Universidade Federal Fluminense
GGM00160-Geometria Analítica e Cálculo Vetorial I — Professora: Dirce Uesu Pesco
GGM00125-Geometria Analítica Básica — dirce.uff09@gmail.com

Lista de Exercícios - Produto Vetorial e Misto

1. Sejam $\vec{u} = (3, 2, -1)$, $\vec{v} = (0, 2, -3)$ e $\vec{w} = (2, 6, 7)$. Calcule:
   (a) $\vec{v} \times \vec{w}$ (b) $\vec{w} \times \vec{v}$ (c) $-\vec{w} \times \vec{v}$ (d) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
   (f) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ (g) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$ (h) $\vec{u} \times (\vec{v} - 2\vec{w})$ (i) $(\vec{u} \times \vec{v}) - 2\vec{w}$

2. Use o produto vetorial para encontrar um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos casos:
   (a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$ (b) $\vec{u} = (1, -2, 2)$ e $\vec{v} = (0, 5, -3)$

3. Encontre um vetor que é ortogonal a ambos $\vec{u}$ e $\vec{v}$:
   (a) $\vec{u} = (-6, 4, 2)$ e $\vec{v} = (3, 1, 5)$ (b) $\vec{u} = (-2, 1, 5)$ e $\vec{v} = (3, 0, -3)$

4. Encontre a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$:
   (a) $\vec{u} = (1, -1, 2)$ e $\vec{v} = (0, 3, 1)$ (b)$\vec{u} = (2, 3, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 2, -2)$
   (c) $\vec{u} = (3, -1, 4)$ e $\vec{v} = (6, -2, 8)$

5. Encontre a área do triângulo de vértices P, Q e R :
   (a) $P(2, 6, -1)$, $Q(1, 1, 1)$ e $R(4, 6, 2)$ (b) $P(1, -1, 2)$, $Q(0, 3, 4)$ e $R(6, 1, 8)$

6. Dados os vetores $\vec{u} = (4, 2, 1)$ e $\vec{v} = (-3, 2, 7)$, calcule:
   (a)$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ (b) $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ (c) $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2$ (d) $\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

7. Dados os vetores $\vec{u} = (4, 2, 1)$, $\vec{v} = (-3, 2, 7)$e $\vec{w} = (-3, 2, 7)$, calcule:
   (a) $\vec{u} \times \vec{v}$ (b) $(\vec{v} \times \vec{u})$ (c) $-(\vec{v} \times \vec{u})$ (d) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$ (e) $(\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
   (f) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}$ (g) $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$ (h) $\vec{u} \times \vec{0}$ (i) $\vec{0} \times \vec{u}$ (j) $\vec{u} \times \vec{u}$

8. Encontre um vetor $\vec{v}$ ortogonal a $\vec{u} = (2, 3, -5)$.

9. Calcule $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ de:
   (a)$\vec{u} = (-1, 2, 4)$, $\vec{v} = (3, 4, -2)$ e $\vec{w} = (-1, 2, 5)$;
   (b)$\vec{u} = (3, -1, 6)$, $\vec{v} = (2, 4, 3)$ e $\vec{w} = (5, -1, 2)$;

10. Suponha que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 3$. Encontre:
   (a) $\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$ (b) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$ (c) $\vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$ (d) $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$ (e)$(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v}$
   (f) $-\vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$ (g) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$ (h) $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{w})$

11. Calcule o volume do paralelepípedo de lados $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$.
   (a) $\vec{u} = (3, 2, -1)$, $\vec{v} = (0, 2, -3)$ e $\vec{w} = (2, 6, 7)$ (b) $\vec{u} = (2, 6, -2)$, $\vec{v} = (0, 4, -2)$ e $\vec{w} = (2, 2, -4)$
   (c) $\vec{u} = (3, 1, 2)$, $\vec{v} = (4, 5, 1)$ e $\vec{w} = (1, 2, 4)$

12. Sejam $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 0, 1)$, $\vec{w}_1 = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, $\vec{w}_2 = \vec{u} + 3\vec{v}$ e $\vec{w}_3 = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Determine o volume do paralelepípedo definido por $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ e $\vec{w}_3$.

13. Mostre que qualquer que seja o valor de a, a norma do vetor $(1 - a, 1, a - 2)$ é igual a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (2, a, 1)$.

14. Sejam $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$.Mostre que $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$ e $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

15. Use o produto vetorial para encontrar o seno do ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, 3, -6)$ e $\vec{v} = (2, 3, 6)$.

16. Prove as seguintes identidades:
    (a) $(\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (b) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{z}) = -(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{z}) \cdot \overrightarrow{v}$ (c) $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\ ) = 0$

17. O volume do tetraedro é dado por: $\frac{1}{3}$(área da base) . (altura). Encontre o volume do tetraedro de vértices P, Q, R e S.
    (a) $P(-1, 2, 0), Q(2, 1, -3), R(1, 0, 1)$ e $S(3, -2, 3)$.
    (b) $P(0, 0, 0), Q(1, 2, -1), R(3, 4, 0)$ e $S(-1 - 3, 4)$.

Respostas de alguns exercícios::

Lista de Exercícios - Produto Vetorial e Misto

(01) (a) $(32, -6, -4)$ (b) $(-32, 6, 4)$ (c) $(32, -6, -4)$ (d) $(-14, -20, -82)$ (f) $(27, 40, -42)$
(g) $(0, 176, -264)$ (h) $(-44, 55, -22)$ (i) $(-8, -3, -8)$

(02) (a) $(-1, 0, 1)$ (b) $(-4, 3, 5)$

(03) (a) $(18, 36, -18)$ (b) $(-3, 9, -3)$

(04) (a) $\sqrt{59}$ (b) $\sqrt{101}$ (c) 0;

(05) (a) $\frac{\sqrt{374}}{2}$ (b) $\sqrt{285}$

(06) (a) 0 (b) 0 (c) 1301 (d) 1301; Calcule $\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2$ (Resp:82)

(07) (a) $(12, -31, 14)$ (b) $(-12, 31, -14)$ (c) $(12, -31, 14)$ (d) $(24, -62, 28)$ (e) $(24, -62, 28)$
(f) $(12, -31, 14)$ (g) $(12, -31, 14)$ (h) $\overrightarrow{0}$ (i) $\overrightarrow{0}$ (j) $\overrightarrow{0}$; Observe as propriedades de produto vetorial;
Especifique que propriedades usou.

(08) Por exemplo $(-3, 7, 3)$.

(09) (a) -10 (b) -110;

(10) (a) -3 (b) 3 (c) 3 (d) -3 (e) -3 (f) 3 (g) 3 (h)0; Mostre que se duas linhas de uma matriz
são trocadas, o determinante muda de sinal.

(11) (a) 88 (b) 16 (c) 45

(12) 44

(13) Observe que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (1 - a, 1, a - 2)$.

(15) $\frac{12\sqrt{14}}{49}$;

(17) (a) $\frac{4}{3}$ (b) 1.

Bibliografia usada:

- Geometria Analítica: Reis/Silva; Ed. LTC, 2^a edição, 1996
- Geometria Analítica: Lehmann, Charles; Ed. Globo, 1942.
- Geometria Analítica: Murdoch, David; Ed. LTC, 1969
- Cálculo Diferencial a Várias Variáveis:Uma Introdução à Teoria de Otimização; H. J. Bortolossi, Ed. PUC-Rio,2002.
- Álgebra Linear com Aplicações; H. Anton e C. Rorres; Ed.Bookman, 8a edição, 2001.