UFF – Universidade Federal Fluminense IME – Instituto de Matemática e Estatística

GGM – Departamento de Geometria

Disciplinas : Geometria Analítica e Cálculo Vetorial e Geometria Analítica Básica

Lista de Exercícios de Cônicas- 2012-2

1. Determine a cônica e faça um esboço da mesma:
   (a) $2x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.
   (b) $-3x^2 - 2y^2 + 2x - 5y = 0$.
   (c) $5x^2 - 4x + 9y - 10 = 0$.
2. Determine a equação da elipse de centro (4,-1), foco em (1,-1) e que passa por (8,0).
3. Determine os vértices, os focos e a excentricidade da elipse $x^2 + 5y^2 - 2x + 20y + 16 = 0$.
4. Determine os pontos da elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ cuja distância ao foco, que se encontra sobre o semi-eixo OX positivo, é 14.
5. Determine a equação da família de elipses com centro $(2, 3)$, reta focal paralela ao eixo OX e excentricidade $1/2$.
6. Seja $\mathcal{C}$ o círculo $x^2 + y^2 = r^2$ e $F = (a, 0)$ um ponto no interior de $\mathcal{C}$. Determine a equação que descreve o conjunto dos centros dos círculos tangentes a $\mathcal{C}$ e passando por F. Classifique tal curva.
7. Determine a equação da elipse que passa pelos pontos $(1, 3)$, $(-1, 4)$, $(0, 3 - \sqrt{3}/2)$ e $(-3, 3)$, admitindo que seus eixos são paralelos aos eixos coordenados.
8. Detrmine todos os valores de k para os quais a equação
$$\frac{(x-4)^2}{9+k} + \frac{y^2}{5+k} = 1$$
representa elipses e hipérboles. Esboce a curva para $k = -7$ e dê os focos, a excentricidade e as assíntotas (caso existam).
9. O segmento AB de comprimento 12 unidades, desloca-se de modo que A percorre o eixo OX e B percorre OY. $P : (x, y)$ é um ponto interior do segmento e fica situado a 8 unidades de A. Determine a equação do lugar geométrico descrito pelo P.
10. Determine a equação do lugar gemétrico dos pontos cujo produto de suas distâncias às retas $4x - 3y + 11 = 0$ e $4x + 3y + 5 = 0$ é igual a $\frac{144}{25}$.
11. Um ponto no plano se desloca de tal modo que sua distância ao ponto $(0, 4)$ é igual a $4/3$ de sua distância à reta $4y - 9 = 0$. Determine o lugar geométrico descrito por tal ponto.
12. Determine o centro, vértices, focos e assíntotas da hipérbole $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y - 199 = 0$.
13. Determine a equação da parábola com foco no ponto $(6, -2)$ e diretriz $x - 2 = 0$.
14. Determine a equação da parábola cuja reta focal é paralela ao OX e passa pelos pontos $(-2, 1)$, $(1, 2)$ e $(-1, 3)$.
15. Determine a equação da parábola de vértice $(2, 3)$, reta focal é paralela ao OY e que passa pelo ponto $(4, 5)$.
16. Determine a equação do lugar geométrico de um ponto que se desloca de modo que sua distância ao ponto (-2,3) é igual a sua distância à reta $x + 6 = 0$.
17. Determine as equações que descrevem os lugares geométricos abaixo, classificando-as e fazendo o esboço das mesmas:
    (a) Lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que sua distância ao ponto $(2, -1)$ é sempre igual a duas vezes sua distância à reta $x + 2 = 0$.
    (b) Lugar geométrico de um ponto que se move de maneira que sua distância à reta $y = 6$ é igual ao quadrado da distância ao ponto $(3, 3)$
    (c) Lugar geométrico dos pontos cujos coeficientes angulares das retas que os ligam aos pontos $(3, -2)$ e $(3, 3)$ têm produto -2.
    (d) Lugar geométrico dos pontos equidistantes ao círculo $x^2 + y^2 = 1$ e ao eixo OX.
    (e) Lugar geométrico dos pontos que são centros dos círculos que são tangentes simultaneamente à reta $y = 1$ e ao círculo $x^2 + y^2 = 9$.

