Aula 7 – Complementos

Apresentamos esta aula em forma de *Exercícios Resolvidos*, mas são resultados importantes que foram omitidos na primeira aula que tratou de *Conceitos Básicos*.

Exercício 1: Em um plano, por um ponto, existe e é única a reta perpendicular a uma reta dada.

Solução:

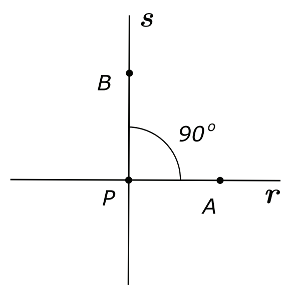
Seja o plano α, $r \in \alpha$ e $P \in \alpha$. Vamos considerar dois casos:

1º Caso: $P \in r$.

Existência:

Vamos exibir pelo menos uma reta s que passa por P e é perpendicular à reta r.

Seja $A \in r$ e $A \neq P$.



Constroem-se os ângulos $A\hat{P}B$, com B em um dos semiplanos de origem r, tal que $m(A\hat{P}B) = 90°$.

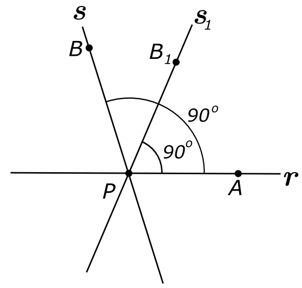
Seja $\overleftrightarrow{BP}$ sendo s. Então existe pelo menos uma reta s que passa por P e é perpendicular à reta r.

Unicidade:

Vamos supor que existe mais de uma reta perpendicular à reta r que passa pelo ponto P, ou seja, que existem as retas s e s_1, perpendiculares à reta r que passa por P. E vamos provar que $s = s_1$.

Considere as retas s e s_1 que contêm as semi-retas $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PB_1}$ em um dos semiplanos de origem r.

Pela definição de retas perpendiculares, os ângulos $A\hat{P}B$ e $A\hat{P}B_1$ são retos, conforme a figura.

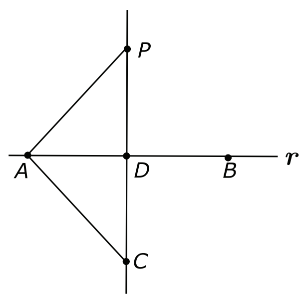


Daí, por construção, os pontos B e B_1 estão na mesma semi-reta. Daí, s e s_1 têm mais de um ponto comum e não podem ser distintas. Portanto $s = s_1$.

2º Caso: P não pertence à reta r.

Existência:

Sejam A e B dois pontos distintos de r. Ligue P com A.
Se $m(P\hat{A}B) = 90°$, $\overleftrightarrow{PA}$ é perpendicular à reta r e a existência está provada.
Vamos supor que $P\hat{A}B$ seja agudo, conforme a figura:



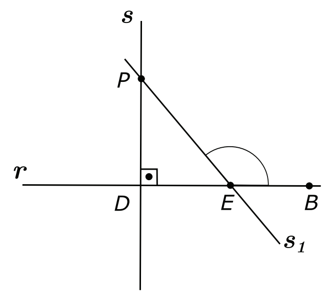
Trace a semi-reta $\overrightarrow{AC}$ formando com $\overleftrightarrow{AB}$ ângulo congruente a $P\hat{A}B$. Por construção $\overline{AP} = \overline{AC}$ e ligue P com C. A reta $\overleftrightarrow{CD}$ encontra a reta r em D, pois P e C estão em semiplanos opostos em relação à reta r.
Sejam os triângulos PAD e CAD, temos:

$$\left\{\begin{array}{l} AD \equiv AD \text{ (lado comum)} \\ P\hat{A}D = C\hat{A}D \text{ (construção)} \\ AP = AC \text{ (construção)} \end{array}\right. \underset{\text{LAL}}{\Longrightarrow} \Delta PAD \equiv \Delta CAD$$

Logo, $A\hat{D}P \equiv A\hat{D}C$ e esses ângulos são adjacentes e suplementares, então $\overleftrightarrow{PC}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$.
Daí existe por P pelo menos uma reta s perpendicular à r.

Unicidade:

Suponha $\overleftrightarrow{PD} = s$ perpendicular à reta r. Vamos provar que uma outra reta $\overleftrightarrow{PE} = s_1$ com $E \in r$ e distinto de D, não pode ser perpendicular à reta r.

