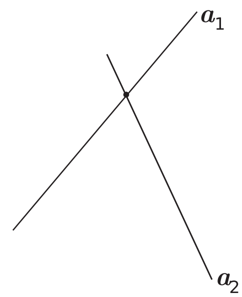
Exercícios Resolvidos

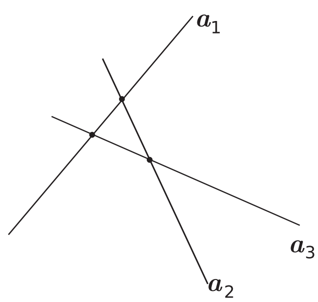
Exercício 1: Cinco retas distintas em um plano cortam-se em n pontos. Determine o maior valor que n pode assumir.

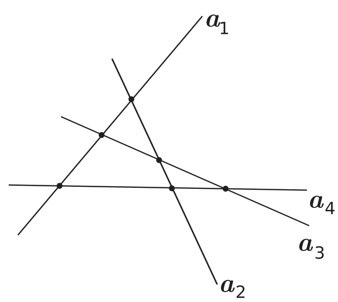
Solução:

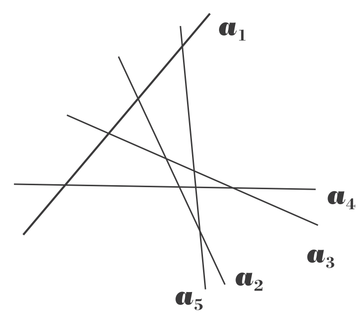
Considere a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 as cinco retas.
Como queremos o maior valor que n pode assumir, então a segunda reta deve cortar a primeira.
Observe a figura ao lado:



A terceira reta deve cortar as duas primeiras e assim por diante.







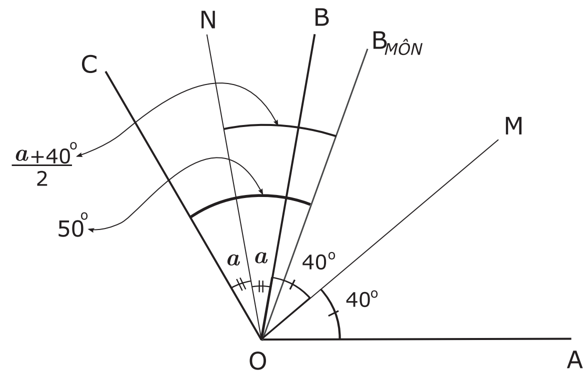
Daí, temos que o número de pontos será :

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

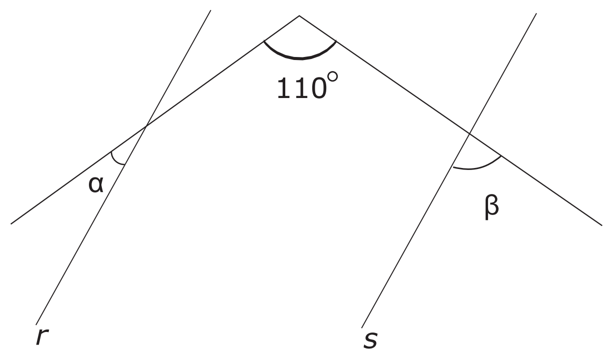
Exercício 2: As bissetrizes de dois ângulos adjacentes $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são, respectivamente, OM e ON. A bissetriz do ângulo $M\hat{O}N$ forma $50°$ com OC. Se a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é $80°$, determine o valor da medida do ângulo $B\hat{O}C$.

Solução: Considere os ângulos adjacentes $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ e a s bissetrizes OM e ON de $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, respectivamente. A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é $80°$, ou seja, $m(A\hat{O}B) = 80°$.

Denomine $m(B\hat{O}C) = 2a$.
Achando a bissetriz de $M\hat{O}N$, temos que esta faz $50°$ com OC.
Daí, temos que $a + \dfrac{a + 40°}{2} = 50° \Rightarrow 2a + a + 40° = 100° \Rightarrow 3a = 60° \Rightarrow a = 20°$
Logo $m(B\hat{O}C) = 2a = 2 \cdot 20° = 40°$.



Exercício 3: Considere a reta r paralela a reta s, $r \parallel s$, na figura abaixo.

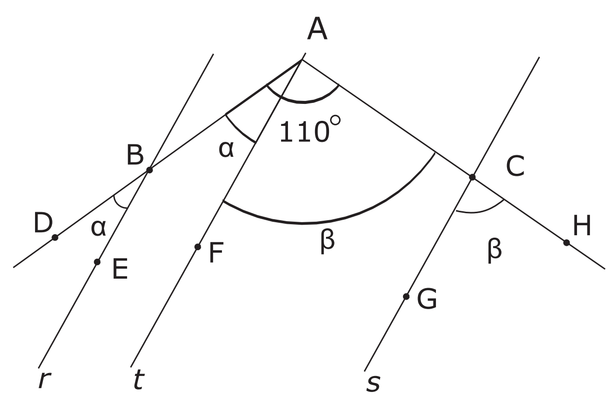


Determine $\alpha + \beta$.

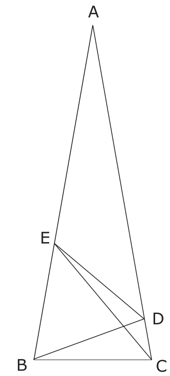
Solução:

Considere a figura dada e $r \parallel s$. Seja *A, B, C, D, E, F, G* e *H* na figura dada.
Seja a reta $t \parallel r$ passando por *A* e *F*$\in t$.
Temos que:
$D\hat{B}E = \alpha = B\hat{A}F$ (ângulos correspondentes)
$G\hat{C}H = \beta = F\hat{A}C$ (ângulos correspondentes)
Daí

$$\alpha + \beta = 110^\circ$$

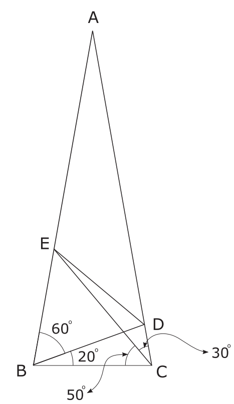


Exercício 4:



Seja a figura ao lado e considere:
AB= *AC*, *m(E$\hat{B}$D)*$=60^o$, *m(B$\hat{C}$E)*$=50^o$ e *m(D$\hat{C}$E)*$=30^o$.
Determine a medida do ângulo B$\hat{D}$E.

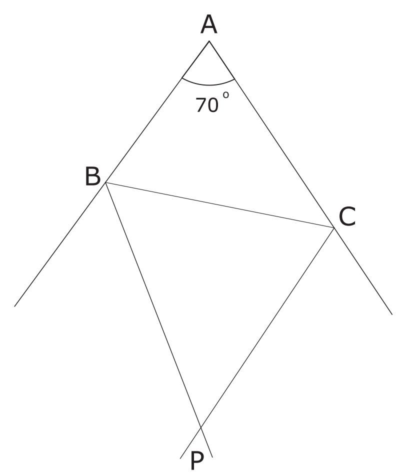
Solução:



Considere a figura dada e que *AB* $=$ *AC*, *m(E$\hat{B}$D)* $= 60^o$, *m(B$\hat{C}$E)* $= 50^o$ e *m(D$\hat{C}$E)* $= 30^o$.
Como *AB* $=$ *AC*, então *m(A$\hat{B}$C)* $=$ *m(A$\hat{C}$B)*$=80^o$
Temos que ΔCBD é isósceles, já que *m(B$\hat{D}$C)* $= 80^o$. Então *BC* $=$ *BD*.
Temos que ΔBCE é isósceles, já que *m(B$\hat{E}$C)* $= 50^o$. Então *BC* $=$ *BE*.
Logo *BD* $=$ *BE* e *m(D$\hat{B}$E)* $= 60^o$, então ΔBED é equilátero, já que se *X* $=$ *m(B$\hat{D}$E)* $=$ *m(B$\hat{E}$D)*.
Temos que $X + X + 60^o = 180^o \Rightarrow X = 60^o$
Logo *m(B$\hat{D}$E)*$=60^o$

Exercício 5:

Na figura ao lado, *P* é a interseção das bissetrizes externas em *B* e *C*. Calcule a medida do ângulo *B$\hat{P}$C*, sabendo que a medida do ângulo *$\hat{A}$* é 70^o.

