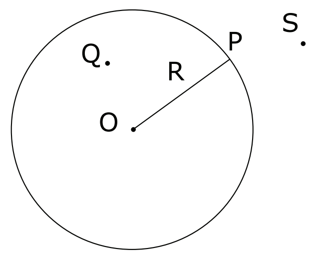
Aula 6 – Pontos Notáveis de um Triângulo

Definição: *Lugar Geométrico* é um conjunto de pontos que gozam de uma mesma propriedade.
Uma linha ou figura é um lugar geométrico se:
a) todos os seus pontos têm a propriedade;
b) só os seus pontos têm a propriedade.

Exemplos:

Circunferência

1) Na figura, é a linha que representa uma circunferência de centro O e raio R.



Note que um ponto P dessa linha dista R do ponto O. A propriedade característica de cada ponto dessa linha em relação ao ponto O é distar R do ponto O. Não existe nenhum ponto não pertencente à circunferência que diste R do ponto O porque, se Q for interior à circunferência, então $\overline{OQ} < R$ e, se S for exterior à circunferência, então $\overline{OS} >$ R.
Assim podemos afirmar que só os pontos dessa circunferência distam R de O. Daí, o lugar geométrico dos pontos que distam R do ponto O é a circunferência de centro O e raio R.

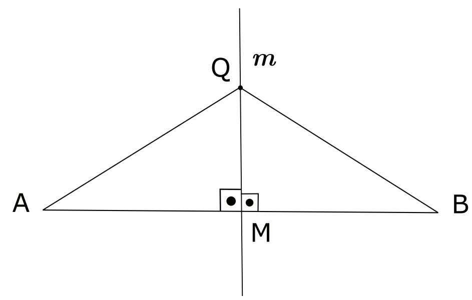
Mediatriz como lugar geométrico

2) Já estudamos que mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio.

Teorema 1: A mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam dos extremos desse segmento.

Prova:
1ª parte: Vamos mostrar que todo ponto da mediatriz equidista dos extremos do segmento.

Considere m a reta perpendicular ao segmento AB e que passa pelo seu ponto médio M, e Q um ponto qualquer dessa mediatriz m. Vamos provar que $\overline{QA} = \overline{QB}$

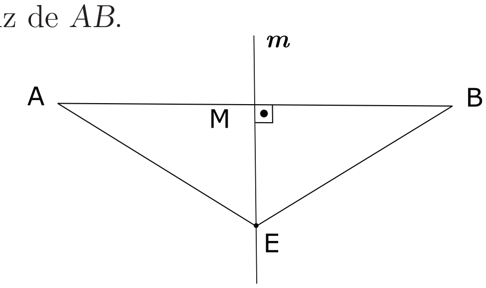


Sejam os triângulos AMQ e BMQ, temos:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{MA} = \overline{MB} \text{ (construção)} \\ A\hat{M}Q = B\hat{M}Q \text{ (ângulo reto)} \\ MQ = MQ \text{ (lado comum)} \end{array}\right. \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \Delta AMQ \equiv \Delta BMQ \Rightarrow$$

Daí, $\overline{QA} = \overline{QB}$.
Logo, Q é equidistante dos extremos A e B.

$2^{\underline{a}}$ parte: Só os pontos da mediatriz equidistam dos extremos desse segmento. Seja E um ponto qualquer do plano, tal que $\overline{EA} = \overline{EB}$, e provemos que E pertence à mediatriz de AB.



De fato, ligando E com o ponto médio M de AB e seja os triângulos AME e BME. Temos:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{EA} = \overline{EB} \text{ (Hipótese)} \\ \overline{AM} = \overline{BM} \text{ (Construção)} \\ EM = EM \text{ (lado comum)} \end{array}\right. \underset{\text{LLL}}{\Longrightarrow} \Delta AME \equiv \Delta BME$$

Logo, os ângulos $A\hat{M}E$ e $B\hat{M}E$ são retos, pois são congruentes e adjacentes suplementares. Assim, a reta $\overleftrightarrow{EM}$ é perpendicular ao segmento AB, passando pelo ponto médio M do segmento AB e daí, pela unicidade de perpendicular, $\overleftrightarrow{EM} = m$.
Logo, E pertence à mediatriz m de AB.

