Aula 8 – Segmentos Proporcionais

Nas aulas anteriores, aprendemos uma formação geométrica básica, através da Geometria Plana de Posição.

Aprendemos que:

1. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo são $180^{\underline{o}}$.

2. Em um triângulo, a medida de cada lado é menor que a soma das medidas dos outros dois.

3. Incentro de um triângulo é o ponto de encontro das três bissetrizes internas.

No entanto, apesar de sabermos o que é uma altura, bissetriz ou mediana, essa geometria de posição não nos dá condições para o cálculo do comprimento dessa altura, bissetriz ou mediana. A parte da geometria que estuda as relações métricas entre medidas de segmentos de uma figura é denominada Geometria Métrica que vamos estudar a partir deste momento.

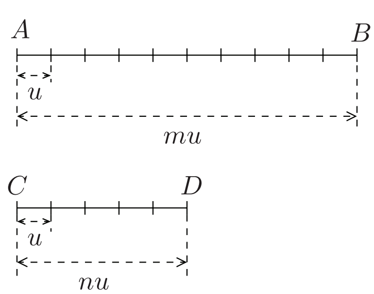
Razão de dois segmentos

A razão entre dois segmentos é igual à razão dos números que exprimem as medidas com a mesma unidade. Supor que AB e CD sejam comensuráveis, isto é, admitem uma medida comum u, que está m vezes em AB e n vezes em CD.

Temos:

$$\overline{AB} = mu$$

$$\overline{CD} = nu$$



A razão entre os segmentos AB e CD é igual a razão entre suas medidas, ou seja,

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{mu}{nu} = \frac{m}{n}\,.$$

Obs.: Se os segmentos AB e CD são incomensuráveis, ou seja, não admitem uma medida comum, podemos provar que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\,.$$

Segmentos proporcionais

Definição:

Dois segmentos são proporcionais a dois outros segmentos se à razão dos dois primeiros é igual à razão dos outros dois.

Exemplo

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}\,.$$

A igualdade dessas duas razões formam uma proporção.

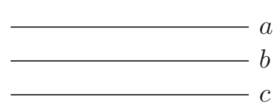
Feixe de retas paralelas

Definição:

1) *Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares entre si.*

Exemplo

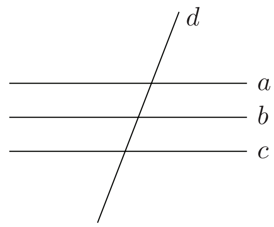
Na figura a seguir, as retas a, b e c constituem um feixe de retas paralelas.



2) *Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe de retas paralelas.*

Exemplo

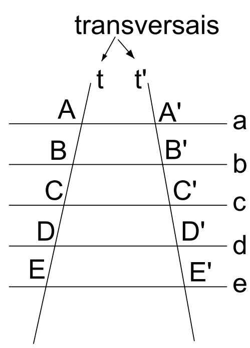
Na figura a seguir, a reta d é uma reta transversal às retas paralelas a, b e c.



3) *Pontos correspondentes de duas transversais são pontos destas transversais que estão numa mesma reta do feixe de retas paralelas A e A', B e B', C e C', D e D', E e E' são pontos correspondentes.*

Exemplo

Na figura a seguir, a, b, c, d e e é o feixe de retas parlelas.



4) *Segmentos correspondentes de duas transversais são segmentos cujas extremidades são os respectivos pontos correspondentes.*

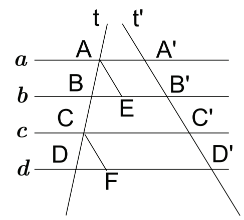
Exemplo

AB e $A'B'$, BC e $B'C'$, CD e $C'D'$ são segmentos correspondentes.

> **Teorema 1**
> Se um feixe de retas paralelas tem duas transversais, então os segmentos congruentes de uma tem como correspondentes segmentos congruentes na outra.

Demonstração:

Seja um feixe de retas paralelas com duas transversais, temos que $a//b//c//d$ e $AB \equiv CD$ (hipótese). Tracemos pelos pontos A e C os segmentos AE e CF, tal que $AE//t'$ e $CF//t'$. Temos que $AE \equiv A'B'$ e $CF \equiv C'D'$ (1), já que são lados opostos dos paralelogramos $AEB'A'$ e $CFD'C'$.



