

**CEDERJ – CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**

CURSO: Engenharia de Produção DISCIPLINA: Mecânica Geral

CONTEUDISTA: Jorge Alberto Rodriguez Duran

Aula 11 – Momentos de Inércia de Superfícies Planas

Metas

Definir, calcular e transformar algumas das mais importantes propriedades geométricas de superfícies planas.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

- 1 Calcular os momentos de segunda ordem (momentos de inércia) e produtos de inércia de superfícies planas mediante integração.
- 2 Aplicar o teorema dos eixos paralelos para calcular momentos e produtos de inércia de superfícies.
- 3 Calcular a orientação e o valor dos momentos principais de inércia.

Introdução

Na aula 6 aprendemos a localizar o centroide de superfícies planas e a calcular a resultante de forças continuamente distribuídas. Vimos que a posição do centroide depende da relação entre os momentos de área de primeira ordem e a própria área da superfície. Por outro lado, a resultante dos carregamentos é a área sob o diagrama de carga.

Na presente aula vamos desenvolver o conceito de momentos de área de segunda ordem (ou momentos de inércia) de superfícies. Aprenderemos a calcular os momentos de inércia em relação a eixos que passam pelo centroide da área. Claro que se for necessário determinar a posição deste centroide utilizaremos os procedimentos desenvolvidos na aula 6. Estudaremos também como os momentos de inércia variam com a inclinação dos eixos centroidais. Podemos pensar nos momentos de inércia como as propriedades de área que se opõem à rotação que os momentos fletores tendem a provocar em torno de um determinado eixo. Não devemos confundir os momentos de inércia de superfícies com os de massa, embora estes últimos também possam ser encarados como uma medida da resistência ao giro em torno de um eixo, mas neste caso referidos a uma massa e provocados por um torque. O conceito de momento de inércia encontra vasta aplicação na mecânica dos materiais e contribui para quantificar a intensidade as forças internas que surgem nos elementos como resposta à ação de cargas externas ou os deslocamentos angulares nas seções de interesse.

1.0 Momentos Axiais de Inércia de Superfícies

Considere uma placa homogênea sob a ação do próprio peso W (Figura 1). Em cada elemento de área dA da placa atua um peso elementar dW . A intensidade desse peso $dq = dW/dA$ pode variar linearmente com a distância até os eixos. Se esse for o caso, até o eixo x_1 , por exemplo, esta variação pode ser expressa como $dq = k \cdot x_2$ onde k é uma constante. Desta forma teremos $dW = dq \cdot dA = k \cdot x_2 \cdot dA$. Como de costume, as infinitas forças elementares de peso dW podem ser reduzidas a um sistema força-binário em torno de um eixo, por exemplo do eixo x_1 . Os módulos da força resultante R e do binário resultante M serão:

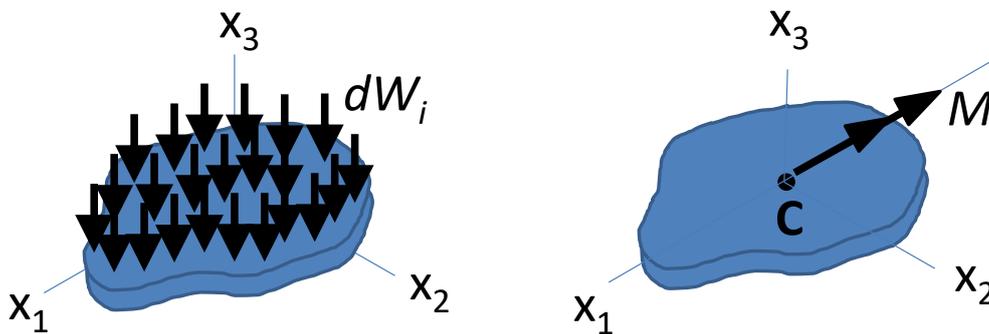


Figura 1 – Sistemas de forças de peso distribuídas na superfície de uma placa homogênea e o binário equivalente M quando a origem do referencial coincide com o centroide C .

