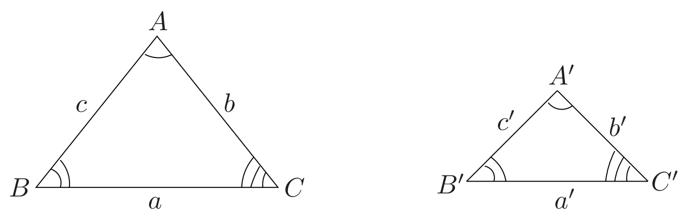
Aula 9 – Triângulos Semelhantes

Definição: Dois triângulos são semelhantes se os três ângulos são ordenadamente congruentes e se os lados homólogos são proporcionais.

A figura mostra dois triângulos ABC e $A'B'C'$ semelhantes. Lados homólogos são lados opostos a ângulos ordenadamente congruentes.



Os triângulos ABC e $A'B'C'$ da figura são semelhantes.

$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ temos que os lados a e a' são homólogos

$\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$ temos que os lados b e b' são homólogos

$\widehat{C} \equiv \widehat{C'}$ temos que os lados c e c' são homólogos

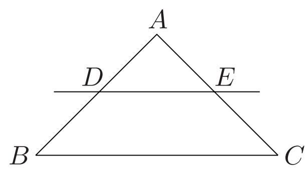
Vértices homólogos são os vértices de ângulos ordenadamente congruentes.
Razão de semelhança é a razão de dois lados homólogos quaisquer.

Temos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ se $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$ e também $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$; k é a razão de semelhança.

Teorema Fundamental: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e encontra os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

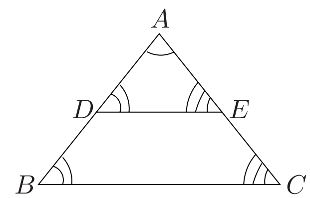
Prova:

Seja $\overleftrightarrow{DE}$ a reta paralela ao lado BC do triângulo ABC. Vamos provar que $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.



Para provarmos essa semelhança, precisamos provar que eles tem ângulos ordenadamente congruentes e lados homólogos proporcionais.

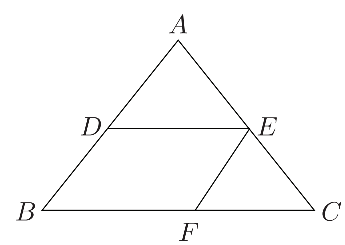
1) Os três ângulos ordenadamente congruentes.



De fato,

$$\begin{cases} \widehat{A} & \equiv & \widehat{A} \text{ (comum)} \\ \widehat{D} & \equiv & \widehat{B} \text{ (correspondentes)} \\ \widehat{E} & \equiv & \widehat{C} \text{ (correspondentes)} \end{cases}$$

2) Os lados homólogos são proporcionais.



De fato, pela hipótese, temos

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} \quad (1)$$

Tracemos $EF//AB$. Temos:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BC}} \quad (2)$$

Temos que o quadrilátero $DBFE$ é um paralelogramo e, portanto, $\overline{BF} = \overline{DE}$ (3). Substituindo (3) em (2), vem

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} \quad (4)$$

Das relações (1) e (4), temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$$

e os lados homólogos são proporcionais. Logo, os triângulos ADE e ABC são semelhantes.

■

Observação: Dois triângulos congruentes são semelhantes, e a razão de semelhança é $k = 1$.

Exercícios Resolvidos

1. Os três lados de um triângulo ABC medem, respectivamente, 6 cm, 15 cm e 16 cm. Determine os lados de um triângulo $A'B'C'$ semelhante a ABC, sabendo que a razão de semelhança do triângulo ABC para o triângulo $A'B'C'$ é igual a 4.

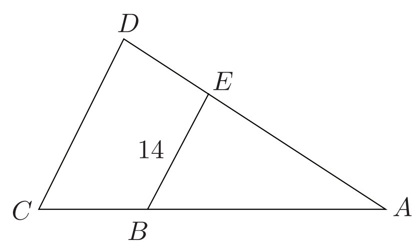
   Solução:

   Temos que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Denominando os lados do $\Delta A'B'C'$ de a', b' e c', vem:

$$\frac{6}{a'} = \frac{15}{b'} = \frac{16}{c'} = 4 \quad \begin{cases} a' = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \\ b' = \dfrac{15}{4} \\ c' = \dfrac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

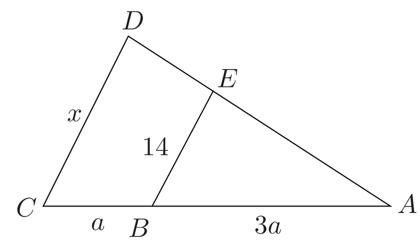
   Logo, os lados do $\Delta A'B'C'$ valem $\frac{3}{2}$, $\frac{15}{4}$ e 4.

2. Na figura, $\overline{AB} = 3\left(\overline{BC}\right)$, $\overline{AE} = 3\left(\overline{DE}\right)$ e $\overline{BE} = 14$. Calcule $\overline{CD}$, sabendo que $\overleftrightarrow{BE} // \overleftrightarrow{CD}$.



Solução:

Seja a figura, sendo $\overline{AB} = 3\left(\overline{BC}\right)$, $\overline{AE} = 3\left(\overline{DE}\right)$ e $\overline{BE} = 14$. Denotemos $\overline{CD} = x$, $\overline{CB} = a$, $\overline{AB} = 3a$.