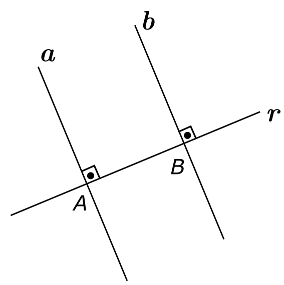


De fato, $P\hat{E}B$ é um ângulo externo ao triângulo PDE. Daí $m(P\hat{E}B) > m(P\hat{D}E) = 1$ reto.
Então $P\hat{E}B$ é obtuso, logo s_1 não pode ser perpendicular à reta r.
Assim, a reta s, perpendicular a r, que passa por P é única.

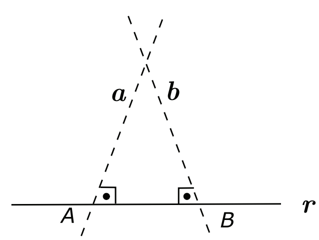
Exercício 2: Mostre que em um plano, duas retas distintas e perpendiculares a uma terceira são paralelas entre si.

Solução:

Seja a reta r e dois pontos distintos A e B pertencentes à reta r. Por esses dois pontos tracemos as retas a e b perpendiculares à reta r.



As retas a e b não têm ponto em comum, pois, se tivesse, teríamos duas retas distintas perpendiculares à reta r passando por esse ponto comum, o que contraria a unicidade da perpendicular.
Logo, $a \parallel b$.



Observações:

1) *Figura fantasma* é uma figura que não tem sentido geométrico, usada para que possamos chegar a contradições em relação a propriedades aceitas como verdadeiras.

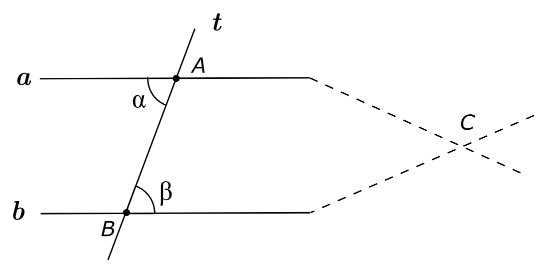
2) A propriedade que acabamos de provar justifica o fato de que não existe triângulo com dois ângulos retos.

Exercício 3: Mostre que duas retas distintas de um plano, que formam com uma transversal ângulos alternos internos congruentes, são retas paralelas.

Solução:

Considere as retas a e b distintas cortadas pela transversal t nos pontos A e B, e os ângulos alternos internos de medidas α e β com $\alpha = \beta$ e vamos provar que $a \parallel b$.

Vamos provar pelo método de redução ao absurdo, ou seja, vamos negar a tese, admitindo que as retas a e b se encontram num ponto C, conforme a figura fantasma.



Seja o ΔABC, o ângulo α é externo e β é interno.

Temos que $\alpha > \beta$ (o ângulo externo é maior que qualquer interno não adjacente).

Absurdo, já que $\alpha = \beta$ (hipótese). Então $a \parallel b$.

Observação:

De modo similar provaríamos o caso de α e β serem alternos externos, correspondentes ou colaterais.

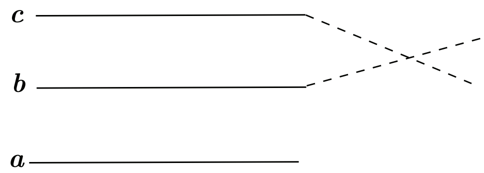
Exercício 4: Mostre que, em um plano, dadas duas retas paralelas, qualquer reta paralela a uma delas será paralela à outra.

Solução:

Sejam a e b as retas paralelas e c uma reta paralela à reta a.

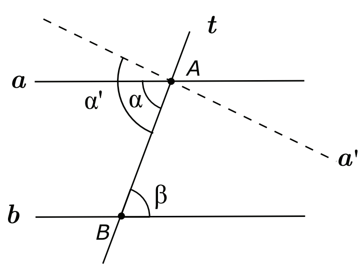
Vamos provar que $c \parallel b$.

Vamos usar o método de redução ao absurdo.



Se as retas b e c tivessem um ponto comum, teríamos por esse ponto duas retas distintas b e c paralelas à reta a, o que contraria o postulado das paralelas, ou postulado de Euclides.
Logo as retas b e c não têm ponto comum e são paralelas, ou seja, $c \parallel b$.