$$R = \int_A dW = \int_A dq \cdot dA = k \int_A x_2 \cdot dA$$

$$M = \int_A x_2 \cdot dW = k \int_A x_2^2 \cdot dA$$

Eq. 1

Para o caso em que os eixos cartesianos passem pelo centroide C da placa a resultante será zero $R = 0$ devido a que a quantidade de momentos de área positivos $x_2 \cdot dA$ se iguala aos negativos $-x_2 \cdot dA$ e a integral (ou somatório de diferenciais) é nula. Nessa situação resta apenas o binário M e a quantidade $I_{x_1} = \int_A x_2^2 \cdot dA$ é conhecida como momento de área de segunda ordem (ou momento axial de inércia) em torno do eixo x_1 . Observe que, a diferença do Q_{x_1} (momento de primeira ordem) I_{x_1} será sempre positivo. O momento axial de inércia, ou simplesmente momento de inércia, tem unidades de comprimento elevadas à quarta potência (m^4 , e.g.), como se deduz da própria definição. Por analogia, o momento de inércia com relação ao eixo x_2 será:

$$I_{x_2} = \int_A x_1^2 \cdot dA$$

Eq. 2

Por outro lado, se a intensidade da força distribuída não apresenta variação linear até nenhum dos eixos, ou seja $dq = k$, tem-se:

$$R = \int_A dW = \int_A dq \cdot dA = k \int_A dA = k \cdot A$$

$$M = \int_A x_2 \cdot dW = k \int_A x_2 \cdot dA = k \cdot Q_{x1}$$

Eq. 3

A Eq. 3 mostra que, diferentemente do caso anterior (Eq. 1), quando dq é constante e o referencial cartesiano passa pelo centroide da superfície, o carregamento distribuído se reduz então a apenas uma força resultante R (já que o primeiro momento de área $Q_{x1} = 0$ e $M = 0$).

É importante destacar que as propriedades de área (momentos de área e momentos de inércia) são puramente geométricas e por tanto independentes do caráter da distribuição das forças de peso (constantes ou não). Apenas o sistema força-binário resultante estará afetado por esta distribuição. Além disso, nesta aula as forças de peso foram utilizadas para definir estas propriedades, mas outros sistemas de forças distribuídas poderão atuar na área, como por exemplo forças e momentos internos, pressão hidrostática etc.

2.0 Momento Polar de Inércia de Superfícies

Considere uma situação em que a variação linear do carregamento distribuído é uma função da distância polar r ($dq = k \cdot r$) até a origem do referencial da placa. Por analogia com o desenvolvimento dos momentos axiais de segunda ordem podemos definir o momento polar de inércia J como:

$$R = \int_A dW = \int_A dq \cdot dA = k \int_A r \cdot dA$$

$$M = \int_A r \cdot dW = k \int_A r^2 \cdot dA$$

$$J = \int_A r^2 \cdot dA$$

Eq. 4

Estas resultantes estarão sobre um eixo x' no plano da placa mas perpendicular à distância polar r (Figura 2). Se a quantidade de momentos infinitesimais de área a ambos os lados de x' é igual, $Q_{x'} = 0$ e o sistema de forças se reduz a um único binário. Igualmente, se $dq = k$ o sistema de forças distribuídas se reduz a uma única força resultante R (Eq. 3). O momento polar de inércia também tem unidades de comprimento à quarta potência. Uma relação entre os momentos axiais e o polar pode ser obtida a partir da definição de J :

$$J = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A (x_2^2 + x_1^2) \cdot dA = I_{x1} + I_{x2}$$