Temos que $\Delta ABE \sim \Delta ACD$, já que $DC//BE$ (Teorema Fundamental):

$$\frac{x}{4a} = \frac{14}{3a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{56}{3}\,.$$

Logo, $\overline{CD} = \dfrac{56}{3}$.

3. Os lados de um triângulo medem 4 cm, 8 cm e 12 cm. Calcule as medidas dos lados de um triângulo semelhante, cujo perímetro mede 96 cm.

Solução:

Sejam x, y e z as medidas dos lados do triângulo procurado. Temos que $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z}{12}$ (definição) e $x + y + z = 96$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} x+y+z & = & 96 \\ \dfrac{x}{4} & = & \dfrac{y}{8} & = & \dfrac{z}{12} \end{cases}$ usando a propriedade de proporção, vem:

$$\frac{x+y+z}{4+8+12} = \frac{x}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{12}$$

$$\frac{96}{24} = \frac{x}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{12}$$

$$4 = \frac{x}{4} = \frac{y}{8} = \frac{z}{12}$$

$$\Rightarrow \quad x = 16 \text{ cm}, \;\; y = 32 \text{ cm e } z = 48 \text{ cm}.$$

Casos de semelhança entre triângulos

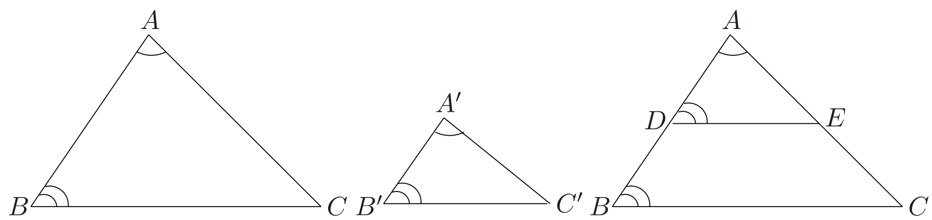
1º caso: AA∼

Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.

Prova:

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$ com $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Vamos provar que $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Se o lado $A'B'$ fosse congruente ao lado AB, os dois triângulos seriam congruentes pelo caso ALA, já que $\begin{cases} \widehat{A} & = & \widehat{A'} \\ \widehat{B} & = & \widehat{B'} \\ \overline{A'B'} & = & \overline{AB} \end{cases}$ e a semelhança estaria verificada ($k = 1$).



Supondo que AB não seja congruente a $A'B'$. Seja $\overline{A'B'} < \overline{AB}$.

Tomemos $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ sobre o lado AB e tracemos $DE//BC$, pelo Teorema Fundamental, vem:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \quad (1)$$

Vamos provar que $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$. Temos que

$$\begin{cases} \widehat{A} & = & \widehat{A'} \text{ (hipótese)} \\ \overline{AD} & = & \overline{A'B'} \text{ (construção)} \\ \widehat{D} & = & \widehat{B} \text{ (correspondentes)} \end{cases}$$

o que implica (ALA) que $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$ (2).

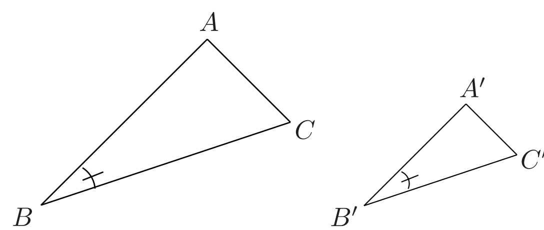
De (1) e (2) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

■

$2^{\underline{o}}$ caso: LAL $\sim$

Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então os triângulos são semelhantes.

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$.

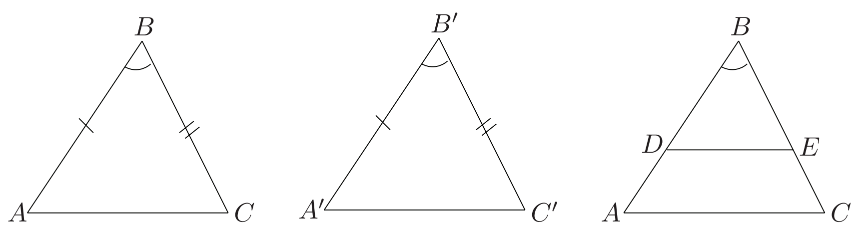


Então:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \widehat{B} & = & \widehat{B'} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} & = & \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'\,.$$

Prova:

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$. Se $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}$ então (LAL) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.



Vamos supor que AB e $A'B'$ não são congruentes e seja $\overline{A'B'} < \overline{AB}$. Tomemos $BD \equiv A'B'$ sobre o lado AB e tracemos DE paralela ao lado AC. Pelo Teorema Fundamental, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta BDE \ (*)$$

Vamos provar que $\Delta BDE \equiv \Delta A'B'C'$.

De fato,

Se $DE//AC$, então $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ (1).

Por construção, $\overline{BD} = \overline{A'B'}$ (2).

De (1) e (2) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ (3), mas, por hipótese, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ (4).

De (3) e (4) $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \ \Rightarrow \ \overline{BE} = \overline{B'C'}$.