Exercício 5: Mostre que duas retas paralelas distintas, cortadas por uma transversal, formam ângulos alternos internos congruentes.
Solução:
Sejam as retas paralelas e distintas a e b cortadas por uma transversal t nos pontos A e B. Se α e β são as medidas dos ângulos alternos internos, vamos provar que $\alpha = \beta$.
Usando o método de redução ao absurdo, vem:
Vamos supor $\alpha \neq \beta$. Pelo ponto A, trace a reta a', tal que uma de suas semi-retas forma com t um ângulo $\alpha' = \beta$.



Pelo Exercício 3, como $\alpha' = \beta$ então $a' \parallel b$.
Mas, por hipótese, $a \parallel b$, daí pelo ponto A temos duas retas a e a' distintas paralelas à reta b, isto é absurdo, por causa do postulado das paralelas.
Logo $\alpha = \beta$.

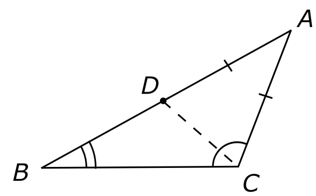
Observação:
De modo similar, provaríamos que são congruentes os ângulos alternos externos e os correspondentes e que os colaterais são suplementares se tivermos duas retas paralelas distintas, cortadas por uma transversal.

Exercício 6: Mostre que, se um triângulo tem dois lados de medidas desiguais, ao lado da maior medida opõe-se o ângulo de maior medida.

Solução:

Seja um triângulo ABC tal que $\overline{AB} > \overline{AC}$ e vamos provar que $\hat{C} > \hat{B}$.

Seja sobre o lado AB um ponto D, tal que $\overline{AD} = \overline{AC}$.



Ligando D com C vem:

$$\hat{C} > m(A\hat{C}D) \qquad (1)$$

O triângulo ACD é isósceles por construção,

$$\overline{AD} = \overline{AC} \Rightarrow m(A\hat{D}C) = m(A\hat{C}D) \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) vem:

$$\hat{C} > m(A\hat{D}C) \qquad (3)$$

Temos que o ângulo $A\hat{D}C$ é externo em relação ao ΔBDC. Então

$$m(A\hat{D}C) > \hat{B} \qquad (4)$$

De (3) e (4) vem:

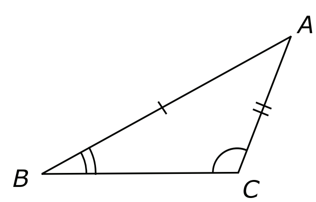
$$\hat{C} > \hat{B}$$

Exercício 7: Mostre que, se um triângulo tem dois ângulos de medidas desiguais, ao ângulo de maior medida opõe-se o lado de maior medida.

Solução:

Seja um ΔABC tal que $\hat{C} > \hat{B}$ e vamos provar que $\overline{AB} > \overline{AC}$.

Temos que $\overline{AB} < \overline{AC}$ ou $\overline{AB} = \overline{AC}$ ou $\overline{AB} > \overline{AC}$.



1ª Possibilidade: $\overline{AB} < \overline{AC}$

Aplicando o Exercício 6, temos que $\hat{C} < \hat{B}$; absurdo, já que $\hat{C} > \hat{B}$.

$2^{\underline{a}}$ Possibilidade: $\overline{AB} = \overline{AC}$

Sendo $\overline{AB} = \overline{AC}$, o ΔABC é isósceles $\Rightarrow \hat{C} = \hat{B}$; absurdo, já que $\hat{C} > \hat{B}$.

Daí só nos resta a terceira alternativa: $\overline{AB} > \overline{AC}$

Exercício 8: Mostre que, em qualquer triângulo, a medida de um lado é menor que a soma das medidas dos outros dois e é maior que a diferença dessas medidas em valor absoluto.

Solução:

Seja ABC um triângulo qualquer, tal que $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

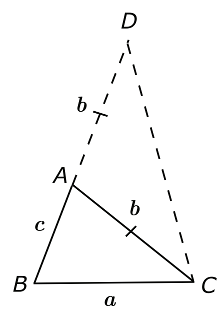
Vamos mostrar que :

1) $a < b + c$

2) $a > |b - c|$

$1^{\underline{a}}$ parte: $a < b + c$

Seja sobre a reta suporte do lado AB um ponto D, tal que $\overline{AD} = \overline{AC} = b$.