Eq. 5

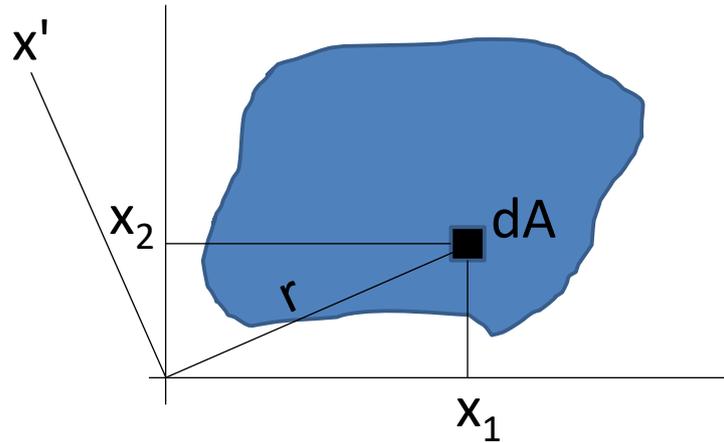


Figura 2 – Momentos de área de segunda ordem axiais se calculam como a integral de área das distâncias x_1 ou x_2 ao quadrado enquanto que no cálculo do momento polar se considera a distância polar r ao quadrado (Eq. 4).

Exemplo 1: Demonstre que o momento de inércia de uma área retangular com relação a qualquer eixo centroidal é igual ao produto da base pela altura ao cubo dividido por 12.

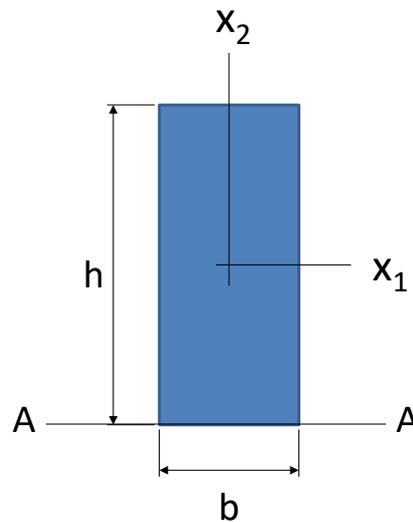


Figura 3 – Corresponde ao Exemplo 1.

Solução: Este e qualquer outro problema de determinação de momentos de inércia é basicamente um exercício de integração. Utilizando as definições para os momentos axiais de inércia I_{x1} e I_{x2} temos:

$$I_{x_1} = \int_A x_2^2 \cdot dA = 2 \int_0^{h/2} \int_0^b x_2^2 dx_1 dx_2 = 2 \int_0^{h/2} x_2^2 x_1 \Big|_0^b dx_2 = \frac{2x_2^3 b}{3} \Big|_0^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{x_2} = \int_A x_1^2 \cdot dA = 2 \int_0^{b/2} \int_0^h x_1^2 dx_2 dx_1 = 2 \int_0^{b/2} x_1^2 x_2 \Big|_0^h dx_1 = \frac{2x_1^3 h}{3} \Big|_0^{b/2} = \frac{hb^3}{12}$$

Eq. 6

Exemplo 2: Obtenha uma expressão para os momentos axiais e polar de inércia de uma seção circular maciça de diâmetro d em relação a um sistema de eixos cartesianos que passa pelo centroide da área.

Solução: Para uma seção circular maciça qualquer eixo que passe pelo centroide será um eixo de simetria logo os momentos axiais de inércia serão iguais e $J = 2I$. Neste caso convêm resolver a integral dupla em coordenadas polares:

$$I_{x_1} = \iint_A x_2^2 \cdot dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{d/2} (r \cdot \text{sen}(\theta))^2 r \cdot dr \cdot d\theta = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{J}{2}$$

Eq. 7

Exemplo 3 : Calcule o momento de inércia com relação ao eixo x_2 da área entre as curvas mostradas na Figura 4.