Logo:

$$\left\{\begin{array}{lcl} BD & \equiv & A'B' \\ \widehat{B} & \equiv & \widehat{B'} \\ BE & \equiv & B'C' \end{array}\right. \stackrel{LAL}{\Rightarrow} \Delta BDE \equiv \Delta A'B'C' \ \ (**)$$

De $(*)$ e $(**)$ vem que: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

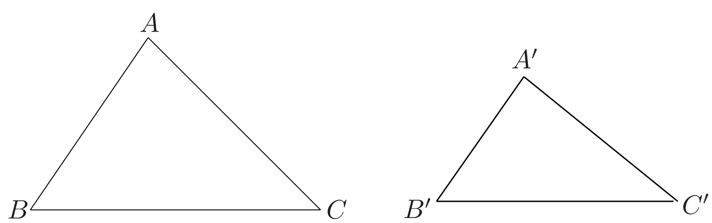
■

3º caso: LLL∼

Se dois triângulos têm os lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ tal que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \ \Rightarrow \ \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

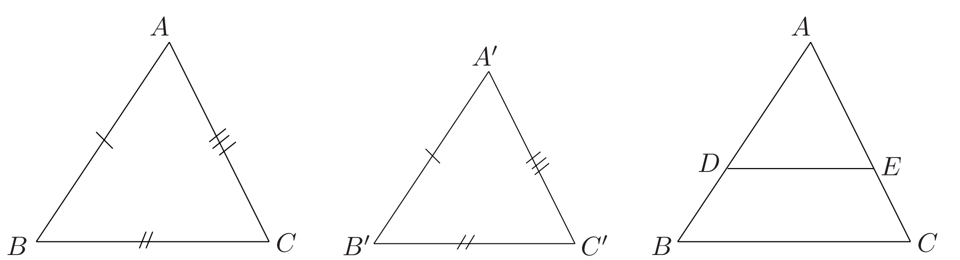


Prova:

Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$, tal que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ (1).

Se os lados AB e $A'B'$ são congruentes, de (1) que $AC \equiv A'C'$ e $BC \equiv B'C'$. Daí, $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ (LLL) e o teorema está provado.

Vamos supor que AB e $A'B'$ não são congruentes. Seja então $\overline{A'B'} < \overline{AB}$. Tomemos $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ sobre o lado AB e tracemos $DE//BC$.



Pelo Teorema Fundamental, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \ \ (1)$$

Vamos provar que $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$.

De (1), vem que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \quad (2)$$

Por construção, $\overline{AD} = \overline{A'B'}$ (3).

De (2) e (3), vem:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \quad (4)$$

Mas, por hipótese, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \quad (5)$

De (4) e (5), vem: $\overline{AE} = \overline{A'C'}$ (6) e $\overline{DE} = \overline{B'C'}$ (7), então

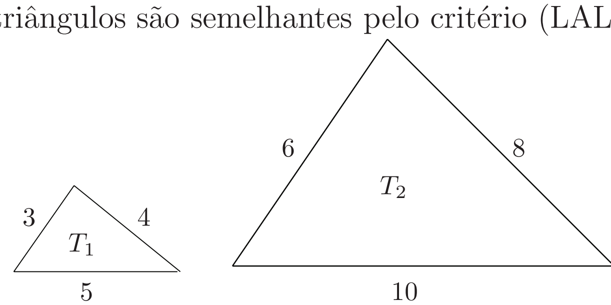
$$\left\{\begin{array}{lcl} AD & \equiv & A'B' \ \text{(construção)} \\ AE & \equiv & A'C' \ (6) \\ DE & \equiv & B'C' \ (7) \end{array}\right. \quad \stackrel{LLL}{\Rightarrow} \quad \Delta ADE \equiv \Delta A'B'C' \ (8)$$

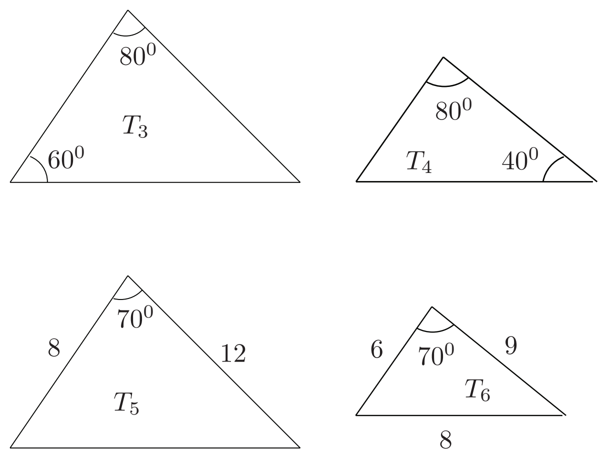
De (1) e (8), vem que: $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$, caso de congruência LLL.

■

Exercícios Resolvidos

1. Associar as alternativas seguintes com pares de triângulos T_1, T_2, $\cdots$, abaixo.
   a) Os triângulos são semelhantes pelo critério (AA∼)
   b) Os triângulos são semelhantes pelo critério (LLL∼)
   c) Os triângulos são semelhantes pelo critério (LAL∼)





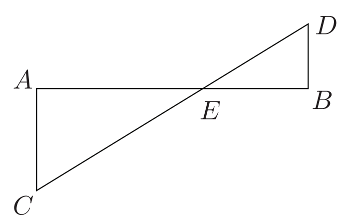
Solução:

1) $T_1 \sim T_2$ (b) (critério LLL$\sim$) já que: $\dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{5}{10}$.

2) $T_3 \sim T_4$ (a) (critério AA$\sim$) pois o terceiro ângulo do triângulo T_3 é: $180^0 - 60^0 - 80^0 = 40^0$ e daí temos nesses dois triângulos dois ângulos congruentes, que são 80^0 e 40^0.

