

CEDERJ – Centro de Educação Superior a
Distância do Estado do Rio de Janeiro

Curso: Engenharia de Produção
Disciplina: Mecânica Geral

Aula 3 – Sistemas Equivalentes de Forças

CONTEUDISTA: Prof. Jorge A. R. Duran

29 de Janeiro de 2020

Conteúdo

3.1	Meta	1
3.2	Objetivos	1
3.3	Introdução	1
3.4	Produto Vetorial	2
3.5	Momento de uma força em relação a um ponto	3
3.6	Momento de uma força em relação a um eixo	4
3.7	Momentos de Binário	5
3.8	Deslocamento de uma força fora da sua linha de ação com adição de um binário	6
3.9	Exemplos e Atividades	8
3.10	Conclusão	15
3.11	Resumo	15

3.1 Meta

Aprender a reduzir sistemas de forças a um sistema força-binário.

3.2 Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. Calcular momentos de forças em relação a um ponto e a um eixo.
2. Reduzir sistemas de forças a uma única força e um binário.

3.3 Introdução

Nas aulas anteriores foram utilizados vetores cartesianos para representar forças no espaço. Quando a linha de ação de várias destas forças coincidem em um ponto, a resultante pode ser encontrada mediante a soma dos respectivos vetores cartesianos. A presente aula trata de problemas em que a linha de ação das forças não passa pelo ponto de interesse, provocando uma tendência de giro do corpo ao qual foi aplicada a força em torno desse ponto e em uma determinada direção. Este efeito é conhecido como momento de uma força e também será representado por um vetor. Ao final da aula veremos como substituir um sistema de forças e momentos pelo seu equivalente estático.

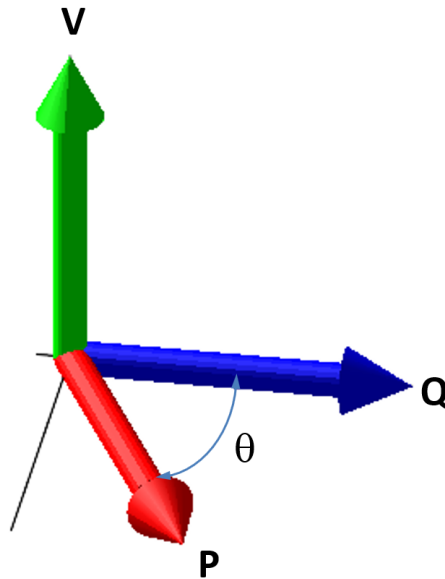


Figura 3.1: O produto vetorial de \mathbf{P} e \mathbf{Q} (nessa ordem) é um novo vetor \mathbf{V} perpendicular ao plano definido pelos vetores operandos.

3.4 Produto Vetorial

Em aulas anteriores foram definidas algumas das principais operações com vetores. O produto escalar de vetores foi definido como uma operação cujo resultado é um escalar e que consiste no produto da soma das componentes dos respectivos operandos. Para a presente aula será necessário conhecer uma nova operação, o produto vetorial de dois vetores. Considere os vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} com orientações diferentes tal que existe um ângulo θ entre eles (figura 3.1). O produto vetorial será:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \tag{3.1}$$

Note que usamos um (\times) em lugar do ponto (\cdot) para diferenciar a multiplicação vetorial da escalar. O resultado do produto vetorial é um novo vetor \mathbf{V} perpendicular ao plano que contém os operandos \mathbf{P} e \mathbf{Q} . Os operandos na equação 3.1 não comutam sem mudar o resultado, ou seja, $\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -\mathbf{V}$. O módulo $\|\mathbf{V}\|$ do vetor \mathbf{V} se calcula considerando os módulos dos vetores envolvidos na multiplicação e o ângulo formado pelas linhas de ação destes vetores (sempre menor ou igual a 180°):

$$\|\mathbf{V}\| = \|\mathbf{P}\| \cdot \|\mathbf{Q}\| \cdot \text{sen } \theta \tag{3.2}$$

Se os vetores \mathbf{P} e \mathbf{Q} estão na forma de componentes o produto vetorial (de acordo com a equação 3.1) será:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} &= (P_1 \cdot \hat{e}_1 + P_2 \cdot \hat{e}_2 + P_3 \cdot \hat{e}_3) \times (Q_1 \cdot \hat{e}_1 + Q_2 \cdot \hat{e}_2 + Q_3 \cdot \hat{e}_3) \\ \mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} &= P_1 Q_1 \hat{e}_1 \times \hat{e}_1 + P_1 Q_2 \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 + P_1 Q_3 \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 + \\ & P_2 Q_1 \hat{e}_2 \times \hat{e}_1 + P_2 Q_2 \hat{e}_2 \times \hat{e}_2 + P_2 Q_3 \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 + \\ & P_3 Q_1 \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 + P_3 Q_2 \hat{e}_3 \times \hat{e}_2 + P_3 Q_3 \hat{e}_3 \times \hat{e}_3 \end{aligned} \tag{3.3}$$

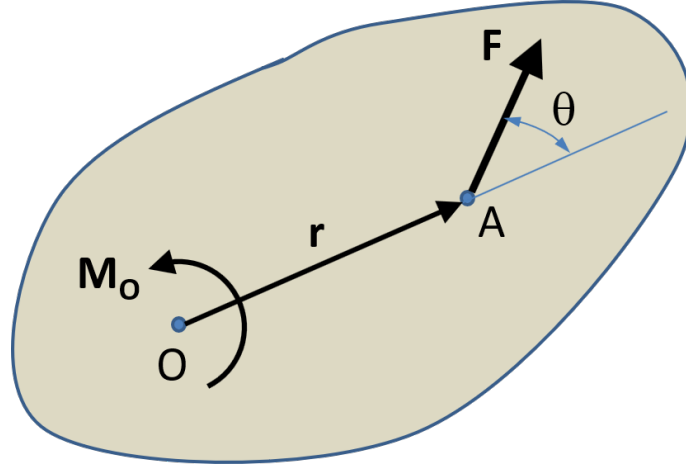


Figura 3.2: O vetor de momento \mathbf{M}_O está em um eixo perpendicular ao plano definido por \mathbf{r} e \mathbf{F} e reflete a tendência do vetor de força \mathbf{F} aplicado no ponto A a girar o corpo rígido no sentido anti-horário (nesta ilustração) em torno deste eixo.

