso, *MM'* é a mediana de Euler.

$$MM' = \frac{5-3}{2} = 1 \text{ cm}$$

**9.** Sendo *ABCD* um paralelogramo, e $a, b, c$ e $d$, respectivamente, as distâncias dos vértices *A*, *B*, *C* e *D* à reta *r* exterior. Mostre que $a + c = b + d$.

**Solução:** Seja *ABCD* um paralelogramo, e $a, b, c$ e $d$ as distâncias dos vértices *A*, *B*, *C* e *D* à reta *r* exterior.
*A'*, *B'*, *C'* e *D'* as projeções de *A*, *B*, *C* e *D*.




Seja *O* o ponto de encontro das diagonais e *O'* a sua projeção.

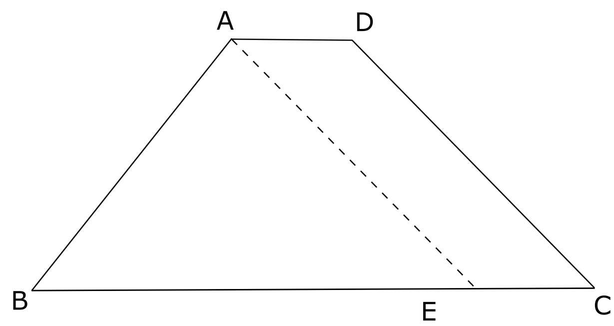
Temos no trapézio *AA'C'C* que *OO'* é base média, então $OO' = \frac{a+c}{2}$ (1)

Temos no trapézio *BB'D'D* que *OO'* é base média, então $OO' = \dfrac{b+d}{2}$ (2).

De (1) e (2) vem:

$$\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2} \Rightarrow a+c = b+d.$$

**10.** Prove que em um trapézio isósceles os ângulos adjacentes à mesma base são congruentes.




**Solução:** Seja um trapézio isósceles, conforme figura.

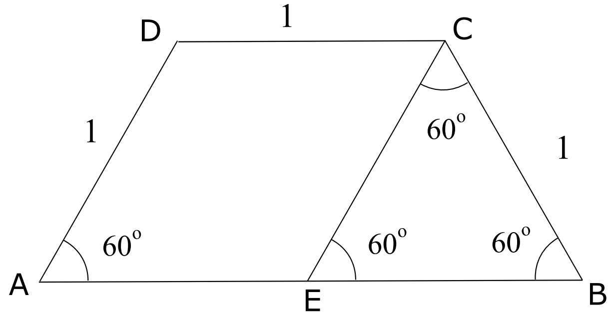
Tracemos $AE \parallel CD$. O quadrilátero *AECD* é um paralelogramo, pois os lados opostos são paralelos $\Rightarrow AE \equiv CD$.
Mas $AB \equiv CD$ (Definição de trapézio isósceles) $\Rightarrow AB \equiv AE$.
Portanto, o triângulo *ABE* é isósceles e $A\hat{E}B \equiv \hat{C}$ (ângulos correspondentes).
Logo,

$$\hat{B} \equiv \hat{C}.$$

Temos que $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são suplementares de $\hat{B}$ e $\hat{C}$, então $\hat{A} \equiv \hat{D}$.

**11.** O trapézio da figura é isósceles, o ângulo $\hat{A} = 60°$ e $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB} = 1$ metro. Calcule a base média e a mediana de Euler do trapézio.

**Solução:** Seja o trapézio $ABCD$, com $\hat{A} = 60^\circ$ e $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB} = 1$




Temos pelo exercício 10 que $\hat{B} = 60^\circ$

Seja $CE \parallel AD$, então $ADCE$ é paralelogramo, e $BCE$ é triângulo equilátero. Então $\overline{AE} = 1$ e $\overline{BE} = 1$.

Daí, a base média

$$MN = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

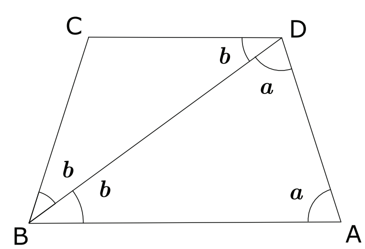
e a mediana de Euler

$$PQ = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

**12.** Na figura, sabe-se que $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB}$ e $\overline{BD} = \overline{BA}$. Calcule o ângulo $\hat{A}$ do trapézio $ABCD$.