3) $T_5 \sim T_6$ (c) (critério LAL$\sim$) já que: $\dfrac{8}{6} = \dfrac{12}{9}$, e o ângulo compreendido entre esses dois lados é congruente a (70^0).

2. Na figura, $AC//BD$, e os pontos C, D e E são co-lineares. Sabendo que $\overline{AE} = 14$ cm, $\overline{AC} = 18$ cm e $\overline{BE} = 10$ cm, calcule a medida do lado BD.



Solução:

Temos que:

$$A\widehat{E}C \equiv B\widehat{E}D \qquad \text{(ângulos opostos pelo vértice)}$$

$$B\widehat{D}E \equiv A\widehat{C}E \qquad \text{(alternos internos)}$$

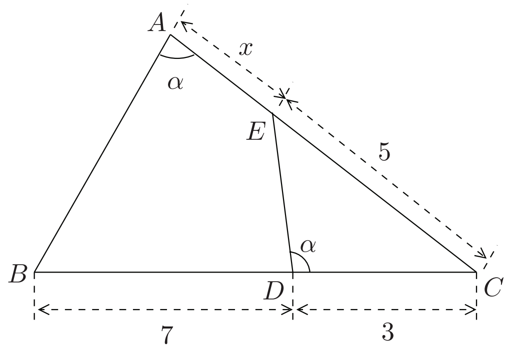
$$\underset{\text{AA}\sim}{\Longrightarrow}$$

$$\Delta BDE \sim \Delta ACE\,.$$

Portanto:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}} \Rightarrow \frac{\overline{BD}}{18} = \frac{10}{14} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{90}{7} \text{ cm}.$$

3. Com os dados da figura, calcule x.



Solução:

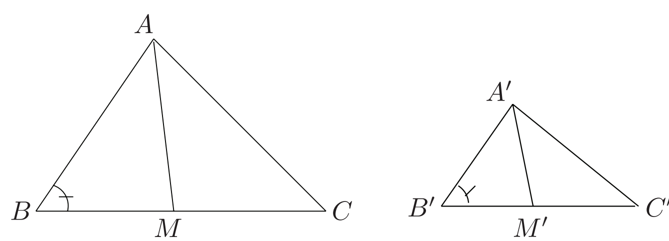
$$\Delta ABC \sim \Delta CDE, \text{ pois } \begin{cases} E\widehat{D}C = B\widehat{A}C = \alpha \\ \widehat{C} \text{ é comum} \end{cases}.$$

Temos então o $1^{\underline{o}}$ caso de semelhança. Logo:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{3}{5+x} \Rightarrow 30 = 25 + 5x \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1.$$

4. Considere dois triângulos semelhantes ABC e $A'B'C'$, de razão k e medianas homólogas AM e $A'M'$. Mostre que $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}} = k$.

Solução:



Seja $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, de razão k e medianas homólogas AM e $A'M'$.
Então:

$$\begin{cases} (1) \quad \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \text{ (ângulos homólogos)} \\ (2) \quad \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = k \end{cases}$$

De (2) vem:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{\frac{1}{2}\overline{B'C'}} = k \Rightarrow \frac{\overline{BM}}{\overline{B'M'}} = k.$$

Daí, temos que:

$$\begin{cases} \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{B'M'}} = k \end{cases} \overset{LAL\sim}{\Rightarrow} \Delta ABM \sim \Delta A'B'M' .$$

Logo:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}} = k .$$

Observação:

Em dois triângulos semelhantes, se a razão de semelhança é k, então:

A razão entre os perímetros é k

A razão entre as alturas homólogas é k

A razão entre as bissetrizes internas homólogas é k

A razão entre os raios dos círculos inscritos é k

A razão entre os raios dos círculos circunscritos é k

$\vdots$

A razão entre dois elementos lineares homólogos é k .

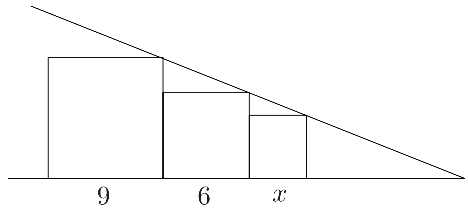
5. Dois triângulos semelhantes têm perímetros 60 cm e 48 cm. Quanto mede a altura do primeiro, sabendo-se que a altura homóloga do segundo mede 9 cm?

Solução:

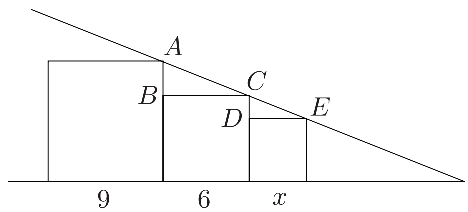
Considere dois triângulos semelhantes, cujos perímetros são 60 cm e 48 cm. Pela observação, temos que $\dfrac{60}{48} = \dfrac{h}{9}$, onde h é a altura homóloga do primeiro triângulo. Então:

$$h = \frac{9 \cdot 60}{48} = \frac{45}{4} \;\Rightarrow\; h = \frac{45}{4} \text{ cm} .$$

6. Na figura a seguir, consideremos os quadrados de lados x, 6 e 9. Determine o perímetro do quadrado de lado x.



Solução:



Considere na figura os quadrados de lados x, 6 e 9.