Os produtos vetoriais dos vetores unitários se calculam pela definição dada na equação 3.1. Por exemplo, o produto $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = 0$ já que o ângulo entre $\hat{\mathbf{e}}_1$ e ele próprio é zero. Já o produto $\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3$ e o produto $\hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = -\hat{\mathbf{e}}_3$ porque o produto vetorial é anticomutativo. Utilizando estas definições temos:

$$\mathbf{V} = (P_2 Q_3 - P_3 Q_2) \hat{\mathbf{e}}_1 + (P_3 Q_1 - P_1 Q_3) \hat{\mathbf{e}}_2 + (P_1 Q_2 - P_2 Q_1) \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (3.4)$$

Que representa o desenvolvimento do seguinte pseudo-determinante:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

O sentido do vetor resultante do produto vetorial pode ser determinado pela regra da mão direita que consiste em alinhar os dedos desta mão com o primeiro dos operandos, neste caso \mathbf{P} , e dobrá-los no sentido de \mathbf{Q} . O dedo polegar indicará a orientação de \mathbf{V} .

3.5 Momento de uma força em relação a um ponto

Como sabemos, vetores de posição são utilizados para posicionar pontos em relação a outros no plano ou no espaço. A posição do ponto A de aplicação de uma força \mathbf{F} em um corpo rígido pode então ser definida por um vetor de posição \mathbf{r} (figura 3.2). O momento \mathbf{M}_O da força \mathbf{F} em relação ao ponto O se define como o produto vetorial de \mathbf{r} e \mathbf{F} (nessa ordem):

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.6)$$

Por se tratar de um produto vetorial o vetor \mathbf{M}_O estará em um eixo perpendicular ao plano definido por \mathbf{r} e \mathbf{F} . O módulo de \mathbf{M}_O se calcula utilizando equação 3.2.

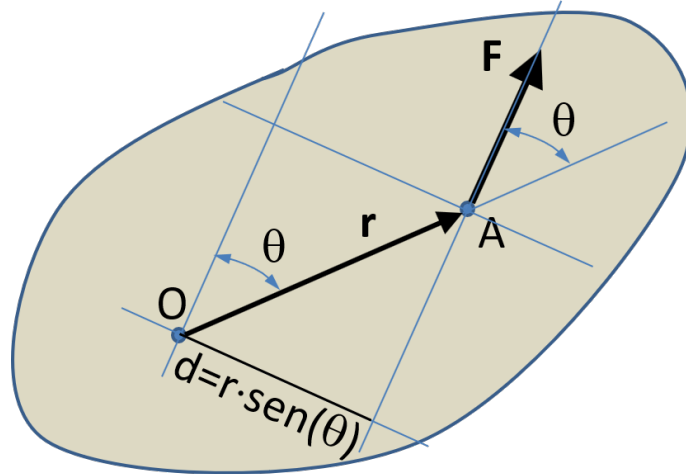


Figura 3.3: O módulo M_O do momento da força em relação a o ponto O pode ser calculado pelo produto dos escalares F e $d = r \cdot \text{sen}(\theta)$.

Observe que o produto $d = r \cdot \text{sen}(\theta)$ (figura 3.3) é a menor distância entre a linha de ação de \mathbf{F} e o ponto O . Para $\theta = 90^\circ$ a distância d coincide com o módulo do vetor de posição $\|\mathbf{r}\|$ e nesse caso o módulo do momento será o máximo possível para um dado \mathbf{F} . No outro extremo, quando o ângulo $\theta = 0^\circ$ a linha de ação da força passa pelo ponto O e neste caso não haverá momento \mathbf{M}_O .

$$M_O = F \cdot r \cdot \text{sen}(\theta) = F \cdot d \quad (3.7)$$

Para o caso de várias forças concorrentes \mathbf{F}_i o momento \mathbf{M}_{OR} da força resultante \mathbf{F}_R em relação ao ponto O é igual à soma dos momentos das várias forças em relação ao mesmo ponto:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{OR} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_R = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n) \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n \\ &= \sum_n \mathbf{r} \times \mathbf{F}_n \end{aligned} \quad (3.8)$$

Na equação 3.8 foi aplicada a propriedade distributiva do produto vetorial. Se cada uma das forças que integram o conjunto tiver um vetor de posição diferente até sua linha de ação, ou seja, se não forem concorrentes, o momento total será:

$$\mathbf{M}_{OR} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n = \sum_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n \quad (3.9)$$

3.6 Momento de uma força em relação a um eixo

O módulo da componente de \mathbf{M}_O em torno de qualquer outro eixo que passa por O mas que não coincide com àquele na direção normal ao plano que contém \mathbf{r} e \mathbf{F} pode ser calculado utilizando o produto escalar. Com base na figura 3.4, para o eixo OQ por exemplo, teremos:

$$M_{OQ} = \mathbf{M}_O \cdot \hat{\mathbf{e}}_{OQ} = \|\mathbf{r} \times \mathbf{F}\| \cdot \|\hat{\mathbf{e}}_{OQ}\| \cdot \cos(\theta) \quad (3.10)$$