Então,

$$\Delta ABE \equiv \Delta CDF$$

pois

$$\begin{cases} AB & \equiv & CD \\ A\widehat{B}E & \equiv & C\widehat{D}F \\ B\widehat{A}E & \equiv & D\widehat{C}F \end{cases}$$

(caso ALA) o que implica,

$$AE \equiv CF\,,$$

de (1)

$$A'B' \equiv C'D'\,.$$

■

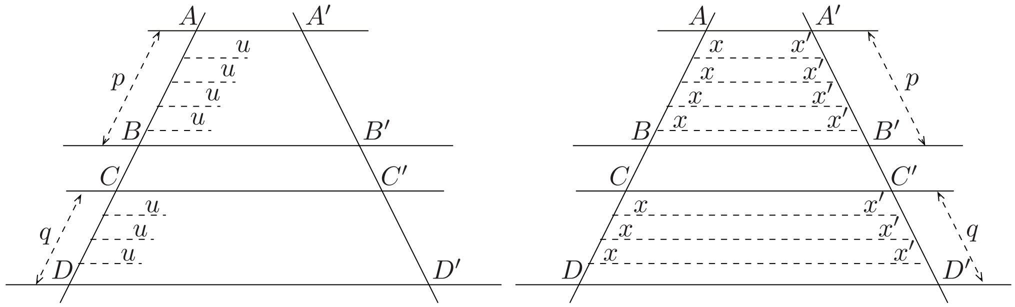
Teorema de Tales
Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então à razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra.

Demonstração:

Considere AB e CD dois segmentos de uma transversal e $A'B'$ e $C'D'$ são os respectivos segmentos correspondentes da outra transversal.

Vamos provar que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$.

1º caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis.



Existe um segmento u que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{pu}{qu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q} \ \ (1)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e aplicando o Teorema 1 vem:

$$\begin{array}{l} A'B' = px' \\ \\ C'D' = qx' \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} = \frac{p}{q}$$

De (1) e (2) vem que:

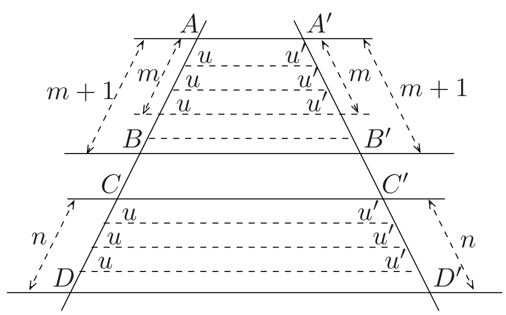
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}\,.$$

2º caso: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis.

Daí, não existe segmento submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Tomemos um segmento u submúltiplo de $\overline{CD}$, isto é, $\overline{CD} = nu$ (1).

Por serem $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ incomensuráveis, marcando necessariamente u em $\overline{AB}$, temos que para um certo número inteiro m de vezes acontece $mu < \overline{AB} < (m+1)u$ (2).



De (1) e (2)

$$\begin{array}{ccccc} mu & < & \overline{AB} & < & (m+1)u \\ nu & & = & & \overline{CD} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{m+1}{n} \qquad (3)$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de AB e CD e aplicando o Teorema 1 vem:

$$\begin{array}{rcl} \overline{C'D'} & = & nu' \\ mu' & < \ \overline{A'B'} \ < & (m+1)u' \end{array}$$

Temos:

$$\begin{array}{rcccl} mu' & < & \overline{A'B'} & < & (m+1)u' \\ nu' & & < & & \overline{C'D'} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{n} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}} < \frac{m+1}{n} \qquad (4)$$

Pelas relações (3) e (4) as razões $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ e $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ estão compreendidos entre $\dfrac{m}{n}$ e $\dfrac{m+1}{n+1}$, cuja diferença é $\dfrac{1}{n}$.

Em outras palavras, as razões $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ e $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ têm valores aproximados a menos de $\dfrac{1}{n}$

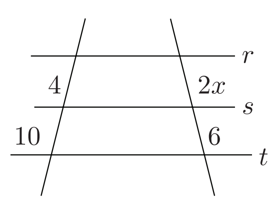
Logo temos, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$.