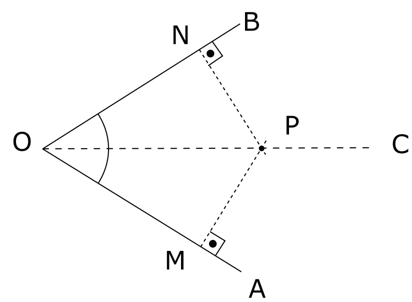
Bissetriz como lugar geométrico

Já estudamos que bissetriz de um ângulo é a semi-reta interior ao ângulo que determina com os seus lados, dois ângulos adjacentes e congruentes.

Teorema 2: A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam dos lados desse ângulo.
Prova:
1ª parte: Todo ponto da bissetriz equidista dos lados desse ângulo.
Seja P um ponto qualquer da bissetriz $\overleftrightarrow{OC}$ de um ângulo $A\hat{O}B$, $\overline{PM}$ e $\overline{PN}$ são as distâncias de P aos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, respectivamente.
Vamos provar que:

$$\overline{PM} = \overline{PN}$$

Seja os triângulos MOP e NOP, temos:

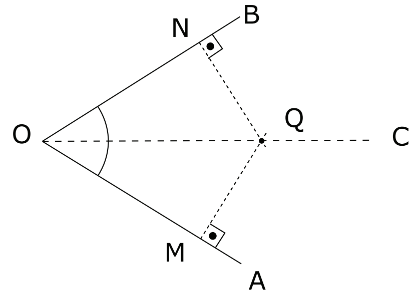


$$\left\{\begin{array}{l} OP \equiv OP \text{ (lado comum)} \\ M\hat{O}P \equiv N\hat{O}P \text{ (definição de bissetriz)} \\ O\hat{M}P \equiv O\hat{N}P \text{ (ângulo reto)} \end{array}\right. \underset{\text{LAAo}}{\Longrightarrow} \Delta MOP \equiv \Delta NOP$$

$\Rightarrow \overline{PM} = \overline{PN}$.

Logo, P é equidistante dos lados do ângulo $A\hat{O}B$.

2ª parte: Só os pontos da bissetriz equidistam dos lados desse ângulo.
Seja Q um ponto qualquer do plano tal que:
$\overline{QM} = \overline{QN}$ (distâncias de Q aos lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de um ângulo $A\hat{O}B$), e provemos que o ponto Q pertence à bissetriz de $A\hat{O}B$.



De fato, sejam os triângulos retângulos MOQ e NOQ. Temos:

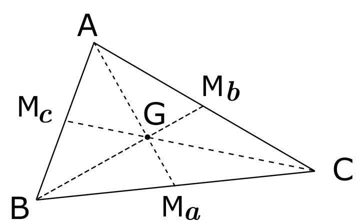
$$\left\{\begin{array}{l}\overline{QM} = \overline{QN} \text{ (hipótese)} \\ \overline{OQ} = \overline{OQ} \text{ (lado comum)}\end{array}\right. \underset{\text{Caso Especial}}{\Longrightarrow} \Delta MOQ \equiv \Delta NOQ$$

Daí, $M\hat{O}Q \equiv N\hat{O}Q$ e são adjacentes, e OQ é bissetriz.
Logo, Q pertence à bissetriz de $A\hat{O}B$.

Vamos, agora, estudar os pontos notáveis de um triângulo.

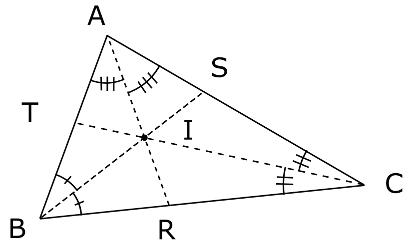
1. Baricentro

Definição: Baricentro de um triângulo é o ponto de encontro das medianas desse triângulo.
No triângulo ABC da figura, AM_a, BM_b e CM_c são as medianas relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente. O ponto G (encontro das medianas) é o baricentro do triângulo ABC.



2. Incentro

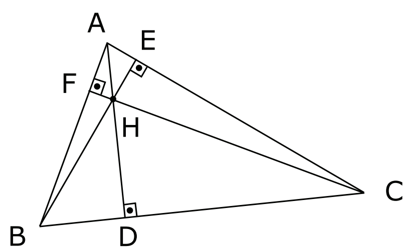
Definição: Incentro de um triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes internas desse triângulo.