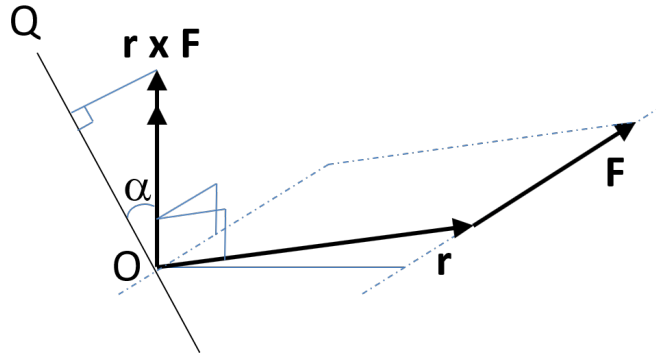


Figura 3.4: O vetor \mathbf{M}_O é normal ao plano que contém os vetores \mathbf{r} e \mathbf{F} . A magnitude da componente de \mathbf{M}_O em outro eixo OQ pode ser calculada utilizando o produto escalar. Note que se utilizam duas setas para diferenciar um vetor de momentos de um vetor de força.

Onde $\hat{\mathbf{e}}_{OQ}$ é o vetor unitário na direção OQ . O mesmo resultado pode ser obtido mediante a combinação de produto escalar e produto vetorial na ordem $\hat{\mathbf{e}}_{OQ} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. Utilizando a equação 3.4 temos:

$$M_{OQ} = \hat{\mathbf{e}}_{OQ} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

$$M_{OQ} = (r_2 F_3 - r_3 F_2) \hat{e}_1^{OQ} + (r_3 F_1 - r_1 F_3) \hat{e}_2^{OQ} + (r_1 F_2 - r_2 F_1) \hat{e}_3^{OQ} \quad (3.11)$$

Esta combinação de operações é chamada de produto triplo de vetores. O momento de uma força em torno de um eixo será então o resultado do seguinte determinante:

$$M_{OQ} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1^{OQ} & \hat{e}_2^{OQ} & \hat{e}_3^{OQ} \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

Note as diferenças entre o resultado dos determinantes nas equações 3.5 e 3.12. O resultado do primeiro é um vetor enquanto que o do segundo é um escalar (a componente de \mathbf{M}_O no eixo OQ). Isto explica por que utilizamos a palavra pseudo-determinante em referência à equação 3.5.

3.7 Momentos de Binário

Na situação em que várias forças não concorrentes tendem a imprimir um movimento de giro ao corpo em torno de um certo ponto O , por exemplo, deve ser abordado mediante a equação 3.9. Uma situação particular ocorre quando no conjunto de forças não concorrentes existem duas de igual módulo e direção mas de sentidos opostos (forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 na figura 3.5). Esta configuração é chamada de binário. Aplicando a equação 3.9 para o momento resultante em torno do ponto O tem-se:

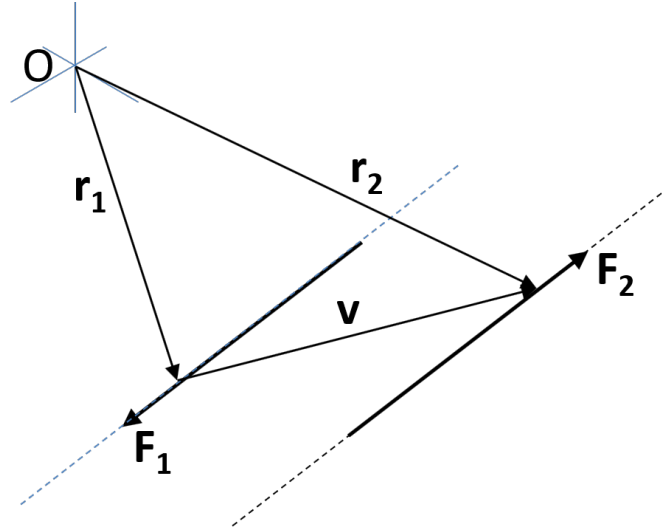


Figura 3.5: Duas forças paralelas de igual módulo geram um vetor de binário.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_O &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 \\
 \mathbf{M}_O &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + (\mathbf{r}_1 + \mathbf{v}) \times \mathbf{F}_2 \\
 \mathbf{M}_O &= \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) + \mathbf{v} \times \mathbf{F}_2
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Mas as forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 são iguais e de sentido contrário logo o termo $(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$ na equação 3.13 é zero resultando em:

$$\mathbf{M} = \mathbf{v} \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{v} \times \mathbf{F}_1
 \tag{3.14}$$

Onde \mathbf{v} é um vetor arbitrário que vai desde qualquer ponto da linha de ação de \mathbf{F}_1 até qualquer ponto da linha de ação de \mathbf{F}_2 . Os vetores de posição não aparecem na equação 3.14 o que significa que o vetor binário é um vetor livre que independe da localização do ponto \mathbf{O} . Também por este motivo eliminamos deliberadamente o subscrito \mathbf{O} de \mathbf{M} na equação 3.14. O vetor binário, no entanto, é perpendicular ao plano que contém as forças. Sendo um vetor, o binário está subordinado às operações vetoriais conhecidas como adição e subtração, multiplicação por um escalar, produto interno e produto vetorial.