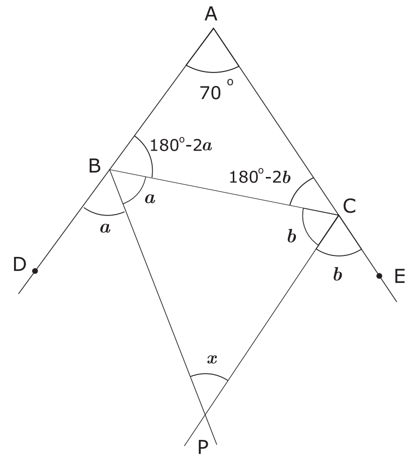


Exercício 6: Num polígono regular convexo *ABCDE...*, o ângulo *B$\hat{A}$D* mede 18°. Calcule o número de lados do polígono.
Solução: Seja o polígono regular convexo *ABCDE...* e considere *m(B$\hat{A}$D)* $= 18^\circ$.

Temos que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$ e que Δ *ABC* $=$ Δ *BCD* pois :

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{BC} \text{ comum (LAL)} \\ m(A\hat{B}C) = m(B\hat{C}D) \text{ (ângulo interno do polígono)} \end{cases}$$

Solução:



Seja a figura dada e considere *P* a interseção das bissetrizes externas em *B* e em *C* e *m(Â)* $= 70°$.
Seja *m(D$\hat{B}$P)*$= a$, *m(P$\hat{C}$E)*$= b$ e *m(B$\hat{P}$C)*$= x$.
Então

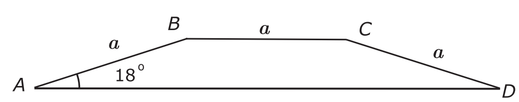
$$\begin{cases} a+b+x = 180° & (1) \\ 180° - 2a + 180° - 2b + 70° = 180° & (2) \end{cases}$$

De (2) vem: $250° = 2a + 2b \Rightarrow a + b = 125°$ (3)
Substituindo (3) em (1) vem,

$$125° + x = 180° \Rightarrow x = 55°$$

Portanto *m(B$\hat{P}$C)*$= 55°$.

então, $\overline{AC} = \overline{BD}$



Temos ainda que Δ *ABD* $=$ Δ *ACD*, pois

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{AC} = \overline{BD} \text{ (LLL)} \\ \overline{AD} \text{ comum} \end{cases}$$

então *m(A$\hat{D}$C)* $=$ *m(B$\hat{A}$D)* $= 18° \Rightarrow$ *m(B$\hat{C}$D)* $= 162°$ (ângulo interno do polígono).
Daí

$$162 = \frac{180(n-2)}{n} \Rightarrow 162n = 180n - 360 \Rightarrow 18n = 360 \Rightarrow n = 20$$

Logo o número de lados é 20.

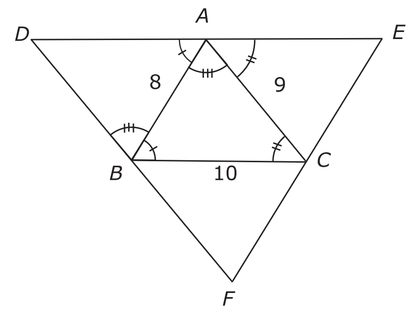
Exercício 7: Os lados de um triângulo medem, respectivamente 8 cm, 9 cm e 10 cm. Calcule o perímetro do triângulo que se obtém traçando-se pelos vértices desse triângulo paralelas aos lados opostos.

Solução:

Seja o triângulo *ABC* de lados 8 cm, 9 cm e 10 cm. Traçando pelos vértices desse triângulo paralelas aos lados opostos, construimos o novo triângulo que vamos denotar por *DEF*.

Como *BC* $\parallel$ *AD* $\Rightarrow$ *D$\hat{A}$B* $=$ *A$\hat{B}$C* e *A$\hat{C}$B* $=$ *C$\hat{A}$E* (alternos internos)

$$AC \parallel BD \Rightarrow B\hat{A}C = D\hat{B}A$$



Daí $B\hat{D}A = B\hat{C}A$ já que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

Logo $\Delta\ ADB = \Delta\ ABC$, pois $\begin{cases} AB \text{ comum} \\ D\hat{A}B = A\hat{B}C \text{ (ALA)} \\ D\hat{B}A = B\hat{A}C \end{cases}$

De forma similar, temos que:

$$\Delta\ BFC = \Delta\ ABC \quad \text{e} \quad \Delta\ AEC = \Delta\ ABC$$

então

$$\overline{DB} = \overline{BF} = 9, \overline{AD} = \overline{AE} = 10, \overline{FC} = \overline{CE} = 8$$

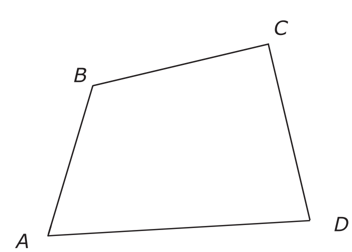
Daí o perímetro desse novo triângulo é:

$$2 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 8 = 54$$

Note que o perímetro deu o dobro do perímetro do triângulo inicial.

Exercício 8: Num quadrilátero convexo, a soma de dois ângulos internos consecutivos mede $190°$. Determine o maior dos ângulos formado pelas bissetrizes internas dos dois outros ângulos.

Solução: Considere um quadrilátero convexo tal que a soma de dois ângulos internos consecutivos mede $190°$. Temos que



$$\hat{A} + \hat{B} = 190° \qquad (1)$$

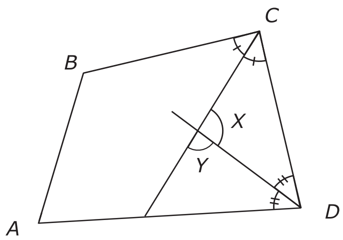
Sabemos que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 180°(4-2) = 360° \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2) vem :

$$\hat{C} + \hat{D} = 360° - 190° = 170°$$

Traçando as bissetrizes interna de $\hat{C}$ e $\hat{D}$ vem:



Denotando os ângulos entre as bissetrizes de X e Y, temos:

$$Y = \frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = \frac{\hat{C}+\hat{D}}{2} = \frac{170^\circ}{2} = 85^\circ$$
$$X + Y = 180^\circ \Rightarrow X = 180^\circ - 85^\circ = 95^\circ$$

Logo o maior dos ângulos é 95°.

Exercício 9: Dois polígonos regulares P_1 e P_2 tem respectivamente n e $n+1$ lados. Sabendo-se que a soma das medidas de um ângulo interno de P_1 com um ângulo externo de P_2 vale 168°, determine o número de diagonais desses polígonos.

Solução: Sejam dois polígonos regulares P_1 e P_2 com n e $n+1$ lados. Temos que:

$$Ai_{P_1} + Ae_{P_2} = 168^\circ \Rightarrow \frac{180(n-2)}{n} + \frac{360}{n+1} = 168^\circ$$

$(180n - 360)(n+1) + 360n = 168n^2 + 168n$

$180n^2 - 360n + 180n - 360 + 360n - 168n^2 - 168n = 0$

$12n^2 + 12n - 360 = 0$

$n^2 + n - 30 = 0$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1+120}}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -6 \text{ (não serve)} \end{cases}$$

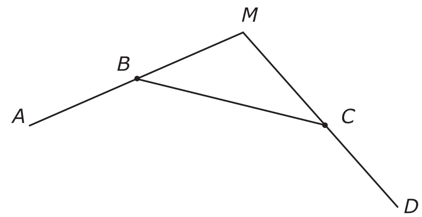
P_1 tem n lados e $n = 5 \Rightarrow d_1 = \dfrac{5(5-3)}{2} = 5$

P_2 tem $n+1$ lados e $n+1 = 6 \Rightarrow d_2 = \dfrac{6(6-3)}{2} = 9$

O número de diagonais é: para P_1, 5 diagonais e para P_2, 9 diagonais.

