UFF - Universidade Federal Fluminense
IME - Instituto de Matemática e Estatística
GGM - Departamento de Geometria
7^a Lista de exercícios
2^0 Semestre de 2012
Disciplinas: Geometria Analítica e Cálculo Vetorial I e Geometria Analítica Básica

Lista de exercícios de Quadricas :

1. Achar a equação da esfera de centro em $(-2, 1, -3)$ e raio 4 u.c.
2. Determinar a equação da esfera de centro em $(3, 6, -4)$, tangente ao plano $2x - 2y - z - 10 = 0$.
3. Determinar as coordenadas do centro e o raio da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 3z = 15$.
4. Achar o lugar geomémtrico descrito por um ponto, cujas distâncias a $(-2, 2, -2)$ e $(3, -3, 3)$ verficam a razão de $2 : 3$.
5. Completando os quadrados em relação a x, y e z, provar que a seguinte equação representa um elipsóide. Localizar o centro e determinar os comprimentos dos semi-eixos.
$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0.$$
6. Provar que o lugar geométrico gerado por um ponto, que se desloca de modo tal que a soma de suas distâncias a $(2, 3, 4)$ e $(2, -3, 4)$ permanece igual a 8, é um elipsóide.
7. Determinar a equação do elipsóide que passa pelos pontos $(2, 2, 4), (0, 0, 6), (2, 4, 2)$ e tem como planos de simetria os planos coordenados.
8. Completando os quadrados dos termos em x, y e z, determinar a natureza da superfície representada pela equação
$$3x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 6x - 16y + 8z = 13.$$
9. Completando os quadrados dos termos em x, y e z, determinar a natureza do lugar, representado pela equação $2x^2 - 3y^2 - 2z^2 - 8x + 6y - 12z - 21 = 0$.
10. Achar a equação de um lugar geométrico tal que a diferença das distância de cada um de seus pontos a $(-4, 3, 1)$ e $(4, 3, 1)$ seja igual a 6u.c.
11. Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a $(2, -1, 3)$ valem o dobro de suas distâncias ao eixo dos x.
12. Achar a equação do parabolóide de vértice, na origem com eixo OZ, e que passa pelos pontos $(3, 0, 1)$ e $(3, 2, 2)$.
13. Achar a equação do lugar geométrico gerado por um ponto, cujo quadrado da distância ao eixo dos x é sempre o triplo de sua distância ao plano yz.
14. Completando os quadrados dos termos em x e y, localizar o vértice do parabolóide elíptico.
$$3x^2 + 2y^2 - 12z - 6x + 8y - 13 = 0.$$
15. Achar a equação de um parabolóide de vértice em $(0, 0, 0)$ e eixo OY, que passa pelos pontos $(1, -2, 1)$ e $(-3, -3, 2)$.
16. Achar a equação da esfera que passa pelos pontos $(1, -3, 4), (1, -5, 2)$ e $(1, -3, 0)$ e tem o centro no plano $x+y+z = 0$.
17. Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos, cujas distâncias a $(1, 1, -2)$ e $(-2, 3, 2)$ estão na razão de $3 : 4$.
18. De cada uma das seguintes equações deduzir as coordenadas do centro e os comprimentos dos semi-eixos.
    (a) $x^2 + 16y^2 + z^2 - 4x + 32y = 5$.
    (b) $3x^2 + y^2 + 2z^2 + 3x + 3y + 4z = 0$.
    (c) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4x - 8y + 8z + 15 = 0$.
19. Deduzir a equação do elipsóide tipico (centro na origem, eixos paralelos aos eixos coordenados), que passa pelos pontos dados. Utilizar a forma $Ax^2 + by^2 + Cz^2 = D$.
    (a) $(2, -1, 1), (-3, 0, 0), (1, -1, -2)$.
    (b) $(\sqrt{3}, 1, 1), (1, \sqrt{3}, -1), (-1, -1, \sqrt{5})$.
20. Um ponto se desloca de modo que a soma de suas distância a $(0, 3, 0)$ e $(0, -3, 0)$ é sempre 8 u.c. Achar a equação do lugar.

Lista de exercícios de Quadricas :

21. Determinar o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias ao plano yz são sempre iguais ao dobro das distâncias ao ponto $(1,-2,2)$.

22. Determinar o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias ao eixo dos x são iguais ao triplo de suas distâncias a $(2,3,-3)$.

23. Determinar as coordenadas do centro e discutir a natureza de cada uma das seguintes quádricas.

    (a) $2x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 8x - 6y + 12z - 10 = 0$.
    (b) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4x - 4y - 6z - 9 = 0$.
    (c) $2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 12x - 6y - 21 = 0$.
    (d) $4y^2 - 3x^2 - 6z^2 - 16y - 6x + 36z - 77 = 0$.
    (e) $16y^2 - 9x^2 + 4z^2 - 36x - 64y - 24z = 80$.
    (f) $5z^2 - 9x^2 - 15y^2 + 54x + 60y + 20z = 166$.
    (g) $2x^2 - y^2 - 3z^2 - 8x - 6y + 24z - 49 = 0$.

24. Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos cujas diferenças entre as distâncias a $(0,0,3)$ e $(0,0,-3)$ ão sempre 4.

25. Determinar a equação do hiperbolóide de duas folhas de centro na origem e eixos sobre os eixos coordenados, que passa pelos pontos $(3,1,2), (2,\sqrt{11},3)$ e $(6,2,\sqrt{15})$.

26. Achar a equação do parabolóide de vértice em $(0,0,0)$ e eixo sobre OZ que passa pelos pontos $(2,0,3)$ e $(1,2,3)$.

27. Achar a equação do lugar geométrico gerado por um ponto, sabendo que o quadrado de sua distância ao eixo dos z é sempre igual ao dobro de sua distância ao plano xy.

28. Considere as quádricas $\mathcal{Q}$ e os planos π dados abaixo. Determine a seção plana $\mathcal{Q} \cap \pi$. Caso seja uma cônica, determine seus principais elementos.

    (a) $\mathcal{Q}: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ e $\pi: y = \sqrt{3}$.
    (b) $\mathcal{Q}: (x+2)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} + z^2 = 1$ e $\pi: z = \frac{1}{2}$.
    (c) $\mathcal{Q}: x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ e $\pi: z = 4$.
    (d) $\mathcal{Q}: x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ e $\pi: y = 0$.
    (e) $\mathcal{Q}: x^2 + 4y^2 = z^2$ e $\pi: z = 2$.
    (f) $\mathcal{Q}: x^2 + 4y^2 = z^2$ e $\pi: x = 2$.
    (g) $\mathcal{Q}: y^2 + 2y - 4x^2 + 8x = 4z + 7$ e $\pi: y = 1$.

29. Determine a reta contida em o cone elíptico $\mathcal{S}: (x+1)^2 + 2(y-1)^2 = z^2$ que passa pelo ponto $P = (1,1,\sqrt{3})$.

30. Determine as retas contidam em o hiperboloide de uma folha $\mathcal{S}: x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ que passa pelo ponto $P = (2,0,0)$.

Respostas:

1. $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 4$.

2. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 16$.

3. A esfera tem centro em $(3,-2,\frac{3}{2})$ e raio $\frac{11}{2}$ u.c.

4. $z^2 + y^2 + z^2 + 12x - 12y + 12z = 0$, que representa uma esfera uma esfera com centro em $(-6,6,-6)$ e raio $6\sqrt{3}$ u.c.

5. $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{6} + \frac{(z-2)^2}{18} = 1$, que representa um elipsóide de centro em $(2,-1,2)$ e semi-eixos $3u.c.$, $\sqrt{6}$ u.c. e $3\sqrt{2}$ u.c.

6. $\frac{(x-2)^2}{7} + \frac{y^2}{16} + \frac{(z-4)^2}{7} = 1$, que representa um elipsóide com centro em $(2,0,4)$ e semi-eixos $\sqrt{7}u.c., 4u.c., \sqrt{7}$u.c.

7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{36} = 1$.

8. $\frac{(x+1)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{6} - \frac{(z-2)^2}{12} = 1$. Trata-se de um hiperbóide de uma folha com centro em $(-1,2,2)$ e eixo paralelo ao eixo dos z. As seções por planos paralelos ao xy são elipses. As seções por planos paralelos aos planos xz e yz são hipérboles.

9. $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{\frac{8}{3}} - \frac{(z+3)^2}{4} = 1$, representação analítica de um hiperblóide de duas folhas com centro em $(2,1,-3)$ e eixo transverso paralelo ao eixos dos x.

Lista de exercícios de Quadricas :