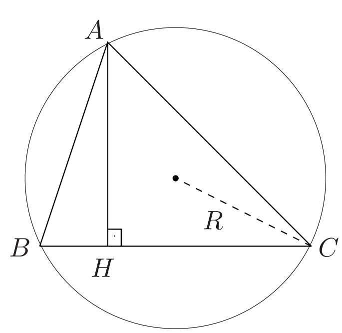
Temos $\Delta ABC \sim \Delta CED$, pois $\left\{\begin{array}{l} \widehat{B} \equiv \widehat{D} \equiv 90^0 \\ B\widehat{A}C \equiv D\widehat{C}E \end{array}\right.$ (AA $\sim$).

Então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \Rightarrow \frac{9-6}{6-x} = \frac{6}{x} \Rightarrow 3x = 6(6-x) \Rightarrow 3x = 36 - 6x \Rightarrow$$

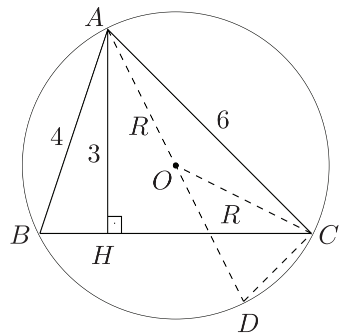
$$\Rightarrow 9x = 36 \Rightarrow x = 4.$$

7. Calcular R, raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC da figura, sendo $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$ e $\overline{AH} = 3$.



Solução:

Seja a figura dada, com $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$ e $\overline{AH} = 3$.



Trace o diâmetro AD. Temos que $\Delta ABH \sim \Delta ACD$, pois:

$$\begin{cases} A\widehat{H}B = 90^0 = A\widehat{C}D & \text{(ângulo inscrito e note que } AD \text{ é diâmetro)} \\ A\widehat{B}H = A\widehat{D}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} & \text{(ângulo inscrito)} \end{cases}$$

(caso AA$\sim$). Então:

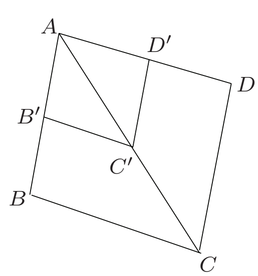
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{4}{2R} = \frac{3}{6} \Rightarrow 6R = 24 \Rightarrow R = 4\,.$$

Polígonos Semelhantes

Definição: Dois polígonos quaisquer com um mesmo número de lados são semelhantes se têm ordenadamente congruentes todos os ângulos e os lados homólogos proporcionais.

Exemplo:

Considere um quadrilátero qualquer $ABCD$ e um ponto B' sobre o lado AB, conforme a figura.



Tracemos as diagonais de um mesmo vértice e os segmentos $B'C'$ e $C'D'$, respectivamente paralelos a BC e CD.

Temos assim o paralelogramo $AB'C'D'$. Os quadriláteros $ABCD$ e $AB'C'D'$ são semelhantes pois têm:

a) $\widehat{A} = \widehat{A}, \widehat{B} = \widehat{B'}, \widehat{C} = \widehat{C'}$ e $\widehat{D} = \widehat{D'}$

b) $\dfrac{\overline{AB}}{AB'} = \dfrac{\overline{BC}}{B'C'} = \dfrac{\overline{CD}}{C'D'} = \dfrac{\overline{DA}}{D'A}$ pela construção de paralelas.

Observação:

A notação para os polígonos semelhantes é análoga à dos triângulos semelhantes. Assim,

B e B' são vértices homólogos;

AB e AB' são lados homólogos;

$\dfrac{\overline{AB}}{AB'} = k$ é a razão de semelhança.

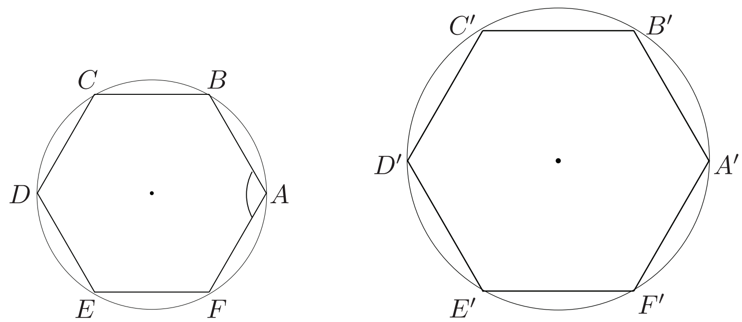
Teorema: Dois polígonos regulares de mesmo número de lados são semelhantes.

Prova:

Considere os dois polígonos regulares de p e p'. Vamos mostrar que p e p' têm seus ângulos ordenadamente congruentes e seus lados homólogos proporcionais.

1º: Em cada um desses polígonos, cada ângulo interno mede $\dfrac{180^0(n-2)}{n}$, e daí todos os ângulos são ordenadamente congruentes e em particular congruentes entre si.

$2^{\underline{o}}$. Os lados AB, BC, CD, $\cdots$ do primeiro polígono são congruentes entre si, o mesmo ocorrendo com os lados $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $\cdots$ do segundo polígono.



Daí:

$$\frac{\overline{AB}}{A'B'} = \frac{\overline{BC}}{B'C'} = \frac{\overline{CD}}{C'D'} = \ldots = k\,.$$

Daí, $p \sim p'$

■

8. A razão entre os perímetros de dois hexágonos regulares é $\frac{1}{4}$. Sabendo-se que o lado maior de um dos hexágonos mede 45 cm, calcule a medida do lado menor.