Exercício 10: Determine a medida do ângulo $B\hat{M}C$ formado pelas retas suportes dos lados AB e CD de um decágono regular da figura abaixo.

Solução: Seja a figura dada. Temos que os ângulos $B\hat{M}C$ e $M\hat{C}B$ são congruentes por serem ângulos externos de um mesmo polígono regular e cada ângulo externo vale $\dfrac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.



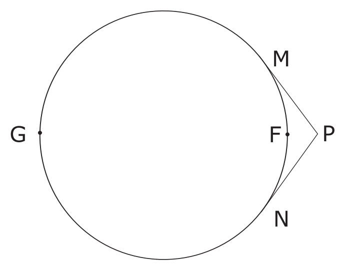
Portanto o Δ *BMC* é isósceles e daí

$$\hat{B} + \hat{M} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 36^\circ + 36^\circ + \hat{M} = 180^\circ \Rightarrow \hat{M} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

Daí

$$m(B\hat{M}C) = 108^\circ$$

Exercício 11: As semi-retas *PM* e *PN* são tangentes ao círculo da figura e o comprimento do arco $\overset{\frown}{MGN}$ é quatro vezes o do arco $\overset{\frown}{MFN}$. Calcule o ângulo $M\hat{P}N$.



Solução:

Considere a figura dada e que o comprimento do arco $\overset{\frown}{MGN}$ é 4 vezes o do arco $\overset{\frown}{MFN}$.
$M\hat{P}N$ é um ângulo excêntrico externo.
Daí

$$M\hat{P}N = \frac{\overset{\frown}{MGN} - \overset{\frown}{MFN}}{2} = \frac{4\,\overset{\frown}{MFN} - \overset{\frown}{MFN}}{2} = \frac{3\,\overset{\frown}{MFN}}{2} \qquad (1)$$

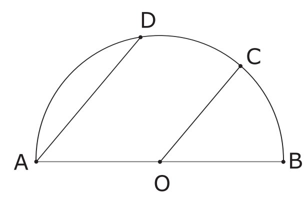
Mas

$$\overset{\frown}{MGN} + \overset{\frown}{MFN} = 360^\circ \Rightarrow 4\,\overset{\frown}{MFN} + \overset{\frown}{MFN} = 360^\circ \Rightarrow 5\,\overset{\frown}{MFN} = 360^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{MFN} = 72^\circ \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) vem:

$$\overset{\frown}{MFN} = \frac{3 \cdot 72}{2} = 108^\circ$$

Exercício 12: Na semicircunferência de centro *O* e diâmetro *AB*, temos que $AD \parallel OC$; sendo *A*, *B*, *C* e *D* quatro pontos distintos. Se $m(\overset{\frown}{BC})$ indica a medida do arco $\overset{\frown}{BC}$ e $m(\overset{\frown}{CD})$ indica a medida do arco $\overset{\frown}{CD}$, relacione essas duas medidas.



Solução:
Seja a semicircunferência de centro O e diâmetro AB com $AD \parallel OC$; sendo A, B, C e D quatro pontos distintos.
Temos que $m(B\hat{O}C) = m(B\hat{A}D)$ (1) (ângulos correspondentes; note que $B\hat{O}C$ é ângulo central e $B\hat{A}D$ é ângulo inscrito).
Temos que :

$$\begin{aligned} m(B\hat{O}C) &= m(\overset{\frown}{BC}) \qquad (2) \\ &e \\ m(B\hat{A}D) &= \frac{m(\overset{\frown}{BD})}{2} \qquad (3) \end{aligned}$$

Substituindo (1) em (3) vem:

$$m(B\hat{O}C) = \frac{m(\overset{\frown}{BD})}{2}$$

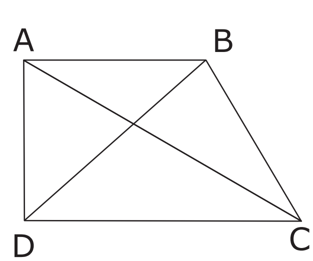
De (2):

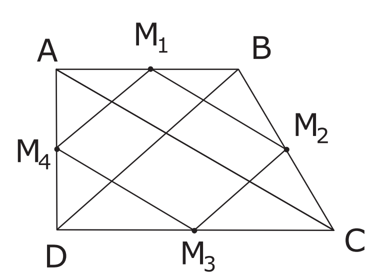
$$m(\overset{\frown}{BC}) = \frac{m(\overset{\frown}{BD})}{2} \Rightarrow m(\overset{\frown}{CD}) = m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{BC}) = 2m(\overset{\frown}{BC}) - m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{BC})$$

Logo

$$m(\overset{\frown}{CD}) = m(\overset{\frown}{BC})$$

Exercício 13: As diagonais de um trapézio retângulo medem, respectivamente 9 cm e 12 cm. Calcule o perímetro do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos médios dos lados desse trapézio.
Solução:
Considere um trapézio retângulo $ABCD$ cujas diagonais medem, respectivamente 9 cm e 12 cm.





Sejam M_1, M_2, M_3 e M_4 os pontos médios de AB, BC, CD e AD, respectivamente.
Temos que :

$$M_1M_4 \text{ é base média do } \Delta\ ABD \Rightarrow M_1M_4 = \frac{9}{2}$$

$$M_2M_3 \text{ é base média do } \Delta\ BCD \Rightarrow M_2M_3 = \frac{9}{2}$$

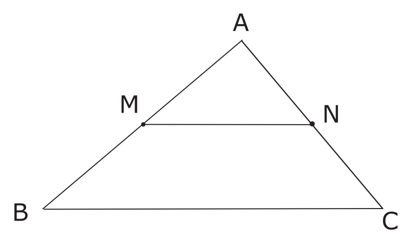
$$M_1M_2 \text{ é base média do } \Delta\ ABC \Rightarrow M_1M_2 = \frac{12}{2}$$

$$M_3M_4 \text{ é base média do } \Delta\ ADC \Rightarrow M_3M_4 = \frac{12}{2}$$

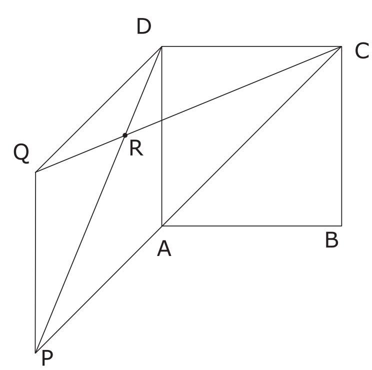
Daí o perímetro pedido é:

$$\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{12}{2} + \frac{12}{2} = 21$$

Nota: Dado um triângulo ABC, considere M ponto médio de AB e N ponto médio de $AC \Rightarrow MN$ é base média, $MN = \frac{BC}{2}$ e $MN \parallel BC$.

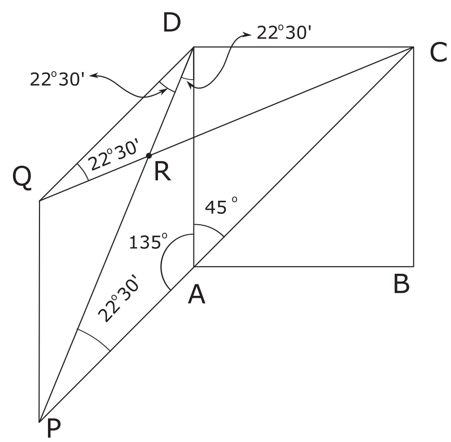


Exercício 14: Considere na figura , $ABCD$ um quadrado e $DAPQ$ um losango cujo vértice P está no prolongamento da diagonal AC. Calcule os ângulos do triângulo DRQ.



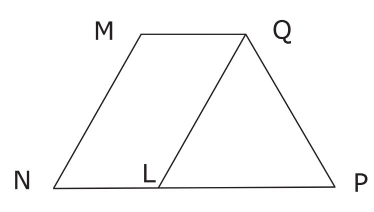
Solução:

Considere a figura dada e seja $ABCD$ um quadrado, $DAPQ$ um losango e P está no prolongamento da diagonal AC.