10. $\frac{x^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{7} - \frac{(z-1)^2}{7} = 1$, que representa um hiperbolóide de duas folhas com centro em $(0,3,1)$ e eixo transverso paralelo ao eixo dos x. Como as seções paralelas ao plano yz são circunferências, a superfície é um hiperbolóide de revolução de duas folhas.
11. $\frac{(y-\frac{1}{3})^2}{\frac{40}{9}} + \frac{(z+1)^2}{\frac{40}{9}} - \frac{(x-2)^2}{\frac{40}{3}} = 1$ que representa um hiperbolóide de revolução de uma folha, em torno do eixo dos x, com centro em $(2, \frac{1}{3}, -1)$.
12. $4x^2 + 9y^2 = 36z$.
13. $y^2 + z^2 = 3x$.
14. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{6} = \frac{z+2}{1}$. O vértice está situado em $(1,-2,-2)$.
15. $x^2 - 3z^2 = y$.
16. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 10 = 0$.
17. $7x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 68x + 22y + 100z - 57 = 0$.
18. (a) $(2,-1,0), 5, \frac{5}{4}, 5$.
    (b) $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -1), \frac{\sqrt{15}}{3}, \sqrt{5}, \frac{\sqrt{10}}{2}$.
    (c) $(2,1,-4), 3, \frac{3}{2}, 3$.
19. (a) $x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$.
    (b) $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$.
20. $16x^2 + 7y^2 + 16z^2 = 112$.
21. $3x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y - 16z + 36 = 0$.
22. $9x^2 + 8y^2 + 8z^2 - 36x - 54y + 54z + 198 = 0$.
23. (a) $(2,-1,-\frac{3}{2})$. Hiperbolóide de uma folha. Eixo paralelo a OY.
    (b) $(-2,1,-1)$. Hiperbolóide de uma folha. Eixo paralelo a OZ.
    (c) $(3,-1,0)$. Hiperbolóide de duas folhas. Eixo paralelo a OX.
    (d) $(-1,2,3)$. Hiperbolóide de duas folhas. Eixo paralelo a OY.
    (e) $(-2,2,3)$. Hiperbolóide de uma folha. Eixo paralelp a OX.
    (f) $(3,2,-2)$. Hiperbolóide de duas folhas. Eixo paralelo a OZ.
    (g) O ponto $(2,-3,4)$.
24. $5z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 20$. Hiperbolóide de duas folhas. Centro na origem.
25. $3z^2 - x^2 - 2y^2 = 1$. Hiperbolóide de duas folhas, eixos transverso ao longo do eixo dos z.
26. $12x^2 + 9y^2 - 16z = 0$.
27. $x^2 + y^2 - 2z = 0$. Parabolóide de revolução em torno do eixo dos z.
28. (a) A seção plana é uma elipse de
    centro: $(0, \sqrt{3}, 0)$;
    focos: $(0, \sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2})$;
    reta focal $l := \{(0, \sqrt{3}, t) : t \in \mathbb{R}\}$
    reta não focal $l' := \{(t, \sqrt{3}, 0) : t \in \mathbb{R}\}$;
    vértices sobre a reta focal: $(0, \sqrt{3}, \pm 2)$;
    vértices sobre a reta não focal: $(\pm\frac{3}{2}, \sqrt{3}, 0)$.
    (b) A seção plana é uma elipse de
    centro: $(-2, 1, \frac{1}{2})$;
    focos: $(-2, 1 \pm \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$;
    reta focal $l := \{(-2, t, \frac{1}{2}) : t \in \mathbb{R}\}$
    reta não focal $l' := \{(t, 1, \frac{1}{2}) : t \in \mathbb{R}\}$;
    vértices sobre a reta focal: $(-2, 1 \pm \sqrt{3}, \frac{1}{2})$;
    vértices sobre a reta não focal: $(-2 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{1}{2})$.
    (c) Um círculo contido no plano $z = 4$, com centro $(0,0,4)$ e o raio $\sqrt{2}$ u.c.

(d) A seção plana é uma hipérbole contida no plano $y = 0$, com
centro: (0,0,0);
reta focal: $l := \{(t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$;
reta não focal: $l' := \{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$;
vértices: $(\pm 1, 0, 0)$;
vértices imaginários: $(0, \pm 2, 0)$;
focos: $(\pm\sqrt{5}, 0, 0)$;
assíntotas $r^+ = \{(\frac{t}{2}, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $r^+ = \{(-\frac{t}{2}, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(e) A seção plana é uma elipse contida no plano $z = 2$ de
centro: $(0, 0, 2)$;
focos: $(\pm\sqrt{3}, 0, 2)$;
reta focal $l := \{(t, 0, 2) : t \in \mathbb{R}\}$
reta não focal $l' := \{(0, t, 2) : t \in \mathbb{R}\}$;
vértices sobre a reta focal: $(\pm 2, 0, 2)$;
vértices sobre a reta não focal: $(0, \pm 1, 2)$.

(f) A seção plana é uma hipérbole contida no plano $x = 2$, com
centro: (2,0,0);
reta focal: $l := \{(2, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$;
reta não focal: $l' := \{(2, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$;
vértices: $(2, 0, \pm 2)$;
vértices imaginários: $(2, \pm 1, 0)$;
focos: $(2, 0, \pm\sqrt{5})$;
assíntotas $r^+ = \{(2, t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $r^+ = \{(2, t, -2t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(g) A secção plana é uma parábola contida no plano $y = 1$, com
vértice: $(1, 1, 0)$;
reta focal: $l = \{(1, 1, t) : t \in \mathbb{R}\}$;
foco: $(1, 1, -\frac{1}{4})$;
diretriz: $\mathcal{L} = \{(t, 1, \frac{1}{4}) : t \in \mathbb{R}\}$.

29. $r : (-1 + 2t, 1, \sqrt{3}t)$.

30. $r : (2, t, 2t)$ e $l : (2, t, -2t)$.