3.8 Deslocamento de uma força fora da sua linha de ação com adição de um binário

Sabemos que o efeito de uma força não se altera ao deslocá-la ao longo da sua linha de ação. Para aplicar a força em outro ponto que não pertence à linha de ação original, mantendo-se o mesmo efeito sobre o corpo rígido, será necessário acrescentar um binário de valor igual ao produto da força vezes a distância entre a nova linha de ação e a anterior. Esta situação está demonstrada na figura 3.6. Inicialmente temos uma força aplicada no ponto \mathbf{A} (figura 3.6 (a)). A posição deste ponto com relação à origem está definida pelo vetor de posição \mathbf{r} . A aplicação de duas forças de valor igual mas sentidos opostos em \mathbf{O} não altera o efeito de \mathbf{F} (figura 3.6 (b)). As forças

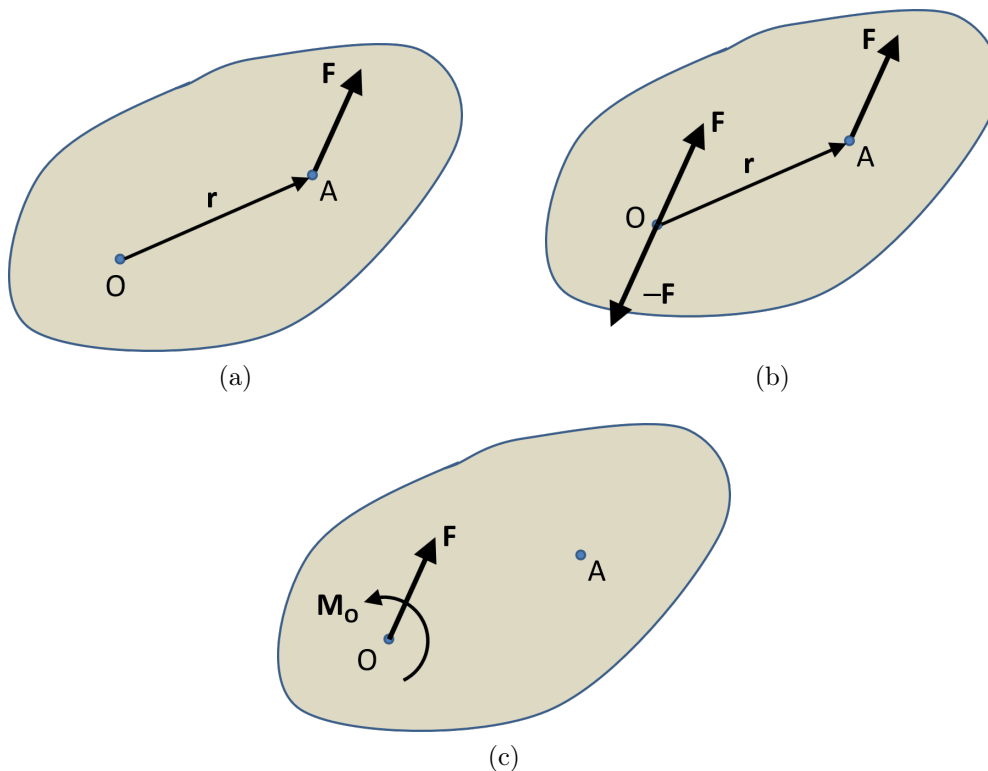


Figura 3.6: Uma força atuando no ponto **A** é equivalente a um sistema força binário no ponto **O**. Observe que, sendo \mathbf{M}_O um vetor livre, poderia atuar em qualquer ponto do corpo. É usual, no entanto, situá-lo no ponto **O**.

\mathbf{F} em **A** e $-\mathbf{F}$ em **O** formam um binário que permite a substituição de ambas por \mathbf{M}_O (figura 3.6 (c)). O sistema assim obtido denomina-se sistema força-binário.

Quando em lugar de uma são n forças atuando no corpo, o procedimento pode ser aplicado a cada uma delas desde que o ponto **O** seja o mesmo, obtendo-se n sistemas forças-binário. As n forças em **O** serão concorrentes e poderão ser somadas vetorialmente para obter uma única força resultante \mathbf{R} , como discutido em aulas anteriores. O mesmo aplica-se aos n binários. Desta forma pode-se afirmar que qualquer sistema de forças pode ser reduzido a uma força e um binário resultantes que são equivalentes ao sistema original. As equações que governam este processo são:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum_n \mathbf{F}_n \\ \mathbf{M}_{OR} &= \sum_n \mathbf{M}_O \end{aligned} \tag{3.15}$$

Mais uma vez se utiliza o subscrito **O** para **M** por convenção já que o binário resultante também será um vetor livre. Sistemas equivalentes de forças são aqueles que podem ser reduzidos ao mesmo sistema força-binário em um dado ponto **O**.

Se as linhas de ação de \mathbf{R} e \mathbf{M}_{OR} são perpendiculares entre si, o que ocorre por exemplo quando o sistema de forças atuantes é coplanar ou paralelo, pode-se obter uma simplificação adicional ao reduzir o sistema força-binário a uma única força

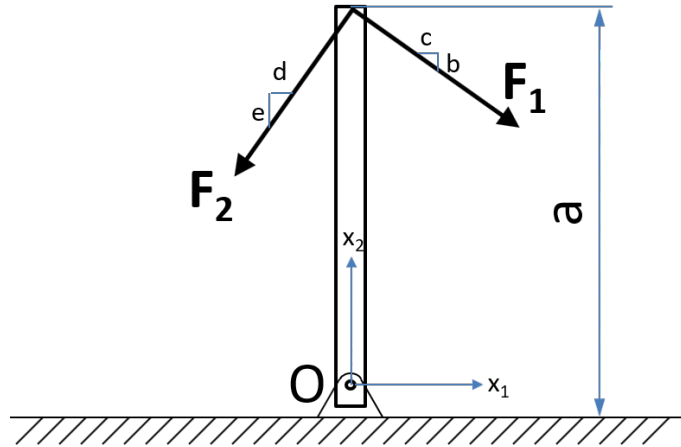


Figura 3.7: Figura do exemplo 1.

Tabela 3.1: Dados numéricos para o exemplo 1.