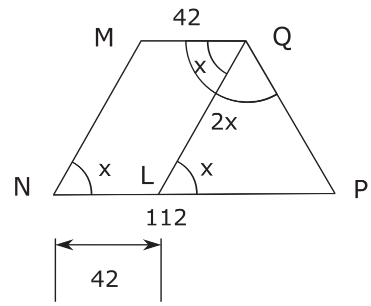
Temos que $D\hat{A}C = 45°$ (bissetriz do vértice de um quadrado)
Então
$$P\hat{A}D = 180° - 45° = 135°$$
Mas $\triangle$ ADP é isósceles, já que $\overline{AP} = \overline{AD}$ (Propriedade do losango)
Então
$P\hat{A}D + A\hat{P}D + A\hat{D}P = 180°$ e $A\hat{P}D = A\hat{D}P \Rightarrow 135° + 2A\hat{P}D = 180° \Rightarrow A\hat{P}D = 22°30'$
Logo como a diagonal é bissetriz no losango vem:
$$Q\hat{D}R = 22°30'.$$
Daí
$$Q\hat{D}C = 90° + 45° = 135°$$
Temos que $\triangle$ DQC é isósceles, pois $\overline{QD} = \overline{DC} \Rightarrow D\hat{Q}C = D\hat{C}Q$.
Daí
$$135° + D\hat{Q}C + D\hat{C}Q = 180° \Rightarrow 135° + 2D\hat{Q}C = 180° \Rightarrow D\hat{Q}C = 22°30'$$
No $\triangle$ QDR, temos:
$$22°30' + 22°30' + Q\hat{R}D = 180° \Rightarrow Q\hat{R}D = 135°$$
Logo os ângulos pedidos são : $22°30', 22°30'$ e $135°$.

Exercício 15: As bases $\overline{MQ}$ e $\overline{NP}$ de um trapézio medem 42 cm e 112 cm, respectivamente. Calcule o lado $\overline{PQ}$, sabendo que o ângulo $M\hat{Q}P$ é o dobro do ângulo $P\hat{N}M$



Solução:

Considere o trapézio $MQPN$ dado com $\overline{MQ} = 42$ cm e $\overline{NP} = 112$ cm e $m(M\hat{Q}P) = 2\ m(M\hat{N}P)$.



Seja *QL* $\parallel$ *MN* $\Rightarrow$ *MQLN* é um paralelogamo, pois *MQ* $\parallel$ *NL* (Definição de trapézio)
QL $\parallel$ *MN* (Por construção)
Denotemos $m(M\hat{N}P) = x \Rightarrow m(M\hat{Q}P) = 2\,x$

Temos que:

1) $\overline{MQ} = \overline{NL} = 42$ (Propriedade de paralelogramo)

2) $m(Q\hat{L}P) = m(M\hat{N}L) = x$ (ângulos correspondentes)

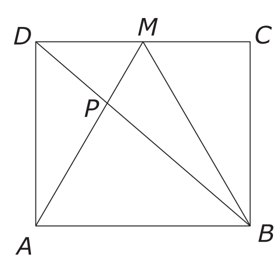
3) $m(M\hat{N}L) = m(M\hat{Q}L) = x$ (ângulos opostos do paralelogramo são congruentes)

Temos que $m(L\hat{Q}P) = 2x - x = x$

Portanto Δ *QLP* é isósceles de base *QL* então $\overline{PL} = \overline{PQ}$ e $\overline{PL} = 112 - 42 = 70$

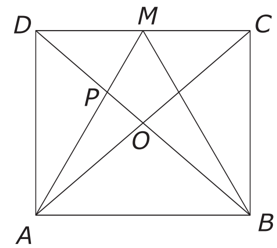
Logo $\overline{PQ} = 70$ cm.

Exercício 16:
Na figura *ABCD* é retângulo, *M* é o ponto médio de $\overline{CD}$ e o triângulo *ABM* é equilátero. Sendo $\overline{AB} = 15$ cm, calcule $\overline{AP}$.



Solução:

Seja na figura *ABCD* retângulo, *M* ponto médio de $\overline{CD}$ e Δ *ABM* é equilátero. $\overline{AB} = 15$ cm.



Trace a diagonal AC e seja O o encontro das diagonais AC e BD. Temos que no Δ ACD, $\overline{AM}$ e $\overline{DO}$ são medianas e P é o baricentro deste triângulo $\Rightarrow \overline{AP} = \dfrac{2}{3} \cdot \overline{AM}$ (1)
Mas $\overline{AM} = \overline{AB}$ (2) (Δ ABM é equilátero).
De (1) e (2)

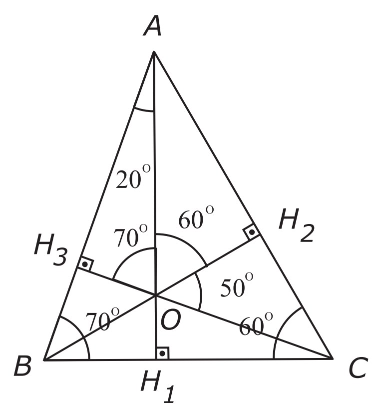
$$\overline{AP} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$$

Logo $\overline{AP} = 10$ cm.

Exercício 17: Em um triângulo ABC os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem respectivamente 70° e 60°. Determine a razão entre os dois maiores ângulos formados pelas interseções das três alturas.

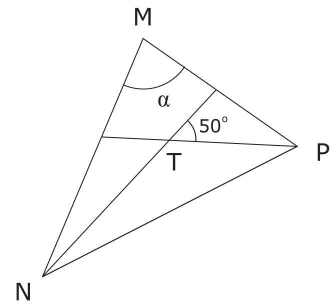
Solução:

Seja um triângulo ABC, $\hat{B} = 70^\circ$ e $\hat{C} = 60^\circ$.

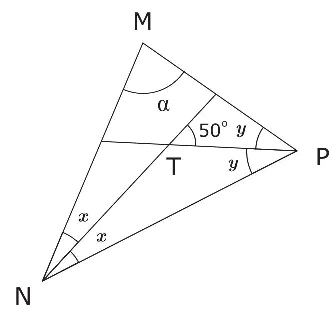


Tracemos as três alturas $\overline{AH_1}, \overline{BH_2}$ e $\overline{CH_3}$, o encontro dessas alturas, denotemos por O(ortocentro).
Vamos achar os ângulos formados pelas interseções dessas alturas.
$B\hat{A}H_1 = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ \Rightarrow H_3\hat{O}A = 180^\circ - 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$
$C\hat{A}H_1 = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow A\hat{O}H_2 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
$C\hat{O}H_2 = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$
Portanto a razão entre os dois maiores ângulos pedidos é: $\dfrac{70}{60} = \dfrac{7}{6}$ ou $\dfrac{60}{70} = \dfrac{6}{7}$

Exercício 18: Se na figura, *T* é o incentro do triângulo *MNP*, determine a medida do ângulo α.



Solução: Seja a figura:



Denominemos $M\hat{N}T = x$ e $N\hat{P}T = y$ $\quad\Rightarrow\quad$ $P\hat{N}T = x$ e $M\hat{P}T = y$
Daí temos

$$50^\circ = x + y \ (1) \quad \text{e} \quad \alpha + 2x + 2y = 180^\circ \ (2)$$

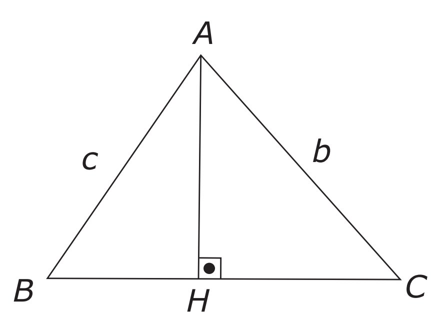
Substituindo (1) em (2) vem:

$$\alpha + 2(x+y) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + 2 \cdot 50^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 80^\circ$$

Exercício 19: Mostre que em um triângulo qualquer a medida de cada altura é menor que a semi-soma das medidas dos lados adjacentes a ela.

Solução:

Seja *ABC* um triângulo cuja altura *AH* mede h_a e os lados adjacentes b e c.