$\blacksquare$

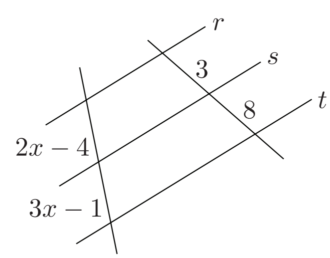
Exercícios Resolvidos

1. Nas figuras a seguir, as retas r, s e t são paralelas. Determine os valores de x e y.

a)



b)



Solução:

Usando o Teorema de Tales vem:

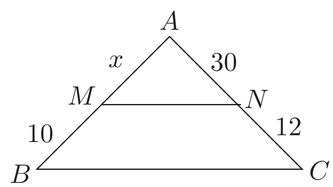
a)

$$\frac{4}{10} = \frac{2x}{6} \quad \Rightarrow \quad 20x = 24 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$

b)

$$\frac{2x-4}{3x-1} = \frac{3}{8} \Rightarrow 16x - 32 = 9x - 3 \Rightarrow 16x - 9x = 32 - 3 \Rightarrow 7x = 29 \Rightarrow x = \frac{29}{7}\,.$$

2. Na figura, $\overline{MN}//\overline{BC}$. Calcule o valor de $\overline{AB}$.



Solução:

Usando o Teorema de Tales vem:

$$\frac{x}{10} = \frac{30}{12} \quad\Rightarrow\quad 12x = 30 \cdot 10 \quad\Rightarrow\quad x = 25\,.$$

Logo,

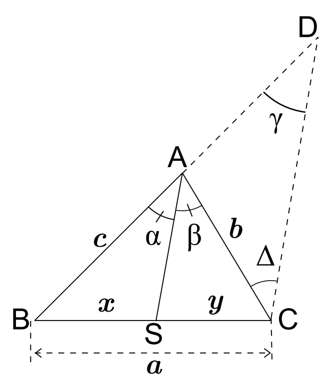
$$\overline{AB} = x + 10 = 25 + 10 = 35\,.$$

Bissetriz de um triângulo

Teorema da bissetriz interna (TBI)
Em qualquer triângulo, uma bissetriz interna divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo de lados a, b e c, $\overline{AS}$ uma bissetriz interna, $\overline{SB} = x$ e $\overline{SC} = y$. Vamos provar que $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$.



De fato, tracemos pelo vértice C do ΔABC, a paralela $\overline{CD}$ à bissetriz interna AS, conforme a figura.

Temos que:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \beta \text{ (hipótese)} \\ \beta & = & \Delta \text{ (alternos internos)} \\ \alpha & = & \gamma \text{ (correspondentes)} \\ \Rightarrow \gamma & = & \Delta \end{array}$$

Daí, o ΔACD é isósceles, de base CD, logo $\overline{AD} = \overline{AC} = b$. Usando o teorema de Tales no ΔBCD vem:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AD}}.$$

Como $\overline{BS} = x$, $\overline{CS} = y$, $\overline{BA} = c$ e $\overline{AD} = \overline{AC} = b$ vem $\dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{b}$.

■

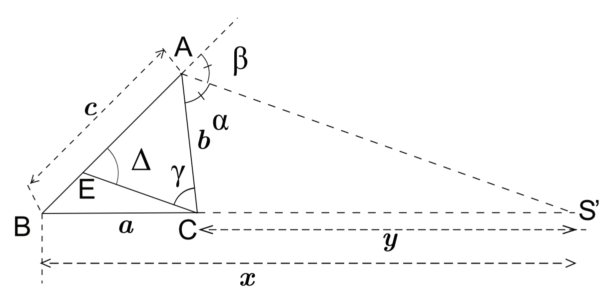
Obs: A recíproca desse teorema é verdadeira. Tente provar!

Bissetriz de um triângulo

Teorema da bissetriz externa (TBE)
Em um triângulo qualquer, a bissetriz externa de um ângulo externo divide o lado, externamente, em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo, tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$. Seja AS' bissetriz externa e $\alpha = \beta$, como na figura.



Pelo vértice C tracemos $CE//AS'$, conforme a figura.

Temos que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta \text{ (hipótese)} \\ \alpha &= \gamma \text{ (alternos internos)} \\ \beta &= \Delta \text{ (correspondentes)} \end{aligned}$$

Daí, $\gamma = \Delta$

Logo, o triângulo ACE é isósceles de base CE. Então, $\overline{AE} = \overline{AC} = b$.