Solução:

Seja x a medida do lado que queremos. Os polígonos regulares são semelhantes, então à razão entre os perímetros é igual à razão entre os lados homólogos.

$$\frac{x}{45} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x = \frac{45}{4}\,.$$

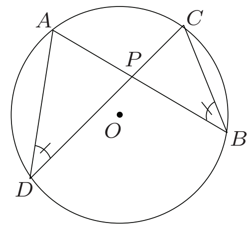
Daí, o lado menor é $\frac{45}{4}$ cm.

Relações métricas em um círculo

Teorema das cordas: Se duas cordas se encontram, então o produto das medidas dos dois segmentos de uma é igual ao produto das medidas dos segmentos da outra.

Prova:

Sejam as cordas AB e CD que se encontram em P no círculo.



Temos que $\Delta PAD \sim \Delta PCB$, pois:

$$\begin{cases} A\widehat{P}D \equiv C\widehat{P}B & \text{(opostos pelo vértice)} \\ A\widehat{D}P \equiv P\widehat{B}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} & \text{(ângulo inscrito)} \end{cases}$$

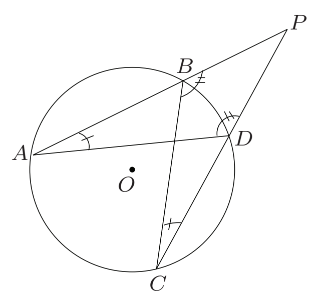
(caso AA$\sim$). Então:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

■

Teorema das Secantes: Se de um ponto exterior a um círculo traçamos duas secantes, então o produto das medidas de uma secante por sua parte exterior é igual ao produto das medidas da outra pela sua parte exterior.

Prova:



Sejam as secantes PA e PC que se encontram em P. Ligue os pontos A com D e B com C. Temos que $\Delta PAD \sim \Delta PCB$, pois:

$$\begin{cases} \widehat{P} \;\; \text{(comum)} \\ P\widehat{A}D = B\widehat{C}P = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{2} \;\; \text{(ângulo inscrito)} \end{cases}$$

(caso AA$\sim$). Então:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}.$$

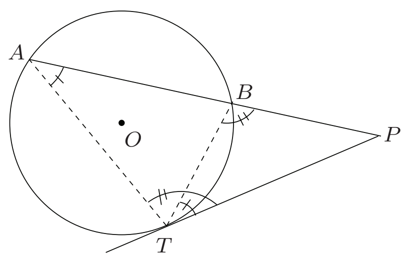
■

Teorema: Se de um ponto exterior a um círculo traçamos uma tangente e uma secante, então a medida do segmento da tangente é média geométrica entre as medidas do segmento da secante.

Nota: Dados os números reais positivos a e b, chama-se média geométrica entre a e b o número x positivo tal que $x^2 = ab$.

Prova:

Seja P exterior a um círculo, PA secante e PT tangente ao círculo.



Ligue os pontos A e B ao ponto T, conforme a figura.

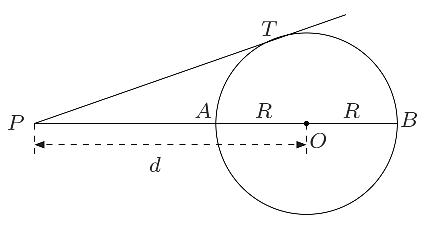
Temos que $\Delta PAT \sim \Delta PTB$, pois:

$$\begin{cases} \widehat{P} \text{ (comum)} \\ B\widehat{A}T = B\widehat{T}P = \dfrac{\overset{\frown}{BT}}{2} \text{ (ângulo inscrito e de segmento)} \end{cases}$$

(caso AA$\sim$). Então:

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \Rightarrow \overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}\,.$$

Nota: No caso de a secante passar pelo centro do círculo e sendo d a distância de P ao centro do círculo e R o raio desse círculo, temos:



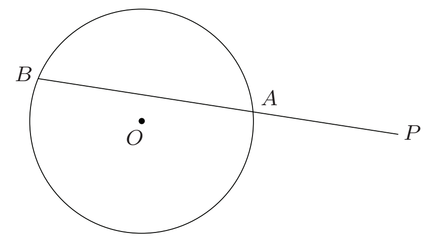
$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = (d - R)(d + R) \Rightarrow \overline{PT}^2 = d^2 - R^2\,.$$

■

Potência de um ponto em relação a um círculo

Consideremos em um plano uma circunferência e um ponto P, o qual poderá ser exterior ou interior a ela, ou mesmo pertencer à circunferência.

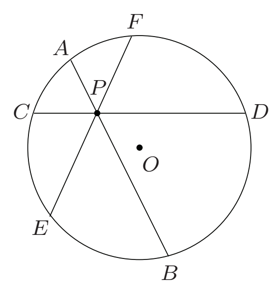
Por P traçamos uma reta que encontra a circunferência em dois pontos distintos A e B.



> **Definição:** O produto $PA \cdot PB$ é denominado potência do ponto P em relação ao círculo de centro O. Notação: $\text{Pot}_O P$

.

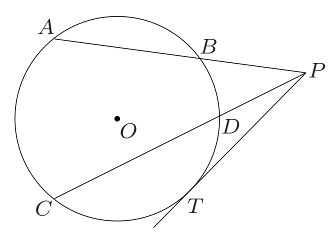
Considere a figura a seguir.