Forças, KN		Comprimentos				
F_1	F_2	a [m]	b	c	d	e
25	50	2	1	1	1	$\sqrt{3}$

resultante \mathbf{R} . A menor distância entre a linha de ação desta última e o ponto \mathbf{O} pode ser calculada pela equação 3.7 adaptada a seguir:

$$d = \frac{M_{OR}}{R} \quad (3.16)$$

3.9 Exemplos e Atividades

Exemplo 1. O apoio no ponto \mathbf{O} do componente mostrado possibilita o giro no plano da figura 3.7. Calcule o momento resultante das forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 em torno do ponto \mathbf{O} . Utilize os dados da tabela 3.1.

Solução: Primeiramente expressamos os vetores de força e o vetor de posição como vetores cartesianos no referencial $x_1 x_2$ mostrado na figura 3.7. Observe que é necessário, mesmo em problemas planos, utilizar a representação vetorial cartesiana completa, isto é, com três componentes, para aplicar corretamente o conceito de produto vetorial.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= 0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + a \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 + 0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \mathbf{F}_1 &= F_1 \cdot \cos \left[\arctan \left(\frac{b}{c} \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 - F_1 \cdot \sin \left[\arctan \left(\frac{b}{c} \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 + 0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \mathbf{F}_2 &= -F_2 \cdot \cos \left[\arctan \left(\frac{e}{d} \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 - F_2 \cdot \sin \left[\arctan \left(\frac{e}{d} \right) \right] \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 + 0 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo os valores da tabela 3.1 a utilizando a equação 3.5 temos:

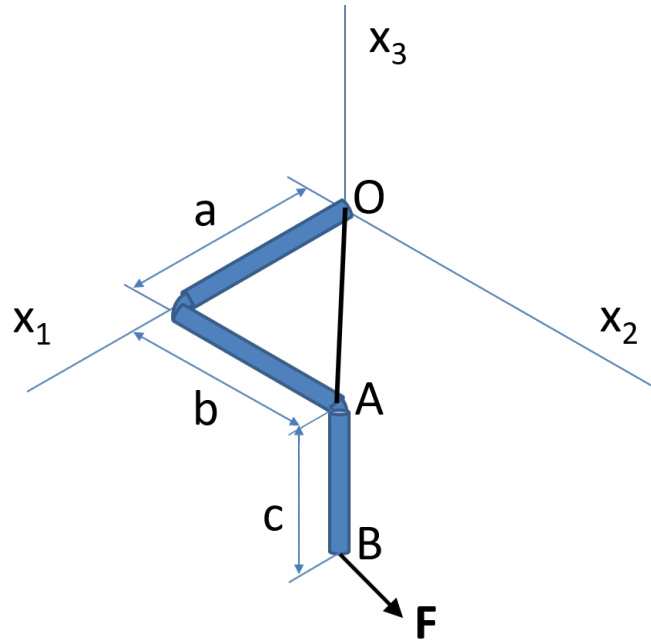


Figura 3.8: Figura do exemplo 2.

Tabela 3.2: Dados numéricos para o exemplo 2.

\mathbf{F}, KN	a, m	b, m	c, m
$6 \cdot \hat{e}_1 - 3 \cdot \hat{e}_2 + 5 \cdot \hat{e}_3$	2	2	1

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 25 \frac{\sqrt{2}}{2} & -25 \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = -25 \sqrt{2} \cdot \hat{e}_3 \quad KN \cdot m \quad (3.18)$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -25 & -25 \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = 50 \cdot \hat{e}_3 \quad KN \cdot m$$

Como esperado, os vetores de momento das respectivas forças estão orientados para fora do plano (no eixo x_3). Por último, para calcular o momento resultante aplica-se a equação 3.9:

$$\mathbf{M}_{OR} = \sum_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n = (-25 \sqrt{2} + 50) \cdot \hat{e}_3 \approx 14,6 \cdot \hat{e}_3 \quad KN \cdot m \quad (3.19)$$

Exemplo 2. Calcule a componente escalar do momento da força \mathbf{F} em torno do eixo OA . Utilize os dados da tabela 3.2. Observe que a orientação de \mathbf{F} na figura 3.8 é apenas ilustrativa. Dependendo dos dados da tabela 3.2, \mathbf{F} pode apontar em outra direção.

Solução: Este problema consiste em calcular o momento de uma força em relação a um eixo (seção 3.6). Para utilizar a equação 3.12 precisaremos das seguintes

informações:

- (a) o vetor unitário na direção \mathbf{OA} .
- (b) o vetor $\mathbf{r}_{\mathbf{OB}}$ que posiciona o ponto \mathbf{B} em relação ao ponto \mathbf{O} .
- (c) o vetor da força \mathbf{F} .

O vetor de força \mathbf{F} é dado do problema (tabela 3.2) enquanto que os vetores de posição estão detalhados a seguir:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{OA}} &= \frac{\mathbf{r}_{\mathbf{OA}}}{\|\mathbf{r}_{\mathbf{OA}}\|} = \frac{a \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + b \cdot \hat{\mathbf{e}}_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{OA}} &= \frac{2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + 2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2) \\ \mathbf{r}_{\mathbf{OB}} &= a \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + b \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 - c \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \mathbf{r}_{\mathbf{OB}} &= 2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + 2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 - 1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \quad m\end{aligned}\tag{3.20}$$

Substituindo as componentes dos vetores na equação 3.12 e resolvendo o determinante temos:

$$\begin{aligned}M_{OA} = \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{OA}} \cdot (\mathbf{r}_{\mathbf{OB}} \times \mathbf{F}) &= \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} \\ M_{OA} &= -\frac{9 \cdot \sqrt{2}}{2} \cong -6,36 \quad KN \cdot m\end{aligned}\tag{3.21}$$

Exemplo 3. O módulo das forças nos cabos EG e EF é $800N$ e $1000N$ respectivamente. Todas as dimensões estão em polegadas (inches). Sempre utilizando álgebra de vetores calcule:

- (a) O vetor resultante $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}$ das forças que os cabos exercem no ponto E .
- (b) O vetor de momentos $\mathbf{M}_{\mathbf{A}}$ que esta força resultante provoca em A .
- (c) A componente escalar de $\mathbf{M}_{\mathbf{A}}$ ao longo da linha AD .