Vamos provar que

$$h_a < \frac{b+c}{2}$$

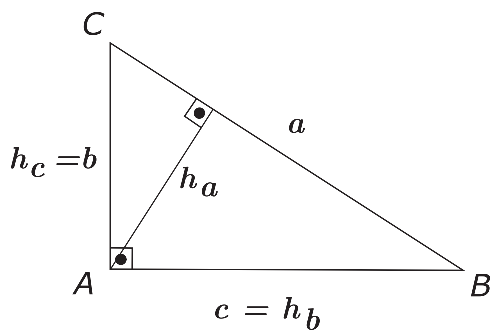
De fato,
a medida da altura *AH* é menor que as medidas dos lados adjacentes, *AC* e *AB*, visto que o segmento perpendicular é menor que qualquer oblíqua.
Daí:

$$\begin{array}{l} h_a < b \\ h_a < c \end{array} \Rightarrow h_a + h_b < b + c \Rightarrow ha < \frac{b+c}{2}$$

Exercício 20: Mostre que em um triângulo retângulo, a soma das medidas das três alturas é maior que a medida do semiperímetro desse triângulo.

Solução:

Considere um triângulo retângulo com lados medindo b, c e a e a sendo a hipotenusa.

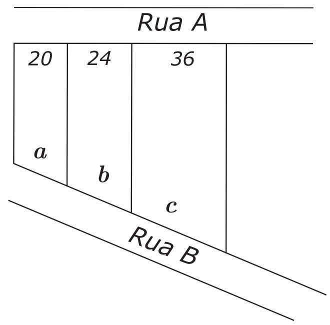


Consideremos as alturas relativas aos lados:
a como h_a
b como h_c
c como h_b
Note que neste triângulo :

$$b = h_c \text{ e } c = h_b$$

$$\begin{aligned} b + c > a \Rightarrow h_c + h_b > a \quad &\Rightarrow 2h_a + h_b + h_c > a \\ &\Rightarrow 2h_a + h_b + c + h_c + b > a + b + c \\ &\Rightarrow 2h_a + 2h_b + 2h_c > a + b + c \\ &\Rightarrow h_a + h_b + h_c > \frac{a+b+c}{2} \end{aligned}$$

Exercício 21: O proprietário de uma área quer dividi-la em três lotes, conforme a figura abaixo. Determine os valores de a, b e c, em metros, sabendo-se que as laterais dos terrenos são paralelas e que $a + b + c = 120$ metros.



Solução:

De acordo com o Teorema de Tales, tem-se: $\dfrac{a}{20} = \dfrac{b}{24} = \dfrac{c}{36}$.
Assim:

$$\frac{a+b+c}{20+24+36} = \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{36} \Rightarrow \frac{120}{80} = \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{a}{20} = \frac{b}{24} = \frac{c}{36} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{20 \cdot 3}{2} = 30 \\ b = \dfrac{24 \cdot 3}{2} = 36 \\ c = \dfrac{36 \cdot 3}{2} = 54 \end{cases}$$

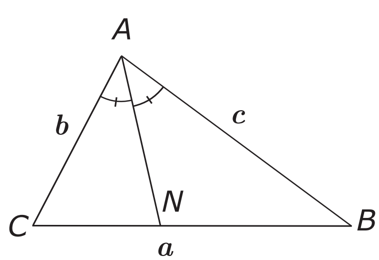
Logo os valores são: $a = 30$ metros, $b = 36$ metros e $c = 54$ metros.

Exercício 22: O perímetro de um triângulo *ABC* é 100 metros. A bissetriz do ângulo interno $\hat{A}$ divide o lado oposto em dois segmentos que medem 16 metros e 24 metros. Determine a medida dos lados desse triângulo.

Solução:

Seja um triângulo *ABC*, cujo perímetro é 100 metros.

$$a + b + c = 100 \qquad (1)$$



Seja *AN* a bissetriz interna. Temos que:

$$\overline{CN} = 16 \qquad (2) \qquad \text{e} \qquad \overline{BN} = 24 \qquad (3)$$

Usando o Teorema da bissetriz interna vem:

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = \frac{b}{c} \qquad (4)$$

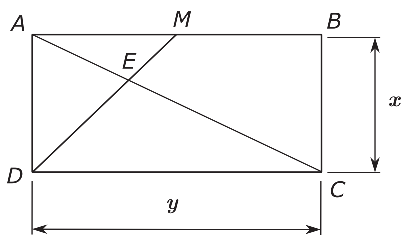
Como $a = 16 + 24 = 40$ vem que $b + c = 100 - 40 = 60$

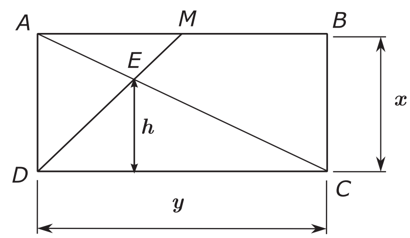
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b}{c} = \dfrac{16}{24} \\ \\ b + c = 60 \end{cases} \Rightarrow \frac{b+c}{b} = \frac{16+24}{16} \Rightarrow \frac{60}{b} = \frac{40}{16} \Rightarrow b = \frac{60 \cdot 16}{40} = 24.$$

Como $b + c = 60 \Rightarrow c = 60 - 24 = 36$.

Daí as medidas dos lados do triângulo $a = 40$ cm, $b = 24$ cm, e $c = 36$ cm.

Exercício 23: Na figura abaixo, *ABCD* é um retângulo e *M* é ponto médio de $\overline{AB}$. Se h é altura do triângulo *CDE* relativa ao lado *CD*, e x e y são as medidas dos lados do retângulo, determine a relação entre h, x e y.





Solução:

Seja a figura dada, ou seja, *ABCD* é um retângulo e *M* é ponto médio de *AB*.

h é altura do triângulo *CDE* relativa ao lado *CD*;

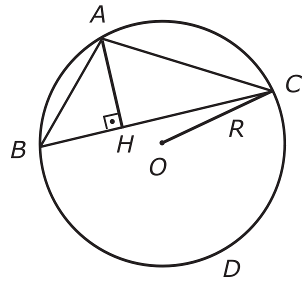
x e y são as medidas dos lados do retângulo.

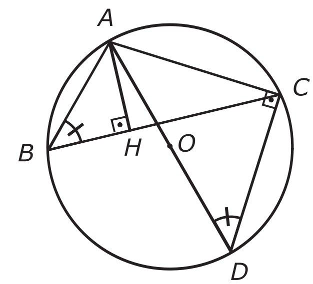
$$\Delta CDE \sim \Delta AME \text{ pois } \begin{cases} A\hat{E}M = D\hat{E}C \\ M\hat{A}E = D\hat{C}E \end{cases} \qquad (AA \sim)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CD}}{\overline{AM}} = \frac{h}{x-h} \Rightarrow \frac{y}{\frac{y}{2}} = \frac{h}{x-h} \Rightarrow 2 = \frac{h}{x-h} \Rightarrow 2x - 2h = h \Rightarrow 2x = 3h$$

Logo a relação pedida é: $3h = 2x$.

Exercício 24: Calcular o raio da circunferência circunscrita ao triângulo *ABC* da figura, se $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$ e $\overline{AH} = 3$.





Solução:

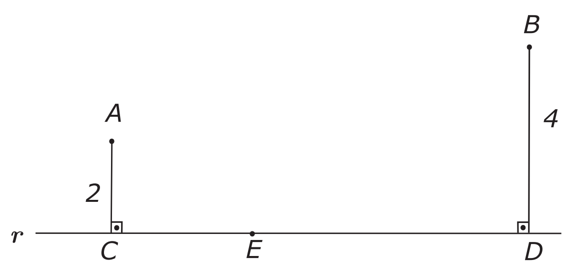
Seja a figura com: $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$ e $\overline{AH} = 3$.
O o centro da circunferência.
Tracemos o diâmetro *AD*.