No triângulo ABC da figura, AR, BS e CT são as bissetrizes internas relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente.
O ponto I é o incentro do triângulo ABC, este ponto é o centro do círculo inscrito ao triângulo ABC.

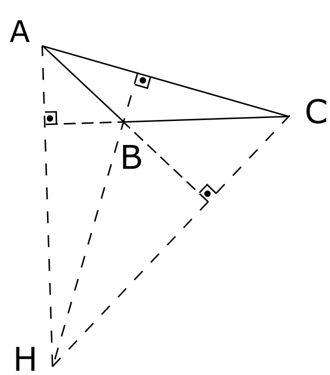
3. Ortocentro

Definição: Ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro das retas suportes das alturas desse triângulo.



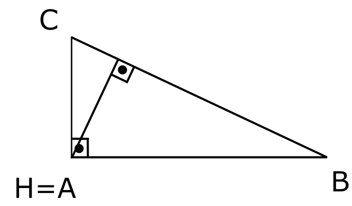
No triângulo ABC da figura, $\overleftrightarrow{AH}, \overleftrightarrow{BH}$, e $\overleftrightarrow{CH}$ são as retas suportes das alturas $\overline{AD}, \overline{BE}$, $\overline{CF}$, respectivamente, relativas aos lados BC, AC e AB, respectivamente.
O ponto H é o ortocentro do triângulo ABC.

Observações:
1) Em um triângulo obtusângulo, o ortocentro é um ponto exterior a esse triângulo.



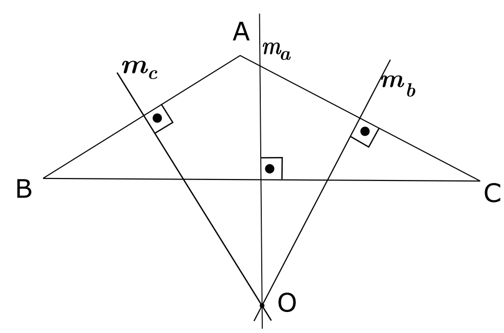
Na figura, o triângulo ABC é obtusângulo e o ortocentro H é exterior ao triângulo.

2) Em um triângulo retângulo, o ortocentro é o vértice do ângulo reto.
Na figura, o triângulo ABC é retângulo em A e o ortocentro H coincide com A.



4. Circuncentro

Definição: Circuncentro de um triângulo é o ponto de encontro das mediatrizes dos lados desse triângulo.
No triângulo ABC da figura m_a, m_b e m_c são as mediatrizes dos lados BC, AC e AB, respectivamente.



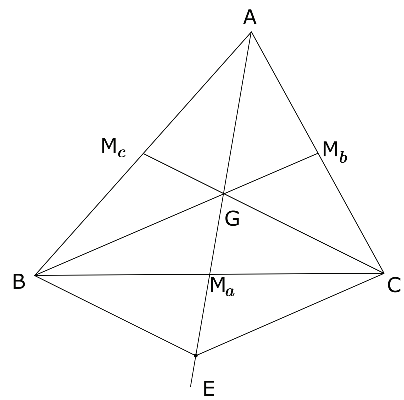
O ponto O é o circuncentro do triângulo ABC, este ponto é o centro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Exercícios Resolvidos

1. Mostre que as três medianas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, o qual divide cada mediana em duas partes, tais que a que contém o vértice é o dobro da outra.

Solução: Seja o triângulo ABC e tracemos as medianas BM_b e CM_c, que se cortam em G, conforme figura.

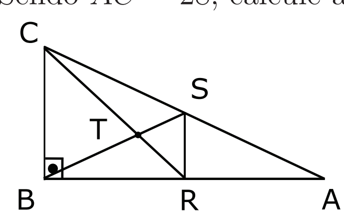
Tracemos a semi-reta $\overline{AG}$ que encontra BC e M_a.