Solução: Primeiramente observe que o referencial cartesiano deste problema é o convencional xyz . Utilizaremos então os também convencionais vetores unitários $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ e $\hat{\mathbf{k}}$, colineares com cada um dos eixos coordenados. Para simplificar as equações, em alguns casos, representaremos os vetores cartesianos pelas suas componentes entre corchetes. Resolveremos cada item do exemplo por separado.

- (a) O vetor resultante $\mathbf{F}_{\mathbf{R}}$ das forças que os cabos exercem no ponto E .

Para expressar as forças nos cabos como vetores cartesianos precisamos dos vetores unitários na direção destas forças. Vetores unitários são adimensionais logo não será necessário neste momento transformar as polegadas em metros. Começamos calculando o comprimento total da placa (distância BC):

$$BC = \sqrt{36^2 + 48^2} = 60 \quad in.\tag{3.22}$$

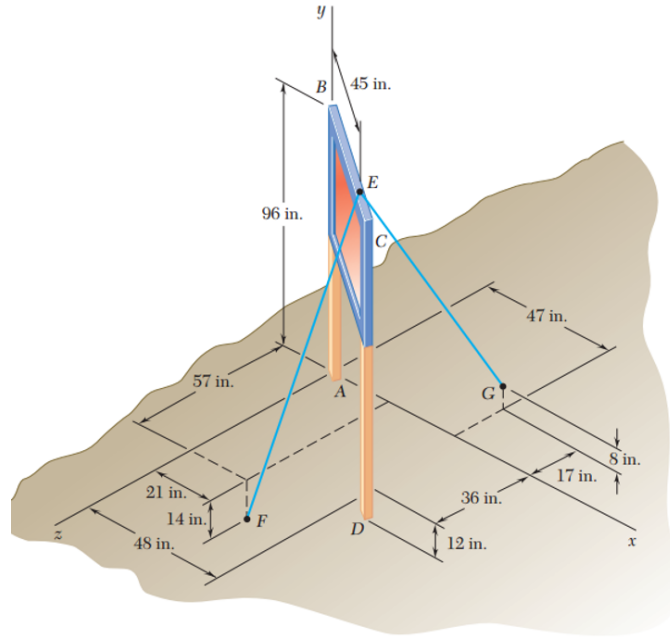


Figura 3.9: Figura do exemplo 3 [2].

As coordenadas do ponto E em x e z assim como os vetores na direção das forças serão:

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{45 \cdot 48}{BC} = 36 \text{ in.} \\
 E_z &= \frac{45 \cdot 36}{BC} = 27 \text{ in.} \\
 \mathbf{r}_{\mathbf{EG}} &= (47 - E_x) \cdot \hat{\mathbf{i}} + (8 - 96) \cdot \hat{\mathbf{j}} + (-17 - E_z) \cdot \hat{\mathbf{k}} \\
 \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{EG}} &= \frac{11 \cdot \hat{\mathbf{i}} - 88 \cdot \hat{\mathbf{j}} - 44 \cdot \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{11^2 + 88^2 + 44^2}} = \frac{1 \cdot \hat{\mathbf{i}} - 8 \cdot \hat{\mathbf{j}} - 4 \cdot \hat{\mathbf{k}}}{9} \\
 \mathbf{r}_{\mathbf{EF}} &= (21 - E_x) \cdot \hat{\mathbf{i}} + (-14 - 96) \cdot \hat{\mathbf{j}} + (57 - E_z) \cdot \hat{\mathbf{k}} \\
 \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{EF}} &= \frac{-15 \cdot \hat{\mathbf{i}} - 110 \cdot \hat{\mathbf{j}} + 30 \cdot \hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{15^2 + 110^2 + 30^2}} = \frac{-3 \cdot \hat{\mathbf{i}} - 22 \cdot \hat{\mathbf{j}} + 6 \cdot \hat{\mathbf{k}}}{23}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

De posse das direções dos cabos e dos módulos das forças que os solicitam, podemos definir os vetores cartesianos destas forças:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{\mathbf{EG}} &= 800 \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{EG}} = \frac{1}{9} [800 \quad -6400 \quad -3200] \text{ N} \\
 \mathbf{F}_{\mathbf{EF}} &= 1000 \cdot \hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{EF}} = \frac{1}{23} [-3000 \quad -22000 \quad 6000] \text{ N}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

A força resultante em E será a soma vetorial das forças concorrentes neste ponto:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{RE}} = \mathbf{F}_{\mathbf{EG}} + \mathbf{F}_{\mathbf{EF}} = \frac{1}{207} [-8600 \quad -345200 \quad -19600] \text{ N} \tag{3.25}$$

(b) O vetor de momentos \mathbf{M}_A que esta força resultante provoca em A .

Precisamos do vetor de posição do ponto E com relação ao ponto A . A constante de conversão entre polegadas e metros é a seguinte: $25.4 \times 10^{-3} m/in$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AE} &= 25.4 \times 10^{-3} \cdot [E_x \quad 96 \quad E_z] \\ \mathbf{r}_{AE} &= [0, 9144 \quad 2, 4384 \quad 0, 6858] \quad m\end{aligned}\quad (3.26)$$

O vetor de momentos que a força resultante dos cabos provoca no ponto A será:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_A &= \mathbf{r}_{AE} \times \mathbf{F}_{RE} \\ \mathbf{M}_A &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0, 9144 & 2, 4384 & 0, 6858 \\ \frac{-8600}{207} & \frac{-345200}{207} & \frac{-19600}{207} \end{vmatrix} \\ \mathbf{M}_A &= \begin{bmatrix} 912, 78 \\ 58, 089 \\ -1423, 6 \end{bmatrix} \quad N \cdot m\end{aligned}\quad (3.27)$$

(c) A componente escalar de \mathbf{M}_A ao longo da linha AD .