Temos:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PE} \cdot \overline{PF} = \text{ constante (Teorema das Cordas)}.$$

Considere, agora, a figura a seguir.



Temos:

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PT}^2 = \text{ constante (teorema anterior)}.$$

Nota:

Sabemos que $\overline{PT}^2 = d^2 - R^2$, onde d é a distância de um ponto ao centro do círculo de raio R, situado no mesmo plano. Então:

1) A potência de P em relação ao círculo será positiva se $d > R$, pois:

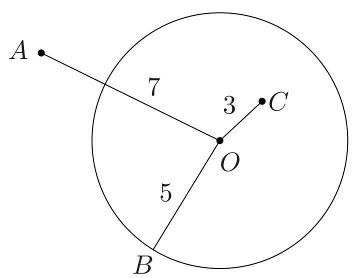
$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 = d^2 - R^2 = \mathrm{Pot}_\mathrm{O} P\,.$$

2) A potência de P em relação ao círculo é negativa se $d < R$.

3) A potência de P em relação ao círculo é nula se $d = R$.

4) A potência de P em relação ao círculo é mínima se $d = 0$.

9. Considere a figura. Calcule $\mathrm{Pot}_\mathrm{O} A + \mathrm{Pot}_\mathrm{O} B + \mathrm{Pot}_\mathrm{O} C$.



Solução:

Temos que $\mathrm{Pot}_\mathrm{O} R = d^2 - R^2$.

$$\mathrm{Pot}_\mathrm{O} A = 7^2 - 5^2$$

$$\mathrm{Pot}_\mathrm{O} B = 5^2 - 5^2$$

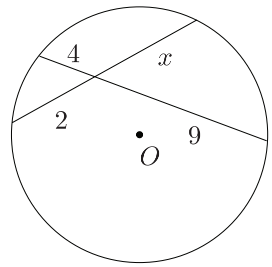
$$\mathrm{Pot}_\mathrm{O} C = 3^2 - 5^2$$

o que implica

$$\begin{aligned} \mathrm{Pot}_\mathrm{O} A + \mathrm{Pot}_\mathrm{O} B + \mathrm{Pot}_\mathrm{O} C &= 7^2 - 5^2 + 5^2 - 5^2 + 3^2 - 5^2 \\ &= 49 - 25 + 9 - 25 \\ &= 8\,. \end{aligned}$$

10. Calcule x nas figuras a seguir:

a)

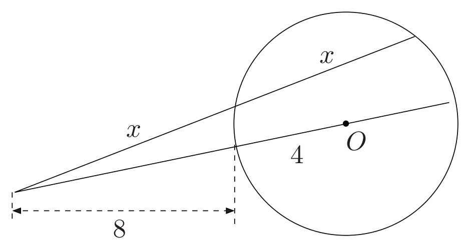


Solução:

Pelo Teorema das Cordas, vem:

$$2 \cdot x = 4 \cdot 9 \quad \Rightarrow \quad x = 18\,.$$

b)

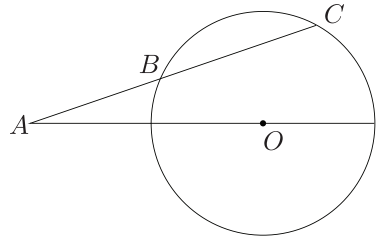


Solução:

Pelo Teorema das Secantes, vem:

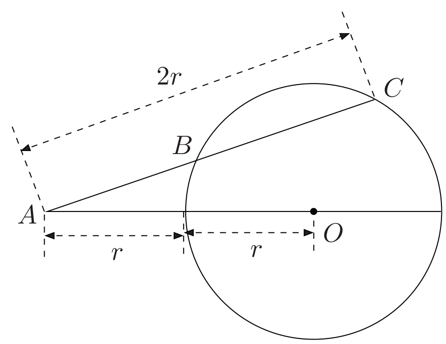
$$x \cdot 2x = 8 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 8 \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad x = 8\,.$$

11. Na figura, ABC representa um trecho reto de uma estrada que cruza o pátio circular de centro O e raio r. Se $\overline{AC} = 2r = \overline{AO}$, determine a medida de BC em função da medida de AB.



Solução:

Considere a figura, com $\overline{AC} = 2r = \overline{AO}$.



Denominando $\overline{AB} = x$, vem:

Usando o Teorema das secantes,

$$x \cdot 2r = r \cdot 3r \;\Rightarrow\; x = \frac{3r}{2}\,.$$

Temos que:

$$\overline{BC} = 2r - \frac{3r}{2} = \frac{r}{2}\,.$$

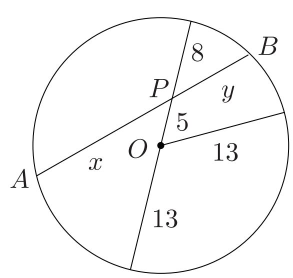
Logo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{3r}{2}}{\frac{r}{2}} = 3 \;\Rightarrow\; \overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{3}\,.$$

12. O ponto P está no interior de uma circunferência de 13 cm de raio e dista 5 cm do centro da mesma. Pelo ponto P, traça-se a corda AB de 25 cm. Determine os comprimentos que P determina sobre a corda AB.

Solução:

Temos que P está no interior de uma circunferência de 13 cm de raio e dista 5 cm do centro da mesma e a corda $\overline{AB} = 25$.