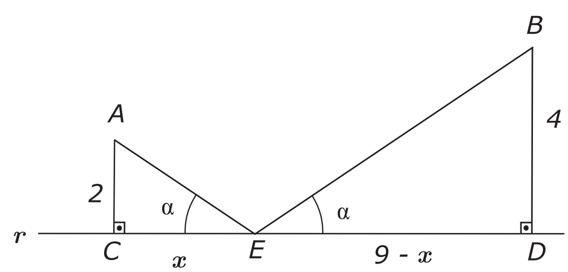
Temos que $A\hat{C}D = 90°$, já que $\overset{\frown}{ABD} = 180°$ e $A\hat{C}D = \dfrac{\overset{\frown}{ABD}}{2}$

Daí $\Delta ABH \sim \Delta ADC$, já que $A\hat{H}B = A\hat{C}D = 90°$ e $A\hat{B}H = A\hat{D}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$
Assim

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{4}{2R} \Rightarrow R = 4$$

Exercício 25: Na figura abaixo, as distâncias dos pontos *A* e *B* à reta r valem 2 e 4. As projeções ortogonais de *A* e *B* sobre essa reta são os pontos *C* e *D*. Se a medida de *CD* é 9, a que distância de *C* deverá estar o ponto *E*, do segmento *CD*, para que *m(CÊA)* = *m(DÊB)*?





Solução: Seja a figura com os dados do exercício.

Seja x a medida de *C* a *E*.
Como

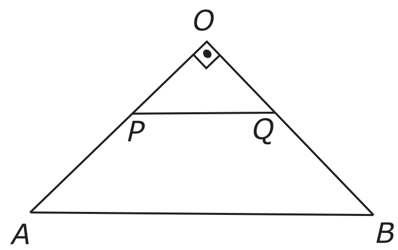
$$\overline{CD} = 9 \Rightarrow \overline{ED} = 9 - x$$

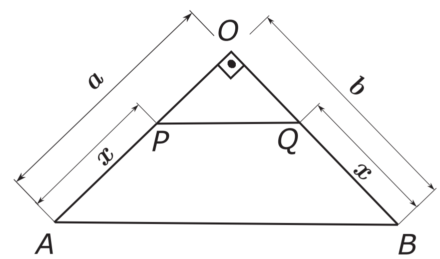
Denomine *m(CÊA)* = *m(DÊB)* $= \alpha \Rightarrow \Delta AEC \sim \Delta BDE$ (Critério AA$\sim$)

$\Rightarrow \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \dfrac{\overline{CE}}{9-x}$, ou seja, $\dfrac{2}{4} = \dfrac{x}{9-x}$.

Daí $4x = 18 - 2x \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$.

Exercício 26: Em um triângulo retângulo *OAB*, retângulo em *O*, com $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$, são dados os pontos *P* em *OA* e *Q* em *OB* de tal maneira que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = x$. Determine o valor de x.





Solução:

Seja um triângulo retângulo *OAB*, retângulo em *O*, com $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$. São dados os pontos *P* em *OA* e *Q* em *OB* de tal maneira que $\overline{AP} = \overline{PQ} = \overline{QB} = x$.
Considere o Δ *OPQ* retângulo:

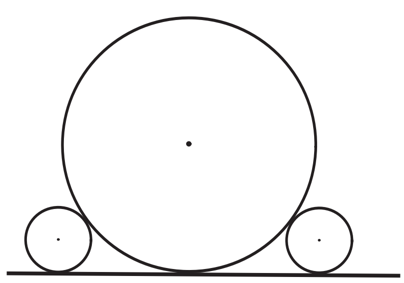
$$\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{PQ}^2 \Rightarrow (a-x)^2 + (b-x)^2 = x^2.$$
$$a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2bx + x^2 = x^2$$
$$x^2 - 2(a+b)x + a^2 + b^2 = 0$$

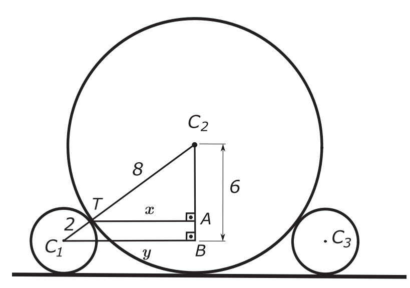
Resolvendo a equação vem:

$$x = \frac{2(a+b) \pm \sqrt{(2(a+b))^2 - 4(a^2+b^2)}}{2} = \frac{2(a+b) \pm \sqrt{8ab}}{2} \Rightarrow$$
$$x = \frac{2(a+b) \pm 2\sqrt{2ab}}{2} = \begin{cases} a+b+\sqrt{2ab} \\ \\ a+b-\sqrt{2ab} \end{cases}$$

Como $x < a$ e $x < b$, então não pode ser $a+b+\sqrt{2ab}$, já que $a+b+\sqrt{2ab} > a$ e $a+b+\sqrt{2ab} > b$.
Portanto $x = a+b-\sqrt{2ab}$.

Exercício 27: Três goiabas perfeitamente esféricas de centros C_1, C_2 e C_3, e raios 2cm, 8cm e 2cm, respectivamente, estão sobre uma mesa tangenciando-se como sugere a figura.





Um bichinho que está no centro da primeira goiaba quer se dirigir para o centro da terceira pelo caminho mais curto. Quantos centímetros percorrerá?
Solução:
Considere na figura dada, as três goiabas de centros C_1, C_2 e C_3, e raios 2cm, 8cm e 2cm, respectivamente.

Denote na figura $\overline{C_1B} = y$ e $\overline{TA} = x$.
No ΔC_1BC_2, usando o Teorema de Pitágoras vem:

$$y^2 + 6^2 = (8+2)^2 \Rightarrow y = 8 \quad (1)$$

Temos que $\Delta\ C_2TA \sim \Delta\ C_2C_1B$, já que

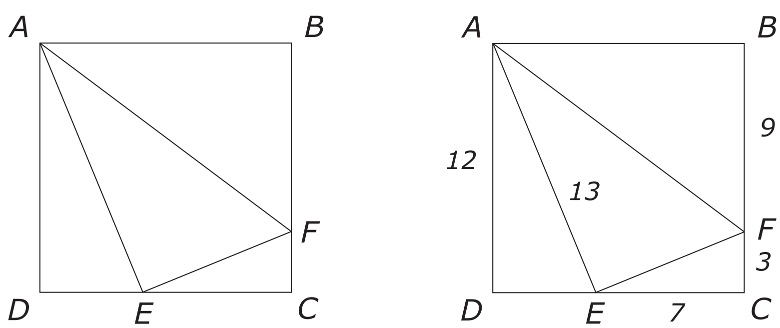
$$\overline{TA} \parallel \overline{C_1B} \Rightarrow \frac{10}{8} = \frac{y}{x} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$\frac{10}{8} = \frac{8}{x} \Rightarrow 10x = 64 \Rightarrow x = 6,4$$

Logo o caminho mais curto mede: $2 + x + x + 2 = 4 + 2 \cdot 6,4 = 16,8$ cm.

Exercício 28: No quadrado *ABCD* de lado 12 cm, temos $\overline{AE} = 13$ cm e $\overline{CF} = 3$ cm. O ângulo *AÊF* é agudo, reto ou obtuso? Justifique.



Solução:

Seja o quadrado *ABCD* de lado 12 cm, temos $\overline{AE} = 13$ cm e $\overline{CF} = 3$ cm.
No ΔADE, temos:

$$12^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 \Rightarrow \overline{DE}^2 = 13^3 - 12^2 = 25 \Rightarrow \overline{DE} = 5$$

Daí

$$\overline{EC} = \overline{DC} - \overline{DE} = 12 - 5 = 7$$

No ΔABF, temos:

$$12^2 + \overline{BF}^2 = \overline{AF}^2 \Rightarrow \overline{AF}^2 = 144 + 9^2 = 225 \Rightarrow \overline{AF} = 15$$

No ΔCEF, temos:

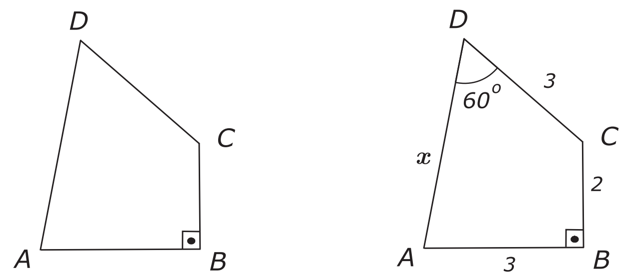
$$\overline{EF}^2 = 7^2 + 3^2 = 58$$

No ΔAEF, temos:

$$15^2 < 13^2 + \sqrt{58}^2 \text{ pois } 225 < 169 + 58$$

Pela Síntese de Clairaut temos que *AÊF* é agudo.