Precisamos do vetor de posição unitário entre os pontos A e D :

$$\hat{\mathbf{r}}_{AD} = \frac{\sqrt{26}}{312} [48 \quad -12 \quad 36] = \left[\frac{2\sqrt{26}}{13} \quad -\frac{1\sqrt{26}}{26} \quad \frac{3\sqrt{26}}{13} \right] \quad (3.28)$$

Por último, a componente de \mathbf{M}_A na direção AD será o produto triplo (eq. 3.12) dos vetores $\hat{\mathbf{r}}_{AD}$, \mathbf{r}_{AE} e \mathbf{F}_{RE} :

$$\begin{aligned}M_{AD} &= \hat{\mathbf{r}}_{AD} \cdot (\mathbf{r}_{AE} \times \mathbf{F}_{RE}) \\ M_{AD} &= \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{26}}{13} & -\frac{1\sqrt{26}}{26} & \frac{3\sqrt{26}}{13} \\ 0, 9144 & 2, 4384 & 0, 6858 \\ -8600 & -345200 & -19600 \end{vmatrix} \\ M_{AD} &= -132, 91 \quad N \cdot m\end{aligned}\quad (3.29)$$

Exemplo 4. Uma força $\|F\| = 2000 N$ está aplicada no ponto A da aba do perfil I mostrado. Encontre o sistema força-binário no ponto C equivalente ao efeito da força \mathbf{F} considerando $a = c = 50 mm$ e $b = 100 mm$

Solução: O primeiro passo é estabelecer um referencial cartesiano no ponto C . Para deslocar a força \mathbf{F} até o ponto C será necessário adicionar o binário $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ onde \mathbf{r} é o vetor de posição até o ponto de aplicação de \mathbf{F} . Para expressar \mathbf{r} e \mathbf{F} como vetores cartesianos e efetuar o produto vetorial devemos conhecer as componentes e o módulo de ambos. O vetor \mathbf{r} faz um ângulo β com a vertical (figura 3.11). Da

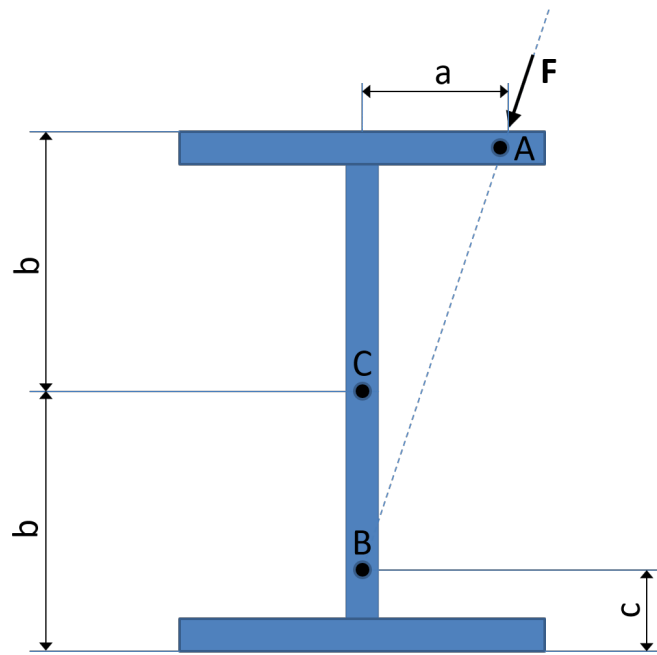


Figura 3.10: Figura do exemplo 4.

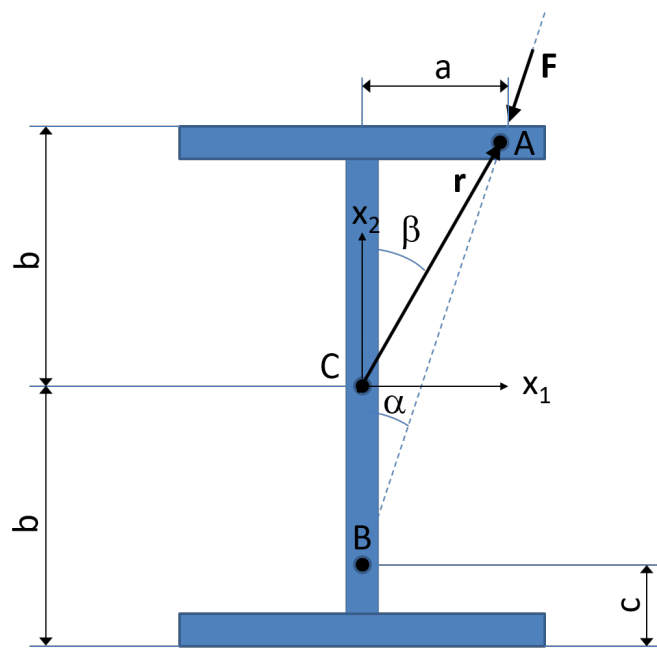


Figura 3.11: Figura do exemplo 4.

Tabela 3.3: Dados numéricos para a atividade 1.