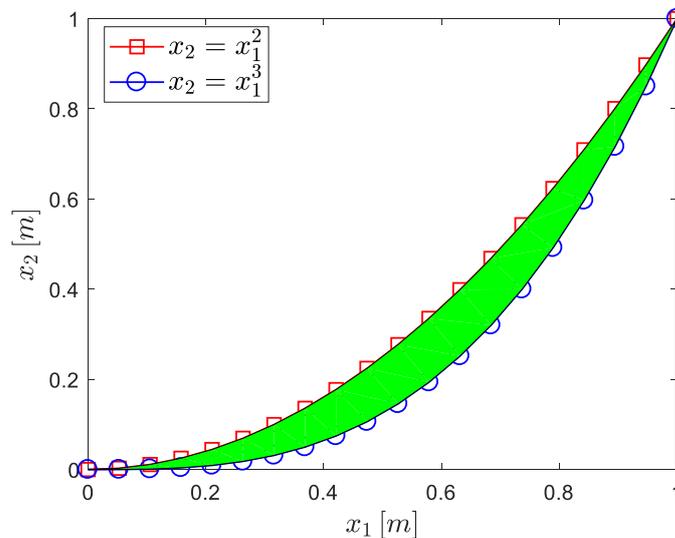


Figura 4 – Curvas correspondentes às parábolas $x_2 = x_1^2$ e $x_2 = x_1^3$ e a área sombreada entre elas.

Solução: Como nos exemplos anteriores, não será possível descrever a área com uma única função das duas variáveis $A(x_1; x_2)$. Assim, resolvemos a integral de área como duas integrais aninhadas. Neste caso convêm integrar primeiro em relação a x_2 entre os limites $x_2 = x_1^3$ e $x_2 = x_1^2$ e depois em relação a x_1 entre os limites constantes $x_1 = 0$ e $x_1 = 1$. Aplicando a definição de I_{x_2} e resolvendo a integral dupla da forma descrita temos:

$$\begin{aligned}
 I_{x_2} &= \int_A x_1^2 \cdot dA = \int_0^1 \int_{x_1^3}^{x_1^2} x_1^2 dx_2 dx_1 = \int_0^1 x_1^2 x_2 \Big|_{x_1^3}^{x_1^2} dx_1 \\
 &= \int_0^1 x_1^2 (x_1^2 - x_1^3) dx_1 = \int_0^1 x_1^4 - x_1^5 dx_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}
 \end{aligned}$$

Eq. 8

Exemplo 4: Calcule o momento polar de inércia da área delimitada pelas curvas $r = 1$ e $r = 2$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) em coordenadas polares (Figura 5) com relação ao polo ou origem.

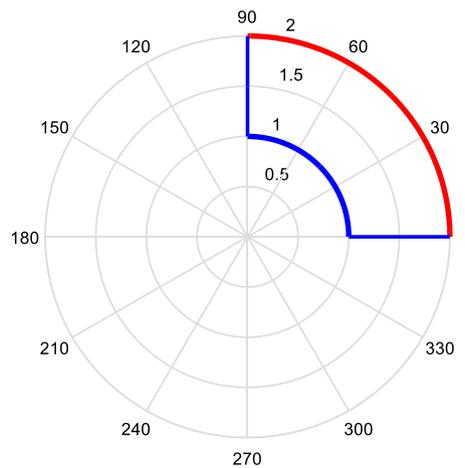


Figura 5 – Área entre as curvas $r = 1$ e $r = 2$ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) em coordenadas polares.

Solução: Aplicando a definição de J e integrando em coordenadas polares temos:

$$J = \int_A r^2 dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r^2 r dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{r^4}{4} \Big|_1^2 d\theta = \frac{15}{4} \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{15\pi}{8}$$

Eq. 9

Atividade 1: Calcule o momento de inércia com relação ao eixo x_1 (I_{x_1}) para a área entre as parábolas da Figura 4.

Comentários da Atividade 1: O procedimento permanece inalterado. É preciso, no entanto, prestar atenção aos detalhes do processo de integração. A solução segue:

$$\begin{aligned}
 I_{x_1} &= \int_A x_2^2 \cdot dA = \int_0^1 \int_{x_1^3}^{x_1^2} x_2^2 dx_2 dx_1 = \int_0^1 \frac{x_2^3}{3} \Big|_{x_1^3}^{x_1^2} dx_1 \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x_1^6 - x_1^9) dx_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{x_1^7}{7} - \frac{x_1^{10}}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{70}
 \end{aligned}$$

Eq. 10

Atividade 2: Calcule o momento de inércia em relação ao eixo vertical I_{x_2} da área sombreada entre a parábola $x_2^2 = x_1$ e a reta $x_2 = 4$ (Figura 6).