Vamos provar que:

1) AM_a é a terceira mediana, isto é, M_a é o ponto médio de BC.
2) $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GM_a}$ ou $\overline{AG} = \dfrac{2}{3} \cdot \overline{AM_a}$.
De fato, seja E em $\overleftrightarrow{AG}$, tal que $\overline{GE} = \overline{AG}$ e tracemos BE e CE.
No $\Delta\ ABE$, $GM_c \parallel BE$, pois G e M_c são pontos médios dos lados AE e AB, respectivamente (base média).
De modo análogo, $GM_b \parallel CE$ no $\Delta\ ACE$.
Daí, $BECG$ é um paralelogramo (Definição) e suas diagonais BC e GE se encontram em seus pontos médios.
Logo,
1) M_a é o ponto médio de BC e AM_a é a terceira mediana.
2) $\overline{AG} = \overline{GE} = 2 \cdot \overline{GM_a}$ ou $\overline{AG} = \overline{GE} = \dfrac{2}{3} \cdot \overline{AM_a}$
De modo similar, se prova que $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM_b}$ e $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM_c}$.

2. Na figura, o ponto R é ponto médio de AB, e o segmento RS é paralelo ao lado BC. Sendo $\overline{AC} = 28$, calcule a medida do segmento ST.



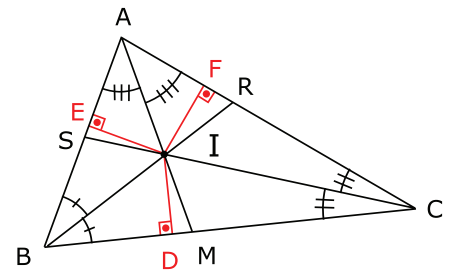
Solução: Sendo R o ponto médio de AB e $RS \parallel BC$, então S é o ponto médio de AC.
Daí, BS e CR são medianas e T é o baricentro do $\Delta\ ABC$.
Daí,

$$\overline{BT} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BS} \underset{\text{Ex. 1}}{\Longrightarrow} \overline{TS} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BS}, \text{ mas } \overline{BS} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14$$

Logo, $\overline{TS} = \frac{1}{3} \cdot 14 = \frac{14}{3} \Rightarrow \overline{TS} = \frac{14}{3}$.

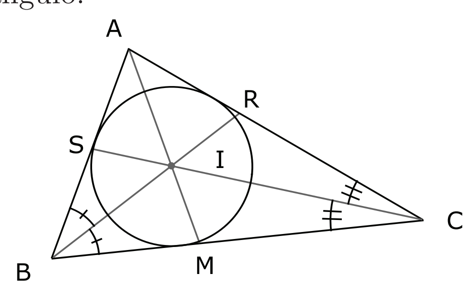
3. Mostre que as três bissetrizes internas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, que é equidistante dos lados.

Solução: Seja o Δ ABC e AM e BR as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ na figura.



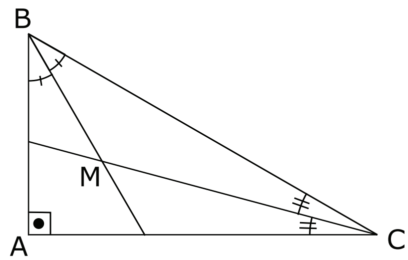
As semi-retas $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{BR}$ formam com o lado AB, ângulos cuja soma $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$ é menor que 180° e, terão que encontrar-se.
Seja I o ponto de interseção. I pertencendo à bissetriz AM, temos que $\overline{IE} = \overline{IF}$ (Teorema 2).
I pertencendo à bissetriz BR, temos que $\overline{IE} = \overline{ID}$.
Logo, $\overline{IF} = \overline{ID}$, então I pertence a bissetriz CS.

Logo, as três bissetrizes internas do Δ ABC concorrem em um mesmo ponto, que é equidistante dos lados.
Note que o incentro de um triângulo é o centro da circunferência inscrita neste triângulo.



4. Em um triângulo retângulo ABC, traçam-se as bissetrizes $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$ dos ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, onde M é o incentro. Calcule a medida do ângulo $B\hat{M}C$.

Solução: Seja um triângulo retângulo ABC, tracemos as bissetrizes $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$ dos ângulos agudos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, onde M é o incentro.