Usando o teorema de Tales vem:

$$\frac{\overline{BS'}}{\overline{CS'}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{EA}}.$$

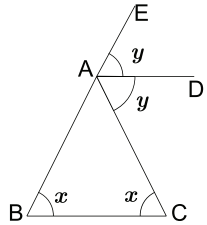
Como $\overline{BS'} = x$, $\overline{CS'} = y$, $\overline{BA} = c$ e $\overline{AE} = \overline{AC} = b$ temos que $\dfrac{x}{y} = \dfrac{c}{b}$.

■

Obs.:

1. A recíproca desse teorema é verdadeira. Tente provar!

2. Em um triângulo isósceles ABC, de base BC, a bissetriz externa de vértice A é paralela à base. De fato, no ΔABC da figura, o ângulo $C\widehat{A}E$ mede $2y$; como é externo, temos $2y = x + x = 2x \Rightarrow y = x$. Logo, x e y são ângulos alternos internos.

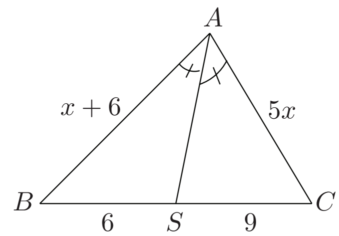


Daí, a bissetriz $\overline{AD}$ é paralela à base BC.

Note que neste caso não se aplica o Teorema da bissetriz externa.

Exercícios Resolvidos

3. Na figura, AS é bissetriz interna do triângulo ABC, calcule o valor de x.

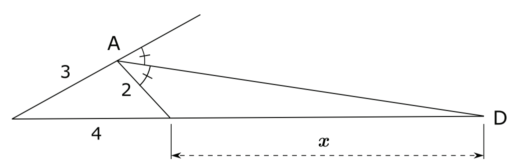


Solução:

Usando TBI vem:

$$\frac{6}{9} = \frac{x+6}{5x} \Rightarrow 30x = 9x + 54 \Rightarrow 21x = 54 \Rightarrow x = \frac{54}{21} = \frac{18}{7}.$$

4. Na figura, AD é bissetriz externa do ângulo $\widehat{A}$. Calcule x.



Solução:

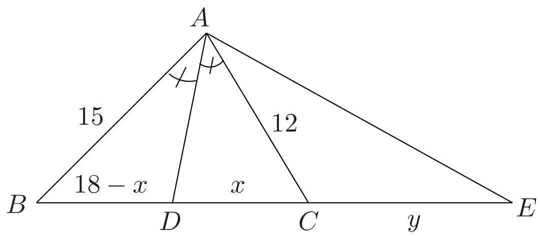
Usando TBE vem:

$$\frac{x+4}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x = 2x + 8 \Rightarrow x = 8.$$

5. Os lados de um triângulo medem 12 cm, 15 cm e 18 cm. Do vértice oposto ao lado de maior medida tracem-se as bissetrizes interna e externa. Calcule a distância entre os pés dessas bissetrizes.

Solução:

Seja ABC o triângulo onde $\overline{BC} = 18$, $\overline{AB} = 15$ e $\overline{AC} = 12$, AD e AE são as bissetrizes interna e externa, como na figura.



Calculemos $\overline{DC} = x$ e $\overline{CE} = y$. Pelo TBI vem:

$$\frac{18-x}{x} = \frac{15}{12} \quad \Rightarrow \quad 15x = 216 - 12x \quad \Rightarrow \quad 27x = 216 \quad \Rightarrow \quad x = 8\,.$$

Pelo TBE vem:

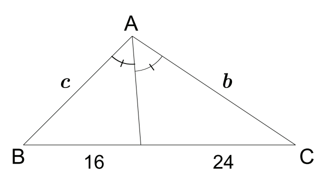
$$\frac{18+y}{y} = \frac{15}{12} \quad \Rightarrow \quad 15y = 216 + 12y \quad \Rightarrow \quad 3y = 216 \quad \Rightarrow \quad y = 72\,.$$

Logo, a distância entre as duas bissetrizes são $x + y = 8 + 72 = 80$ cm.