**Solução:** Seja o trapézio $ABCD$, tal que

$$\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CB} \quad \text{e} \quad \overline{BD} = \overline{BA}$$




$\Delta\ BCD$ é isósceles $\Rightarrow D\hat{B}C = C\hat{D}B = b$

$\Delta\ ABD$ é isósceles $\Rightarrow B\hat{D}A = B\hat{A}D = a$.

Como $CD \parallel AB$ (Definição de trapézio), então $D\hat{B}A = b$.

Temos que $\overline{BC} = \overline{AD}$ (Trapézio isósceles), então $2b = a$ (Exercício 10).

No $\Delta ABD, a + a + b = 180° \Rightarrow 2b + 2b + b = 180° \Rightarrow 5b = 180° \Rightarrow b = 36°$.

Como $a = 2b \Rightarrow a = 72°$.

Daí, $\hat{A} = 72°$.

## Exercícios Propostos

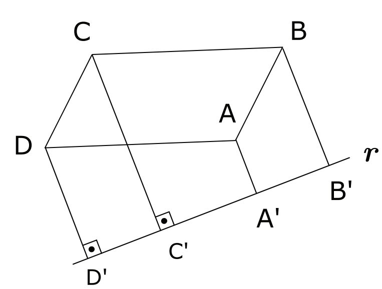
1. Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).
   a) Todo trapézio é paralelogramo. (   )
   b) Todo paralelogramo é retângulo. (   )
   c) Todo losango é quadrado. (   )
   d) Existe losango que é retângulo. (   )

2. Em um paralelogramo, o perímetro mede 45 cm e a diferença das medidas de dois lados é 15 cm. Calcule a medida dos lados.

3. As diagonais de um trapézio retângulo medem respectivamente 19 cm e 24 cm. Calcule o perímetro do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos médios dos lados do trapézio.

4. Calcule as diagonais do quadrilátero determinado pelas bissetrizes internas de um paralelogramo cujos lados medem 9 cm e 6 cm.

5. Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo e $r$ uma reta exterior a ele. Calcule a distância de $D$ a $r$ se $A$, $B$ e $C$ distam 2 cm, 3 cm e 5 cm, respectivamente de $r$.




6. $ABCD$ é um trapézio isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. A bissetriz interna em $D$ intercepta o lado $\overline{BC}$ em $M$, e a bissetriz de $B\hat{M}D$ contém $A$. Sabendo-se que $M\hat{A}B = 24°$, calcule os ângulos do trapézio $ABCD$.

7. A base média de um trapézio mede 60 cm, e a base menor é igual a $\frac{3}{7}$ da base maior. Calcule as medidas das bases.

8. Mostre que as bissetrizes dos ângulos obtusos de um paralelogramo são paralelas.

9. No triângulo $ABC$ de lados $\overline{AB} = 9, \overline{BC} = 14$ e $\overline{AC} = 11$, os pontos $D$, $E$ e $F$ são pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Calcule o perímetro do triângulo $DEF$.

10. Mostre que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

11. $ABCD$ é um losango no qual o ângulo $\hat{B}$ mede 108° e $CAPQ$ um outro losango cujo vértice $P$ está no prolongamento de $AB$ (no sentido de $A$ para $B$). Determine o menor ângulo formado por $\overline{AQ}$ e $\overline{BC}$.

12. Num paralelogramo $ABCD$, a bissetriz interna de $D$ intercepta o lado $BC$ em $P$ e a bissetriz de $B\hat{P}D$ contem $A$. Sabendo-se que a medida do ângulo $P\hat{A}B$ vale 57°, determine a medida do ângulo $\hat{A}$.

**Gabarito**

1. (a) F, (b) F, (c) F, (d) V.
2. $\frac{15}{4}$ cm e $\frac{75}{4}$ cm.
3. 43 cm.
4. 3 cm.
5. 4 cm.
6. $\hat{C} = \hat{D} = 96°$; $\hat{A} = \hat{B} = 84°$;
7. 84 cm e 36 cm.
8. Demonstração.
9. 17.
10. Demonstração.
11. 54°.
12. m$(\hat{A}) = 136°$.