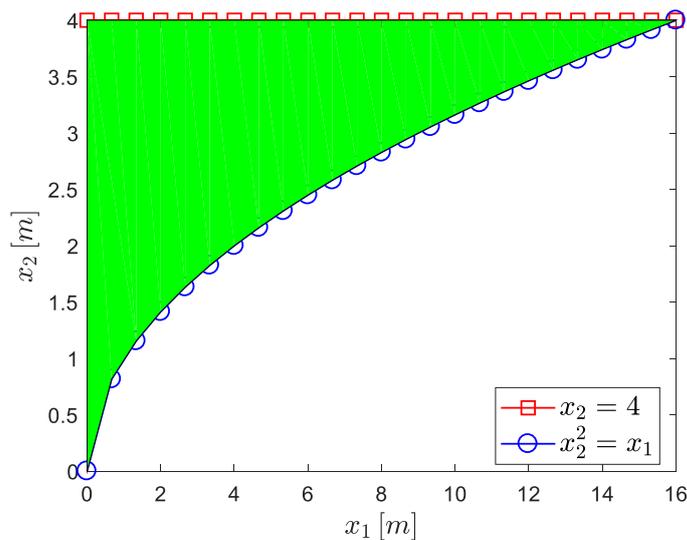


Figura 6 – Área entre a parábola $x_2^2 = x_1$ e a reta $x_2 = 4$. Corresponde à atividade 2.

Comentários da **Atividade 2**: Para varrer a área sombreada integramos primeiro em relação ao eixo x_1 e depois em relação a x_2 . Como as coordenadas estão em metros o momento de inércia estará em m^4 .

$$\begin{aligned}
 I_{x_2} &= \int_A x_1^2 \cdot dA = \int_{x_2=0}^{x_2=4} \int_{x_1=0}^{x_1=x_2^2} x_1^2 dx_1 dx_2 = \int_0^4 \frac{x_1^3}{3} \Big|_0^{x_2^2} dx_2 \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^4 x_2^6 dx_2 = \frac{1}{21} x_2^7 \Big|_0^4 = \frac{16384}{70} \cong 780,2 m^4
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 11}$$

3.0 Teorema dos eixos paralelos

A definição e as equações para os momentos de inércia axiais que utilizamos até agora referem-se aos eixos centroidais da superfície. Para algumas figuras geométricas elementares e também para os perfis estruturais, os momentos de inércia podem ser facilmente calculados pelas equações Eq. 1 e Eq. 2 ou encontrados em tabelas (ver, por exemplo, as figuras 9.12 e 9.13 da referência [1]). Em muitas situações práticas, no entanto, existe a necessidade de calcular momentos de inércia em relação a eixos não centroidais. Isto motiva o desenvolvimento do *teorema dos eixos paralelos*.

Suponha que queremos determinar o I_{x_1} para a superfície da Figura 7. A posição **C** do centroide da área é conhecida, logo a distância d é uma constante. Por outro lado, a distância a é uma variável pois representa a distância até o elemento diferencial Da com relação ao qual realizaremos a integração. Utilizando a definição do momento de inércia temos:

$$\begin{aligned}
 I_{x_1} &= \int_A x_2^2 \cdot dA = \int_A (a + d)^2 \cdot dA \\
 I_{x_1} &= \int_A a^2 \cdot dA + 2d \int_A a \cdot dA + d^2 \int_A dA \\
 I_{x_1} &= \bar{I}_{x_1} + A \cdot d^2
 \end{aligned}
 \tag{Eq. 12}$$

A integral $\int_A a \cdot dA$ representa o primeiro momento de área em relação ao eixo centroidal BB, logo será zero. A integral $\bar{I}_{x_1} = \int_A a^2 \cdot dA$ é o segundo momento de área da superfície com relação ao centroide. Desta forma o teorema dos eixos paralelos permite então encontrar o I com relação a eixos não centroidais como a soma do momento centroidal \bar{I} mas o produto da área da figura vezes a distância d até o eixo de interesse ao quadrado (Eq. 12).