Ligue os pontos D e C, obtendo o triângulo isósceles CAD de base CD.

Temos:

$m(A\hat{C}D) < m(B\hat{C}D)$ (1)

$m(A\hat{C}D) = m(C\hat{D}A)$ (2)

De (1) e (2) vem:

$$m(C\hat{D}A) < m(B\hat{C}D)$$

Daí no ΔBCD temos que $\overline{BC} < \overline{BD}$, ou seja,

$$a < \overline{BD} \qquad (3)\ (\text{Exercício } 7)$$

Como

$$\begin{cases} \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AD} \\ \overline{AD} = \overline{AC} \end{cases} \Rightarrow \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{AC},\ \text{ou seja, } \overline{BD} = c + b \qquad (4)$$

De (3) e (4), vem:

$$a < b + c$$

$2^{\underline{a}}$ parte: $a > |b - c|$

Se $b = c$, é evidente a desigualdade a ser provada.

Se $b > c \Rightarrow$ então pela $1^{\underline{a}}$ parte temos:

$$a + c > b \Rightarrow a > b - c \qquad (1)$$

Se $b < c \Rightarrow a + b > c \Rightarrow a > c - b \Rightarrow a > -(b - c) \qquad (2)$

De (1) e (2) vem que:

$$a > |b - c|$$

Observação:

Uma condição necessária e suficiente para que três números reais positivos a, b e c sejam as medidas dos lados de um triângulo é que um deles seja menor que a soma dos outros dois e maior que a diferença desses outros dois em valor absoluto.

Por exemplo: $|b - c| < a < b + c$.

Exercício 9: Verificar se existe algum triângulo cujos lados medem:

a) 7 cm, 10 cm e 19 cm.

b) 6 cm, 9 cm e 14 cm.

Solução:

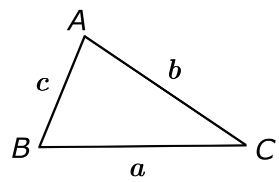
a) Usando o Exercício 8 vem: $|19 - 7| < 10 < 19 + 7$, que é uma desigualdade falsa.
   Daí não existe triângulo com lados medindo 7 cm, 10 cm e 19 cm.

b) Usando o Exercício 8 vem: $|14 - 6| < 9 < 14 + 6$, que é uma desigualdade verdadeira.
   Daí, existe triângulo com lados medindo 6 cm, 9 cm e 14 cm.

Exercício 10: Mostre que em qualquer triângulo a medida de cada lado é menor que a medida do semiperímetro desse triângulo.

Solução:

Considere a, b e c as medidas dos lados de um triângulo ABC de perímetro $2p$.



Vamos provar que $a < p$.
De fato, temos pelo Exercício 8 que $a < b + c \quad (1)$
Somando a medida a aos dois membros da desigualdade (1) vem:

$$a + a < a + b + c \Rightarrow 2a < a + b + c \Rightarrow a < \frac{a + b + c}{2}$$

Ou seja,

$$a < \frac{2p}{2} \Rightarrow a < p$$

De forma similar

$$b < p \qquad \text{e} \qquad c < p$$

Exercícios Propostos

1. Mostre que em um triângulo qualquer a medida de cada altura é menor que a semi-soma das medidas dos lados adjacentes a ela.

2. Mostre que em qualquer triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é menor do que a metade da hipotenusa.

3. Se $x \in \mathbb{N}$ e os números $x - 1$, $2x + 1$ e 10 são medidas dos lados de um triângulo, determine o número de possibilidades de x.

4. Mostre que em qualquer triângulo isósceles ABC, as bissetrizes dos ângulos congruentes são congruentes. (Use congruência de triângulos).

5. Mostre que a soma das medidas das três medianas é menor que o perímetro desse triângulo.

Gabarito

1. Demonstração.

2. Demonstração.

3. 4.

4. Demonstração.

5. Demonstração.

Estudo de posições relativas de duas circunferências

Definições:

1) Uma circunferência é interna à outra se todos os seus pontos são pontos internos da outra.