Vamos denominar $\overline{AP} = x$ e $\overline{PB} = y$. Então, usando o Teorema das Cordas, vem:

$$18 \cdot 8 = x \cdot y \;\text{ e }\; x + y = \overline{AB} = 25\,.$$

Daí,

$$\begin{cases} xy & = & 144 \ (1) \\ x+y & = & 25 \ (2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 25 - y \ (3)\,.$$

Substituindo (3) em (1), vem:

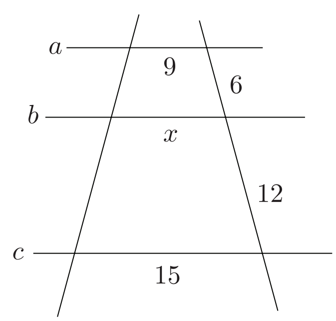
$$\begin{aligned}(25-y)y = 144 \quad &\Rightarrow \quad y^2 - 25y + 144 = 0 \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{25 \pm \sqrt{625-576}}{2} \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{25+7}{2} = 16 \ \text{ ou } \ y = \frac{25-7}{2} = 9\end{aligned}$$

Assim, $x = 25 - 16 = 9$ ou $x = 25 - 9 = 16$.

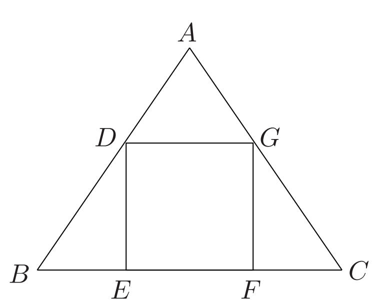
Logo, os comprimentos pedidos são 16 cm e 9 cm.

Exercícios Propostos

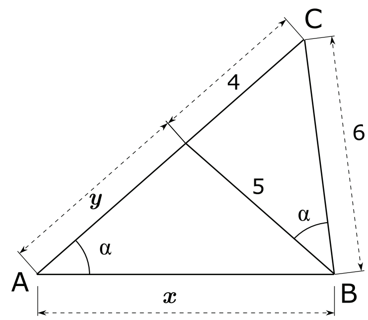
1. Calcule o valor de x na figura, sabendo que r e s são transversais que cortam as paralelas a, b e c.



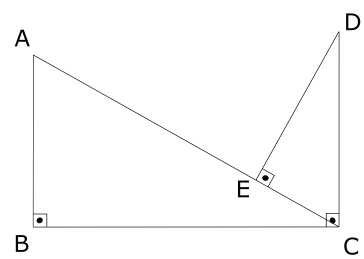
2. A figura mostra um quadrado $DEFG$ inscrito em um triângulo ABC. Sabendo que a base BC mede 15 cm e que a altura relativa a essa base mede 10 cm, calcule a medida do lado desse quadrado.



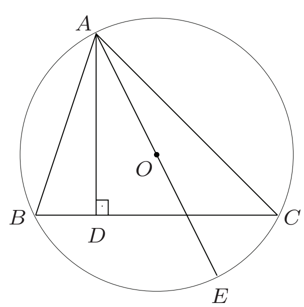
3. No triângulo ABC da figura, calcule os valores de x e y.



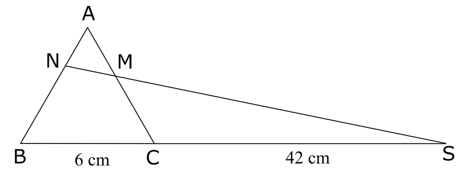
4. Na figura temos $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 16$, $\overline{AC} = \sqrt{337}$ e $\overline{EC} = 5$. Determine $\overline{DE}$ e $\overline{CD}$.



5. Calcule a altura $\overline{AD}$ do triângulo ABC inscrito na circunferência de centro O e de diâmetro $\overline{AE} = 7,5$ cm e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medindo, respectivamente, 5 cm e 6 cm.



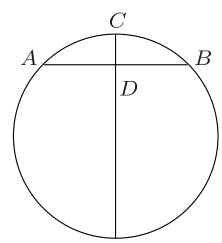
6. Na figura, ABC é um triângulo eqüilátero de lado 6 cm e M é o ponto médio do lado $\overline{AC}$. Calcule o segmento $\overline{NB}$.



7. As bases de um trapézio medem 4 m e 6 m, respectivamente, e a altura mede 8 m. Calcule a que distância da base maior cortam-se as diagonais.

8. Mostre que, em um paralelogramo, dois lados consecutivos são inversamente proporcionais às alturas correspondentes.

9. Se, no círculo da figura, $\overline{AB}$ vale 10, $\overline{CD}$ vale 2, $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{CD}$ e D é o ponto médio de $\overline{AB}$, calcule o diâmetro do círculo.



10. Por um ponto P distante 9 cm do centro de um círculo de 7 cm de raio, traça-se a secante PBC ao círculo de modo que $\overline{PB}$ vale a metade de $\overline{PC}$. Calcule o comprimento do segmento $\overline{PC}$.

Gabarito

1. 11.
2. 6.
3. $x = \dfrac{15}{2}$, $y = 5$.
4. $\overline{DE} = \dfrac{80}{9}$, $\overline{CD} = \dfrac{5\sqrt{337}}{9}$.
5. 4.
6. $\overline{NB} = 3,2$ cm.
7. 4,8 metros.
8. demonstração.
9. $\dfrac{29}{2}$.
10. 8.