\mathbf{F}, KN	a, m	b, m	c, m
$4 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 + 12 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 - 3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3$	4	3	-2

mesma forma o ângulo α indica a inclinação da força \mathbf{F} com relação ao referencial. Da geometria do problema tem-se:

$$\tan \beta = \frac{a}{b} \qquad \tan \alpha = \frac{a}{2b - c} \qquad (3.30)$$

É possível expressar também o módulo do vetor de posição \mathbf{r} em função das distâncias a e b :

$$\|\mathbf{r}\| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (3.31)$$

De posse dos módulos e inclinações de \mathbf{r} e \mathbf{F} podemos expressar ambos como vetores cartesianos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= [\|\mathbf{r}\| \cdot \text{sen}\beta \quad \|\mathbf{r}\| \cdot \text{cos}\beta \quad 0] \\ \mathbf{F} &= [-\|\mathbf{F}\| \cdot \text{sen}\alpha \quad -\|\mathbf{F}\| \cdot \text{cos}\alpha \quad 0] \end{aligned} \qquad (3.32)$$

Substituindo valores e efetuando o produto vetorial temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ \mathbf{M} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \|\mathbf{r}\| \cdot \text{sen}\beta & \|\mathbf{r}\| \cdot \text{cos}\beta & 0 \\ -\|\mathbf{F}\| \cdot \text{sen}\alpha & -\|\mathbf{F}\| \cdot \text{cos}\alpha & 0 \end{vmatrix} \\ \mathbf{M} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ 0,05 & 0,1 & 0 \\ -632,45 & -1897,36 & 0 \end{vmatrix} \\ \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -31,6 \end{bmatrix} \quad N \cdot m \end{aligned} \qquad (3.33)$$

Atividade 1. : Atende ao objetivo 1: Resolver o exemplo 2 para os dados da tabela 3.3.

Comentários da Atividade 1: Utilize o procedimento descrito no exemplo 2 mas procurando assimilar o significado físico do momento de uma força como um vetor que expressa a tendência de giro do corpo em torno de um eixo. Os resultados são:

$$\begin{aligned} M_{OA} &= \hat{\mathbf{r}}_{OA} \cdot (\mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 12 & -3 \end{vmatrix} \\ M_{OA} &= -\frac{72}{5} \cong -14,4 \quad KN \cdot m \end{aligned} \qquad (3.34)$$

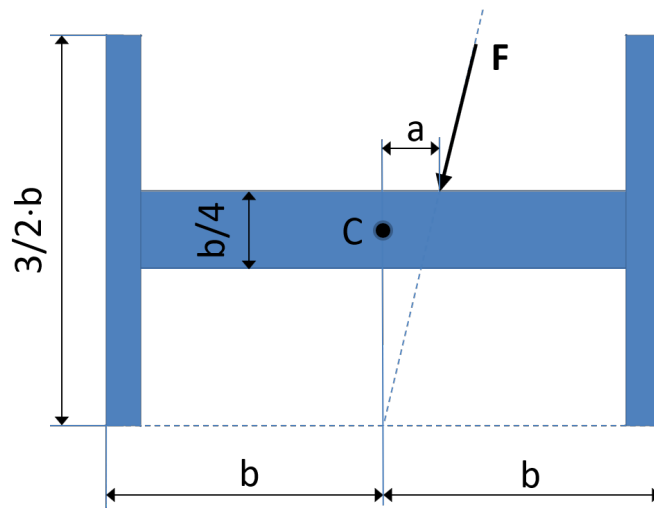


Figura 3.12: Figura da atividade 2.

Atividade 2. : Atende ao objetivo 2: Uma força $\|\mathbf{F}\| = 3\text{KN}$ está aplicada na alma do perfil I mostrado. Encontre o sistema força-binário no ponto \mathbf{C} equivalente ao efeito da força \mathbf{F} considerando $a = 15\text{mm}$ e $b = 100\text{mm}$.

Comentários da Atividade 2: O procedimento descrito no exemplo 4 deverá ser adaptado às condições da presente atividade. Os resultados, para um sistema cartesiano $x_1 x_2$ com origem no ponto \mathbf{C} são os seguintes:

$$\|\mathbf{F}_C\| = 3 \text{ KN} \quad \alpha = 9,72^\circ \quad \|\mathbf{M}\| = 38 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (3.35)$$

onde o ângulo α é formado entre o eixo x_2 e o vetor \mathbf{F} .

3.10 Conclusão

A principal conclusão da presente aula é que qualquer sistema de forças pode ser reduzido a um sistema força-binário que lhe é equivalente mediante a equação 3.15.

3.11 Resumo

Na presente aula foi discutido primeiramente o conceito de produto vetorial. Como resultado desta operação surge um novo vetor perpendicular ao plano que contém os operandos envolvidos.

O momento de uma força em relação a um determinado ponto, O por exemplo, é uma das principais aplicações do produto vetorial. Neste caso o produto vetorial é formado pelo vetor de força e pelo vetor de posição desde o ponto O até o ponto de aplicação da força. O momento de uma força expressa a tendência desta a girar o corpo em torno do ponto O .

Se for necessário projetar o momento de uma força em relação a um eixo utiliza-se o produto escalar. Neste caso o resultado será a componente do vetor de momento (escalar) na direção do eixo.

Duas forças de igual módulo, paralelas e de sentido contrário geram um binário que é um vetor livre porque independe da posição do ponto O em relação aos pontos de aplicação das forças. Binários são vetores que podem ser somados para encontrar um binário resultante.

Qualquer sistema de forças poderá ser reduzido a um sistema força-binário equivalente utilizando a equação [3.15](#).

Bibliografia

- [1] Stephen H. Crandall and Norman C. Dahl. *An introduction to the Mechanics of Solids*. The McGraw-Hill Companies, Inc., second with si units edition, 1978.
- [2] Ferdinand Beer et. al. *Vector Mechanics for Engineers: Statics and Dynamics*. The McGraw-Hill Companies, Inc., fourth edition, 2010.