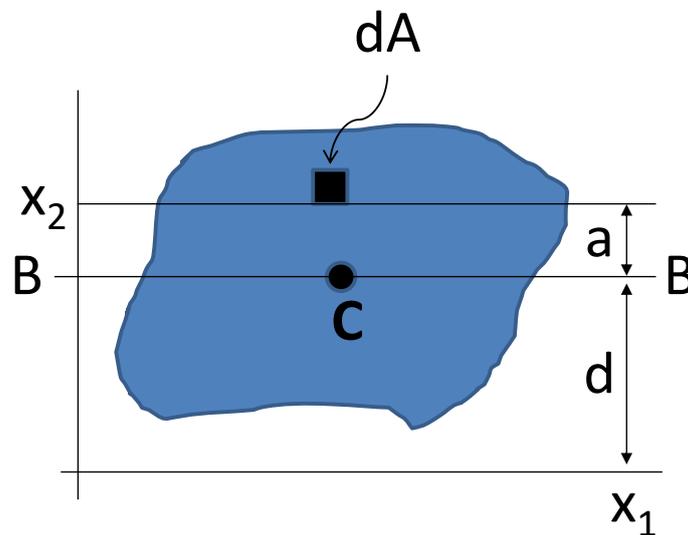


Figura 7 – Pelo teorema dos eixos paralelos o momento de inércia de uma superfície em relação a um eixo não centroidal mas paralelo a este será $I_{x_1} = \bar{I}_{x_1} + A \cdot d^2$ onde \bar{I}_{x_1} é o momento de inércia em relação ao eixo centroidal.

Exemplo 5: Calcule o momento de inércia da superfície da Figura 3 com relação ao eixo AA.

Solução: O I_{x_1} já foi calculado no Exemplo 1. Aplicando o teorema dos eixos paralelos para I_{AA} temos:

$$I_{AA} = \bar{I}_{x_1} + A \cdot d^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}bh^3
 \tag{Eq. 13}$$

Neste caso simples o mesmo resultado teria sido obtido aplicando diretamente a definição de momento de inércia e resolvendo a seguinte integral:

$$I_{AA} = \int_A x_2^2 \cdot dA = \int_0^b \int_0^h x_2^2 dx_2 dx_1 = \frac{1}{3} \int_0^b x_2^3 \Big|_0^h dx_1 = \frac{1}{3} h^3 x_1 \Big|_0^b = \frac{bh^3}{3} \quad \text{Eq. 14}$$

Atividade 3: Determine a posição do centroide para a seção em T mostrada (Figura 8) e calcule os momentos de inércia em relação a cada eixo centroidal.

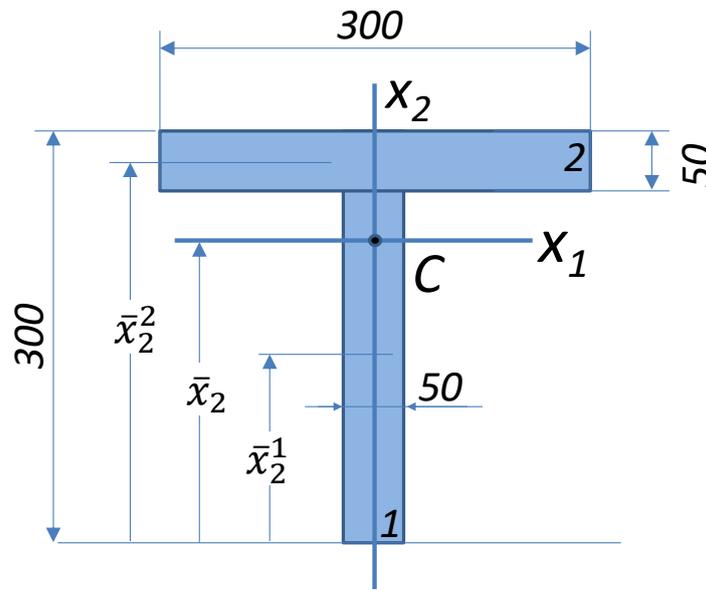


Figura 8 – Viga em T correspondente à atividade 3. Todas as dimensões estão em mm.