Exercício 29: No quadrilátero *ABCD* da figura, $\overline{AB} = \overline{CD} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm, *m(AD̂C)* $= 60^\circ$ e *m(AB̂C)* $= 90^\circ$. Determine a medida, em centímetros, do perímetro do quadrilátero.



Solução:

Seja o quadrilátero *ABCD*, tal que $\overline{AB} = \overline{CD} = 3$ cm, $\overline{BC} = 2$ cm, *m(AD̂C)* $= 60^\circ$ e *m(AB̂C)* $= 90^\circ$.

No ΔABC, temos:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{13}$$

Denote $\overline{AD} = x$. Usando a lei dos co-senos no ΔACD, vem:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{DC} \cdot \cos 60^\circ$$

$$(\sqrt{13})^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow 13 = x^2 + 9 - 3x$$

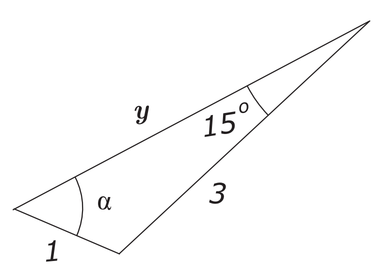
Temos que $x^2 - 3x - 4 = 0$. Resolvendo esta equação vem:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} \dfrac{3+5}{2} = 4 \\[2ex] \dfrac{3-5}{2} = -1 \text{(Não serve)} \end{cases}$$

Logo o perímetro do quadrilátero *ABCD* é :

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 3 + 2 + 3 + 4 = 12\text{cm}.$$

Exercício 30: Considere o triângulo não retângulo da figura abaixo. Determine $\operatorname{sen} \alpha$.



Solução: Seja o triângulo retângulo da figura:

Pela lei dos senos temos:

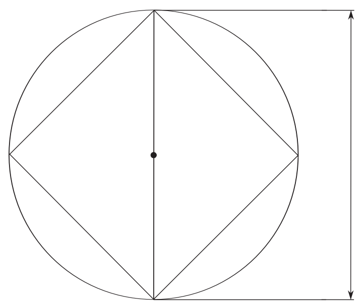
$$\frac{1}{\operatorname{sen} 15^\circ} = \frac{3}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 3 \operatorname{sen} 15^\circ$$

Exercício 31: A diagonal de um quadrado inscrito em um círculo mede 8 cm. Calcule o perímetro de um triângulo equilátero inscrito nesse círculo.

Solução:

Temos que a diagonal de um quadrado inscrito em um círculo é o diâmetro, ou seja,

$$2R = d \Rightarrow d = 8 = 2R \Rightarrow R = 4$$

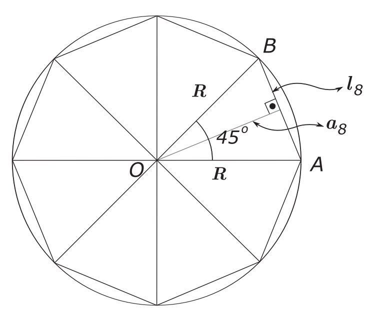


Como o lado em função do raio de um triângulo equilátero inscrito neste círculo é $l_3 = R\sqrt{3}$ temos que $l_3 = 4\sqrt{3}$.
Daí o perímetro pedido é $3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ cm.

Exercício 32: Dado o raio R de uma circunferência, calcular o lado e o apótema do octógono regular inscrito.

Solução:

Considere a figura que mostra o octógono regular inscrito.



Note que o ângulo central $A\hat{O}B$ é $\dfrac{360°}{8} = 45°$.

Vamos achar o lado, do octógono (l_8), em função do raio R.
Usando a lei dos co-senos vem:

$$l_8^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 45°$$

$$l_8^2 = 2R^2 - 2 \cdot R^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2R^2 - R^2\sqrt{2}$$

$$l_8^2 = R^2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Vamos achar , agora, o apótema do octógono (a_8) em função do raio R.
Da figura, vem por Pitágoras:

$$a_8^2 + \left(\frac{l_8}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow a_8^2 = R^2 - \left(\frac{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow a_8^2 = R^2 - \frac{2R^2 - R^2\sqrt{2}}{4} = \frac{4R^2 - 2R^2 + R^2\sqrt{2}}{4}$$

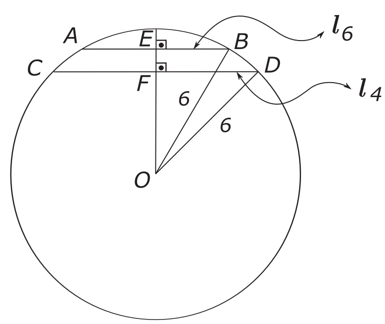
$$\Rightarrow a_8^2 = \frac{2R^2 + R^2\sqrt{2}}{4} = \frac{R^2(2+\sqrt{2})}{4}$$

$$\Rightarrow a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Exercício 33: Em um semicírculo de raio 6 cm, traçam-se duas cordas paralelas que representam os lados de um quadrado e de um hexágono regular inscritos. Calcule a distância entre as duas cordas.

Solução:

Seja um semicírculo de raio 6 cm e duas cordas paralelas que representam os lados de um quadrado e de um hexágono.



Seja $\overline{AB} = l_6$, $\overline{CD} = l_4$ e $R = 6$. Vamos calcular $\overline{EF} = \overline{OE} - \overline{OF}$.
Considere os triângulos *OEB* e *OFD*:
Temos

$$\overline{OE}^2 + \overline{EB}^2 = \overline{OB}^2 \Rightarrow \overline{OE}^2 + \left(\frac{l_6}{2}\right)^2 = 6^2. \quad (1)$$

$$\overline{OF}^2 + \overline{FD}^2 = \overline{OD}^2 \Rightarrow \overline{OF}^2 + \left(\frac{l_4}{2}\right)^2 = 6^2. \quad (2)$$

Temos que

$$l_4 = 6\sqrt{2} \quad (3) \;\; e \;\; l_6 = 6 \qquad (4)$$

Substituindo (4) em (1) vem:

$$\overline{OE}^2 = 36 - \frac{6^2}{4} = 36 - \frac{36}{4} = 27 \Rightarrow \overline{OE} = 3\sqrt{3}$$

Substituindo (3) em (2) vem:

$$\overline{OF}^{\,2} = 36 - \left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 36 - 9 \cdot 2 = 18 \Rightarrow \overline{OF} = 3\sqrt{2}$$

Daí a distância pedida é: $\overline{EF} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

Exercício 34: De quanto aumenta o raio de uma circunferência quando o seu comprimento aumenta de π cm?

Solução:

Seja uma circunferência de raio R e comprimento C. Temos que $C = 2\pi R$.
Se aumentarmos o comprimento C de π, vamos determinar de quanto aumenta o raio R. Denote o novo raio de R'.
Então

$$C + \pi = 2\pi R' \Rightarrow 2\pi R + \pi = 2\pi R' \Rightarrow R' = \frac{2\pi R + \pi}{2\pi} = \frac{\pi(2R+1)}{2\pi} \Rightarrow R' = \frac{2R+1}{2}$$

Logo o aumento pedido é: $R' - R = \dfrac{2R+1}{2} - R = \dfrac{2R+1-2R}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Exercício 35: Em uma engrenagem a roda grande de raio 75 cm faz 900 voltas, enquanto a pequena dá 1500 voltas. Qual o raio da roda pequena?