Temos que:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ no } \Delta ABC \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

No Δ BMC temos:

$$\frac{\hat{B}}{2} + B\hat{M}C + \frac{\hat{C}}{2} = 180^\circ \quad \Rightarrow B\hat{M}C = 180^\circ - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2}$$

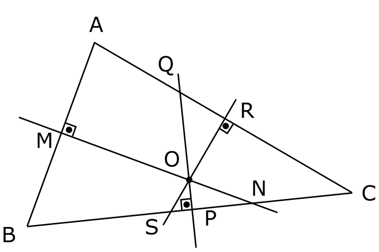
$$\Rightarrow B\hat{M}C = 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow B\hat{M}C = 180^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Logo, a medida do ângulo $B\hat{M}C$ é 135°.

5. Mostre que as três mediatrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto equidistante dos vértices desse triângulo.

Solução: Seja o triângulo ABC, e MN e PQ as mediatrizes relativas aos lados AB e AC.



O pertence à mediatriz MN do lado $AB \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OB}$ (1)

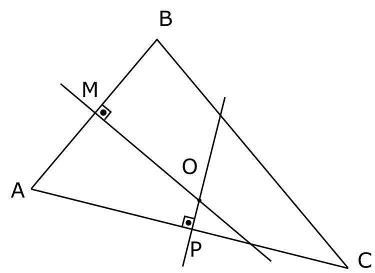
O pertence à mediatriz PQ do lado $BC \Rightarrow \overline{OB} = \overline{OC}$ (2)

De (1) e (2) $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} \Rightarrow \overline{OA} = \overline{OC}$

Logo, O pertence à mediatriz RS, do lado AC.

6. Exprimir os ângulos formados pelas mediatrizes em função dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ do triângulo ABC.

Solução: Consideremos a figura, onde OM e OP são mediatrizes dos lados AB e BC.



Então, no quadrilátero $AMOP$ temos:

$$\hat{A} + M\hat{O}P = 180^\circ \Rightarrow M\hat{O}P = 180^\circ - \hat{A}$$

Chamando $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ os ângulos formados pelas mediatrizes, temos que

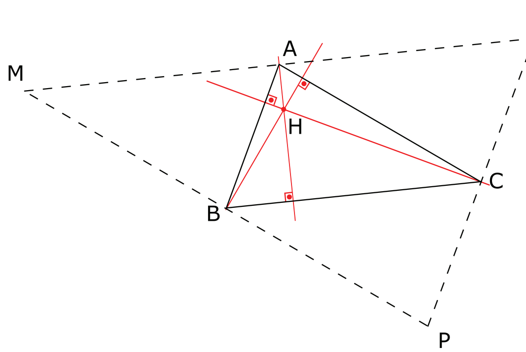
$$\widehat{\alpha} = 180^\circ - \hat{A}$$

De forma similar

$$\widehat{\beta} = 180^\circ - \hat{B} \text{ e } \widehat{\gamma} = 180^\circ - \hat{C}$$

7. Mostre que as retas suportes das três alturas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto.

Solução: Seja o triângulo ABC, e tracemos para cada vértice a paralela ao lado oposto. Estas cortam-se, porque são paralelas às retas secantes e formam o triângulo MPQ.

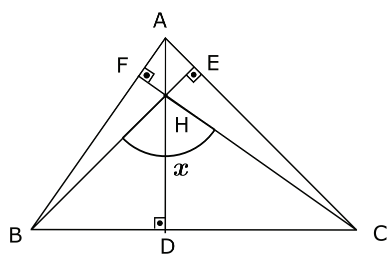


Os quadriláteros $AMBC$, $ABCQ$ e $CABP$ são paralelogramos, já que os lados opostos são paralelos.
Então:

$$\overline{AM} = \overline{BC} = \overline{AQ}$$
$$\overline{BM} = \overline{AC} = \overline{BP} \text{ (Propriedade de paralelogramo)}$$
$$\overline{CP} = \overline{AB} = \overline{CQ}$$

Então, A, B e C são os pontos médios dos lados do triângulo MPQ. Assim, as três alturas do triângulo dado ABC, confundem-se com as três mediatrizes do triângulo MPQ e concorrem em um mesmo ponto, H.