18. Uma bola é lançada horizontalmente do alto do Catedral de 160m de altura com uma velocidade inicial de 12,2m/s. A que distância do pé do Catedral ela se chocará com o solo, suposto nivelado (g=9,8m/s^2)?

19. Determine a equação da parábola de eixo horizontal, que tem vértice na reta $7x + 3y - 4 = 0$ e passa pelos pontos $(3, -5)$ e $(\frac{3}{2}, 1)$.

20. Os segmentos que ligam um ponto qualquer de uma elipse aos focos denominam-se raios vtôres. Determine as equações das retas suportes dos raios vetôres da elipse $3x^2 + 4y^2 = 48$ no ponto $(2, 3)$.

21. Determine a equação do lugar geométrico de todos os pontos que se deslocam de modo que o produto dos coeficientes angulares das retas que os unem a $(-2, 1)$ e $(4, 5)$ é 3.

22. Determine os pontos de interseção das hipérboles $x^2 - 2y^2 + x + 8y - 8 = 0$ e $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$.

Respostas:

1.

2. $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$.

3. Os vértices são $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, -1)$; Os focos são: $(2, 0)$, $(-2, 0)$; A excentricidade é $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

4. $(-5, 3\sqrt{3})$ e $(-5, 3\sqrt{3})$.

5. $\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{4(y-3)^2}{3a^2} = 1, \ a > 0$.

6. $\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\frac{r^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{r^4 - a^2}{4}} = 1$.

7. $\frac{(x+1)^2}{4} + (y - 3)^2 = 1$.

8. Elipses: $k > -5$
Hipérboles: $k \in (-9, -5)$
Para $k = -7$: $\mathcal{H} : \frac{(x-4)^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ é uma hipérbole de centro $(4, 0)$, reta focal igual ao eixo OX, focos $F_1 = (6, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$, excentricidade $e = \sqrt{2}$ e assíntotas $y = x - 4$ e $y = -x + 4$.

9. $X^2 + 4y^2 = 64$.

10. $16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 89 = 0$.

11. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$.

12. O centro: $(1, -2)$, vértices: $(-3, -2)$ e $(5, -2)$, focos: $(-4, -2)$ e $(5, -2)$ e assíntotas: $y+2 = \frac{3}{4}(x-1)$ e $y+2 = -\frac{3}{4}(x-1)$.

13. $y^2 + 4y - 8x + 36 = 0$.

14. $5y^2 + 2x - 21y + 20 = 0$.

15. $x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$.

16. $y^2 - 6y - 8x - 23 = 0$.

17. (a.) Hipérbole: $9\left(x + \frac{10}{3}\right)^2 - 3(y + 1)^2 = 64$.
(b.) Círculo: $(x - 3)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$.
(c.) A elipse $2(x - 3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ menos os vértices $(3, 3)$ e $(3, -2)$ sobre a reta focal.
(d.) Duas parábolas: $x^2 = 2\left(y + \frac{1}{2}\right)$ e $x^2 = -2\left(y - \frac{1}{2}\right)$.
(e.) As duas parábolas $x^2 = -8(y - 2)$ e $x^2 = 4(y + 1)$ menos os pontos $(2\sqrt{2}, 1)$ e $(-2\sqrt{2}, 1)$.

18. 71,65m.

19. $(y + 1)^2 = 8(x - 1)$ ou $(y + \frac{97}{17})^2 = -\frac{504}{17}(x - \frac{359}{119})$.

20. $3x - 4y + 6 = 0$.

21.

22. $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(-2, 1)$ e $(-2, 3)$.

23. $2\sqrt{13}$.