Solução:

A roda grande tem raio 75 cm e faz 900 voltas.
Vamos determinar o comprimento total (C) da roda grande.

$$C = 2\pi \cdot 75 \cdot 900 \quad (1)$$

A roda pequena dá 1500 voltas, vamos determinar o raio (r) desta roda.
Note que o comprimento total desta roda é o mesmo da roda grande.
Logo

$$C = 2\pi \cdot r \cdot 1500 \quad (2)$$

De (1) e (2) vem:

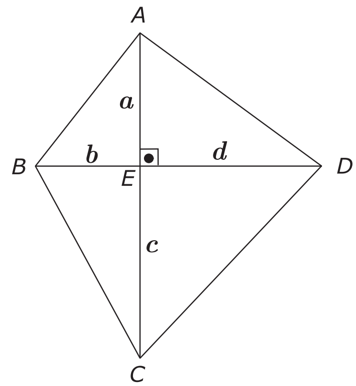
$$2\pi \cdot r \cdot 1500 = 2\pi \cdot 75 \cdot 900 \Rightarrow 1500r = 75 \cdot 900 \Rightarrow r = 45 \text{ cm}$$

Daí o raio da roda pequena é 45 cm.

Exercício 36: Calcule a área de um quadrilátero convexo de diagonais perpendiculares medindo 12 cm e 15 cm.

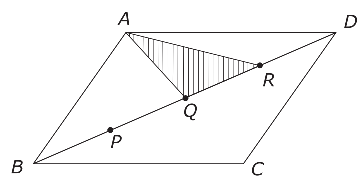
Solução:

Considere um quadrilátero convexo *ABCD* de diagonais perpendiculares (Note que o enunciado não diz que o quadrilátero é um losango).



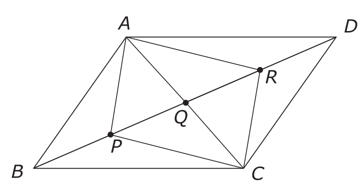
Vamos denonimar a interseção das diagonais de E e denote $\overline{AE} = a,\ \overline{BE} = b,\ \overline{CE} = c$ e $\overline{DE} = d$.
Temos que a área do quadrilátero é:
$S_{ABCD} = \dfrac{ab}{2} + \dfrac{bc}{2} + \dfrac{ad}{2} + \dfrac{cd}{2} = \dfrac{(a+c)b}{2} + \dfrac{(a+c)d}{2}$
Então
$S_{ABCD} = \dfrac{(a+c)(b+d)}{2} = \dfrac{12 \cdot 15}{2} = 90$
Daí a área procurada é 90 cm^2.

Exercício 37: No paralelogramo *ABCD* de área 48 cm^2, os pontos *P, Q* e *R* dividem a diagonal *BD* em quatro partes de igual medida. Calcule a área do triângulo *AQR*.



Solução:

Seja o paralelogramo *ABCD* de área 48 cm^2 e os pontos *P, Q* e *R* dividindo a diagonal *BD* em quatro partes de igual medida.

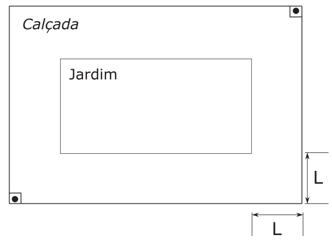


Ligando os pontos *A* a *P*, *C* a *P*, *C* a *Q* e *C* a *R*; temos 8 triângulos a saber:

ABP, APQ, AQR, ARD, CBP, CPQ, CQR e CRD

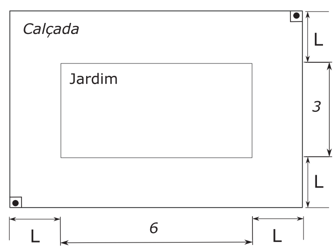
Esses triângulos tem a mesma área, já que eles tem a mesma base e a mesma altura. Portanto, já que a área do paralelogramo é a soma das áreas desses oito triângulos, temos que a área do triângulo *AQR* é: $\dfrac{48}{8} = 6$ cm^2.

Exercício 38: Num terreno retangular com 54 cm^2 de área, deseja-se construir um jardim, também retangular, medindo 6 metros por 3 metros, contornado por uma calçada de largura L, como indica a figura. Calcule o valor de L.



Solução:

Seja a figura dada e temos que a área do terreno é 54 m^2 e o retângulo que iremos construir, o jardim, mede 6 metros por 3 metros.
Vamos achar a largura L da calçada.



Temos que

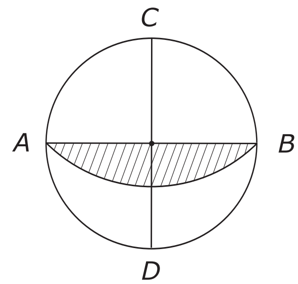
$$(6+2L)(3+2L) = 54 \Rightarrow 18 + 6L + 12L + 4L^2 = 54.$$
$$\Rightarrow 4L^2 + 18L - 36 = 0 \Rightarrow 2L^2 + 9L - 18 = 0$$

Resolvendo a equação de 2º grau vem:

$$L = \frac{-9 \pm \sqrt{81+144}}{4} \begin{cases} \dfrac{-9-15}{4} = -6 \\[2ex] \dfrac{-9+15}{4} = \dfrac{6}{4} = 1,5 \end{cases}$$

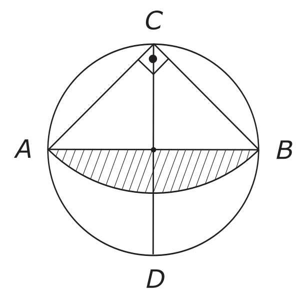
Como $L > 0$, temos que o valor de L = 1,5 metros.

Exercício 39: Considere a circunferência, representada abaixo, de raio 2 cm e os diâmetros AB e CD perpendiculares. Com centro em C e raio CA foi traçado o arco $\overset{\frown}{AB}$. Determine a área da região assinalada.



Solução:

Seja a circunferência dada, com raio 2 cm e os diâmetros *AB* e *CD* perpendiculares.



Temos que

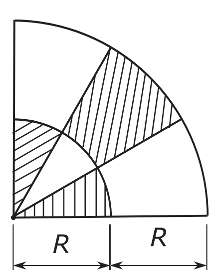
$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 2^2 \Rightarrow \overline{AC} = 2\sqrt{2} \text{ e } A\hat{C}B = \frac{180°}{2} = 90°$$

Denotando a área pedida por A_p vem que:

$$A_p = A_{setor\ CAB} - A_{\Delta ACB} = \frac{\pi \cdot (2\sqrt{2})^2}{4} - \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = \frac{8\pi}{4} - \frac{8}{2} = 2\pi - 4$$

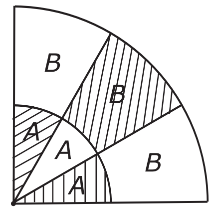
Daí a área da região assinalada é $(2\pi - 4)$ cm^2.

Exercício 40: A figura mostra dois arcos de circunferência de centro *O*, raios *R* e *2R* e três ângulos congruentes. Calcule a razão entre as áreas da região hachurada e não hachurada.



Solução:

Seja a figura dada, com raios *R* e *2R* dos dois arcos de centro *O* e três ângulos congruentes.



As três regiões de centro O e raio R, vamos denotar po A.
As outras três regiões, vamos denotar por B, como está indicado na figura.
Vamos achar a área da região A.

$$S_A = \frac{\pi R^2}{4 \cdot 3} = \frac{\pi R^2}{12}$$

Vamos achar a área da região B.

$$S_B = \frac{\pi(2R)^2}{4 \cdot 3} - \frac{\pi R^2}{12} = \frac{4\pi R^2}{12} - \frac{\pi R^2}{12} = \frac{\pi R^2}{4}$$

A área da região hachurada é: $2S_A + S_B$ e a área da região não hachurada é $S_A + 2S_B$
Logo, a razão entre as áreas pedidas é:

$$\frac{2S_A + S_B}{S_A + 2S_B} = \frac{\dfrac{2\pi R^2}{12} + \dfrac{\pi R^2}{4}}{\dfrac{\pi R^2}{12} + \dfrac{2\pi R^2}{4}} = \frac{\dfrac{2\pi R^2 + 3\pi R^2}{12}}{\dfrac{\pi R^2 + 6\pi R^2}{12}} = \frac{5\pi R^2}{12} \cdot \frac{12}{7\pi R^2} = \frac{5}{7}$$