8. Na figura, calcule o valor de x, se $A\hat{B}C = 55°$ e $A\hat{C}B = 45°$.



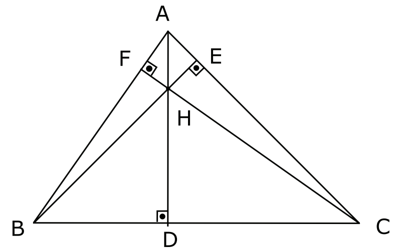
Solução: Seja a figura dada, temos que $A\hat{B}C = 55°$ e $A\hat{C}B = 45°$.

Então,

$$B\hat{A}C = 180° - A\hat{B}C - A\hat{C}B = 180° - 55° - 45° = 80°$$

No quadrilátero $AFHE$, temos:

$$m(F\hat{M}E) = 180° - 80° = 100°.$$



Como os ângulos $B\hat{H}C$ e $F\hat{H}E$ são opostos pelo vértice então:

$$x = m(B\hat{M}C) = m(F\hat{H}E) = 100°$$

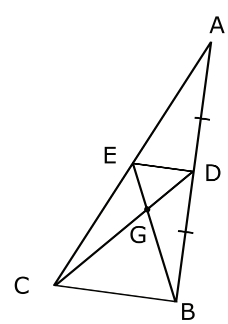
Observações:

1) Em um triângulo isósceles os quatro pontos notáveis estão sobre a mesma reta, já que a mediatriz, mediana, altura e bissetriz relativas à base coincidem.

2) No caso do triângulo equilátero, esses quatro pontos se reduzem a um só.

Exercícios Propostos

1. Na figura, o ponto D é médio do lado AB, e DE é paralelo ao lado BC. Sendo $\overline{AC} = 60$ cm, calcule a medida de GE.



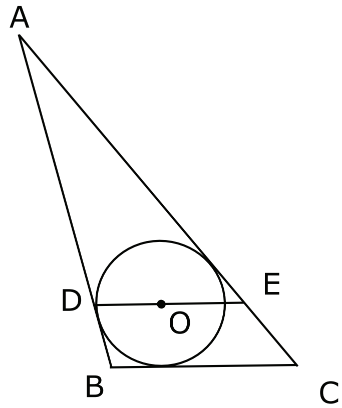
2. Considere um triângulo ABC tal que as medianas BD e CE, que se cortam em G, sejam congruentes. Mostre que:

   a) $\overline{BG} = \overline{CG}$

   b) $\Delta CGD = \Delta BGE$

   c) o triângulo ABC é isósceles.

3. Na figura, a circunferência de centro O está inscrita no triângulo ABC. Sendo DOE paralelo ao lado BC, $\overline{AB} = 16$, $\overline{AC} = 20$, calcule o perímetro do triângulo ADE.



4. Em um triângulo ABC as três mediatrizes fazem entre si três ângulos iguais a $120°$. Mostre que este triângulo é equilátero.

5. Em um triângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ mede $60°$ e o ângulo $\hat{B}$ mede $80°$. Calcule as medidas dos seis ângulos formados pelas alturas com vértice no ortocentro H desse triângulo.

6. Considere um triângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ mede $40°$ e o ângulo $\hat{B}$ mede $60°$. Une-se o ponto médio M do lado BC aos pés D e E das alturas BD e CE. Determine as medidas dos ângulos internos do triângulo MDE.

7. As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC formam um ângulo de $116°$. Determinar a medida do menor ângulo formado pelas alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ desse triângulo.

8. Mostre que em um triângulo acutângulo o ortocentro é incentro do seu triângulo órtico.
   Nota: Triângulo órtico é o triângulo cujos vértices são os pés das alturas de um triângulo.

9. Considerando os quatro pontos notáveis de um triângulo,

   a) Quais os que podem ser externos ao triângulo?

   b) Qual o que pode ser ponto médio de um lado?

   c) Qual o que pode ser vértice de um triângulo?

10. A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 20 cm e um dos ângulos $20°$.

    a) Qual a medida da mediana relativa à hipotenusa?

    b) Qual a medida do ângulo formado por essa mediana e pela bissetriz do ângulo reto?

Gabarito

1. 10.

2. Demonstração.

3. 36.

4. Demonstração.

5. $80°, 60°, 40°, 80°, 60°, 40°$.

6. $100°, 40°, 40°$.

7. $52°$

8. Demonstração.

9. a) ortocentro e circuncentro; b) circuncentro; c) ortocentro.

10. a) 10 cm; b) $25°$.