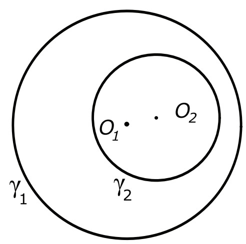
2) Uma circunferência é tangente interna à outra se tem um único ponto comum e os demais pontos da primeira são pontos internos da segunda.

3) Duas circunferências são secantes se têm em comum somente dois pontos distintos.

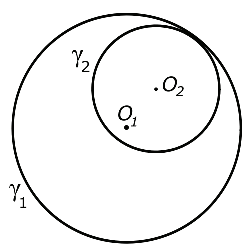
4) Duas circunferências são tangentes externas se têm único ponto comum e os demais pontos de uma são externos à outra.

5) Duas circunferências são externas se os pontos de uma delas são externos à outra.

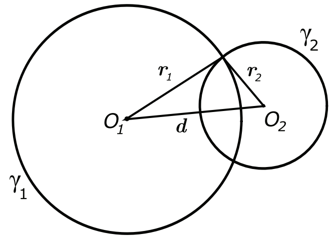
Se γ_1 é circunferência de centro O_1 e raio r_1.
Se γ_2 é circunferência de centro O_2 e raio r_2.
$d \rightarrow$ distância entre os centros O_1 e O_2.



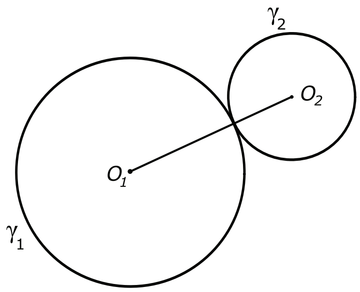
γ_2 é interna a γ_1, $d < r_1 - r_2$



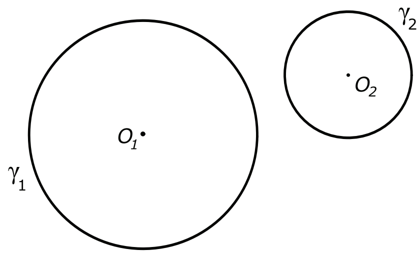
γ_2 é tangente interna a γ_1, $d = r_1 - r_2$



γ_2 e γ_1 são secantes, $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$



γ_2 tangente externa a γ_1, $d = r_1 + r_2$

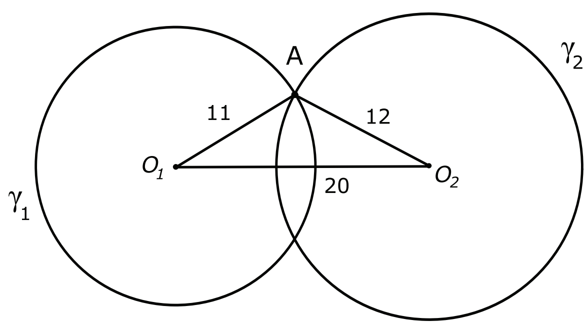


γ_2 é externa a $\gamma_1, d > r_1 + r_2$

Exercícios Resolvidos

1. Duas circunferências são secantes, sendo de 20 cm a distância entre seus centros. Sabendo que o raio da menor circunferência mede 11 cm, determine o raio da maior que é múltiplo de 12.

Solução: Temos que : $d(O_1, O_2) = 20$ e $r_1 = 11$.



Então para existir o triângulo O_1AO_2 vem:

$$20 - 11 < r_2 < 20 + 11 \Rightarrow 9 < r_2 < 31$$

Como r_2 é múltiplo de 12, temos que $r_2 = 12$ ou $r_2 = 24$.

2. A distância entre os centros de duas circunferências exteriormente é de 33 cm. Determinar seus diâmetros sabendo que a razão entre seus raios é $\frac{4}{7}$.

Solução: Sejam duas circunferências tangentes externas de raios r_1 e r_2, então

$$\begin{cases} d = 33 = r_1 + r_2 & (1) \\ \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{4}{7} & (2) \end{cases}$$

De (2) vem:

$$7r_1 = 4r_2 \Rightarrow r_1 = \frac{4}{7} \cdot r_2 \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1) vem:

$$\frac{4 \cdot r_2}{7} + r_2 = 33 \Rightarrow \frac{11 \cdot r_2}{7} = 33 \Rightarrow r_2 = 21 \Rightarrow r_1 = \frac{4 \cdot 21}{7} = 12$$

Daí, os diâmetros são 24 cm e 42 cm.