6. O perímetro de um triângulo é 100 metros. A bissetriz do ângulo interno A divide o lado oposto em dois segmentos de 16 metros e 24 metros. Determine os lados desse triângulo.

Solução:

Considere o triângulo ABC de perímetro 100 e $\overline{BC} = 40$, como na figura.



De $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ vem:

$$\begin{cases} a + b + c = 100 \\ a = 16 + 24 \\ \dfrac{16}{24} = \dfrac{c}{b} \ \text{(TBI)} \end{cases} .$$

Daí, $b + c = 100 - 40 = 60$

$$\begin{cases} b + c = 60 \\ \dfrac{c}{b} = \dfrac{16}{24} \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 60 - b \\ \dfrac{c}{b} = \dfrac{16}{24} \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2) vemos:

$$\frac{60-b}{b} = \frac{16}{24} \Rightarrow b = 36\,. \qquad (3)$$

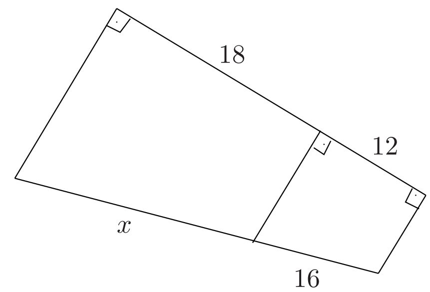
Substituindo (3) em (1) vem:

$$c = 60 - 36 = 24\,.$$

Os lados do triângulo são 36, 24 e 40.

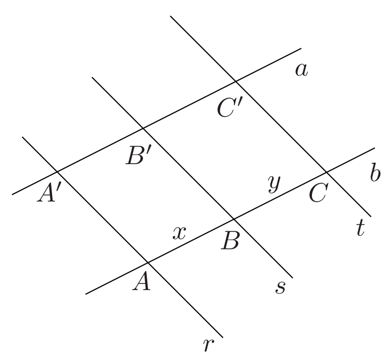
Exercícios Propostos

1. Na figura, calcule o valor de x.

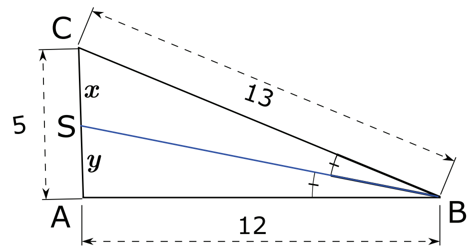


2. Um feixe de quatro paralelas determina sobre uma transversal três segmentos que medem 5 cm, 6 cm e 9 cm, respectivamente. Determine os comprimentos dos segmentos que este mesmo feixe determina sobre uma outra transversal, sabendo que o segmento compreendido entre a primeira e quarta paralelas mede 60 cm.

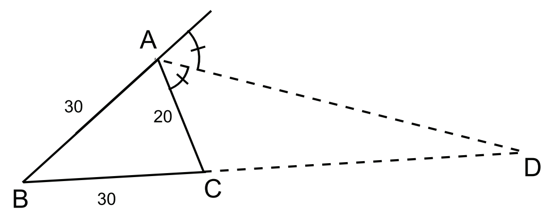
3. Na figura, $r//s//t$. Determine as medidas de x e y sabendo que são proporcionais a 3 e 4, respectivamente. O segmento $\overline{A'C'}$ mede 70 cm e as retas a e b são paralelas.



4. Na figura, calcule os valores de x e y, respectivamente, sendo $\overline{BS}$ a bissetriz interna do ângulo B.



5. Na figura, sendo $\overline{AD}$ bissetriz externa do ângulo A, calcule $\overline{CD}$.



6. Os lados de um triângulo ABC medem 10 cm, 12 cm e 18 cm. Do vértice oposto ao lado de maior medida traçam-se as bissetrizes internas e externas dos ângulos correspondentes. Calcule a distância entre os pés das bissetrizes.

Gabarito

1. $x = 24$

2. Os comprimentos são 15 cm, 18 cm e 27 cm, respectivamente.

3. $\begin{cases} x = 30 \\ y = 40 \end{cases}$

4. $x = \dfrac{13}{5}$ e $y = \dfrac{12}{5}$

5. $\overline{CD} = 60$

6. $\dfrac{1080}{11}$ cm.