Comentários da : Observamos que o eixo x_2 é um eixo de simetria e consequentemente o centroide C estará sobre ele. A posição vertical de C será determinada utilizando as fórmulas da aula 6. Tomando como referência a base do perfil e considerando os retângulos 1 e 2 temos:

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum \bar{x}_{2i} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{\bar{x}_2^1 \cdot A_1 + \bar{x}_2^2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} \quad \text{Eq. 15}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{0,25 \cdot 0,25 \cdot 0,05 + 0,275 \cdot 0,3 \cdot 0,05}{0,25 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,05} = 0,207 \text{ m}$$

Para determinar o momento de inércia de todo o perfil em relação ao eixo x_1 primeiramente calculamos os momentos de cada retângulo com relação aos seus próprios eixos centroidais:

$$\bar{I}_{x1}^1 = \frac{0,05 \cdot 0,025^3}{12} = 6,5 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \quad \text{Eq. 16}$$

$$\bar{I}_{x1}^2 = \frac{0,3 \cdot 0,050^3}{12} = 3,12 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

Para calcular os momentos de inércia de cada retângulo em relação ao eixo centroidal aplicamos o teorema dos eixos paralelos:

$$\begin{aligned} I_{x1}^1 &= \bar{I}_{x1}^1 + A_1 \cdot d_1^2 = 6,5 \times 10^{-5} + 0,25 \cdot 0,05 \cdot (\bar{x}_2 - \bar{x}_2^1)^2 = 1,48 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\ I_{x1}^2 &= \bar{I}_{x1}^2 + A_2 \cdot d_2^2 = 3,12 \times 10^{-6} + 0,3 \cdot 0,05 \cdot (\bar{x}_2^2 - \bar{x}_2)^2 = 1,03 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\ I_{x1} &= I_{x1}^1 + I_{x1}^2 = 2,52 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \end{aligned} \quad \text{Eq. 17}$$

Para o momento de inércia com relação ao eixo x_2 não precisamos do teorema dos eixos paralelos devido à simetria do perfil nessa direção:

$$\bar{I}_{x2} = \frac{0,25 \cdot 0,250^3 + 0,05 \cdot 0,300^3}{12} = 1,13 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \quad \text{Eq. 18}$$

4.0 Produtos de inércia

A definição do produto de inércia segue o mesmo raciocínio que a dos momentos de inércia. Os momentos de área, no entanto, são calculados simultaneamente em relação aos dois eixos coordenados:

$$I_{x1x2} = \int_A x_1 x_2 dA \quad \text{Eq. 19}$$

O produto de inércia também tem unidades de comprimento à quarta potência e, diferentemente dos momentos axiais e do momento polar de inércia, poderá ser negativo, positivo ou zero. No caso de áreas simétricas em relação a qualquer eixo $I_{x1x2} = 0$. Por exemplo, se o eixo x_1 for um eixo de simetria, haverá a mesma quantidade de produtos $x_1 x_2 dA$ do que produtos $-x_1 x_2 dA$ em toda a área e a integral é zero. O teorema dos eixos paralelos permite também encontrar o produto de inércia de áreas em relação a eixos não centroidais:

$$I_{x1x2} = \bar{I}_{x1x2} + A \cdot dx_1 \cdot dx_2 \quad \text{Eq. 20}$$

Na Eq. 20 \bar{I}_{x1x2} é o produto de inércia da área em relação ao seu centroide enquanto que dx_1 e dx_2 são as distâncias (não confundir com diferenciais) desde o centroide da área até os respectivos eixos não centroidais. Observe que dx_1 e dx_2 podem ser positivos ou negativos, dependendo da posição relativa do centroide até a origem do referencial. Se algum dos eixos centroidais da área for também de simetria $\bar{I}_{x1x2} = 0$ e $I_{x1x2} = A \cdot dx_1 \cdot dx_2$.

Exemplo 6: A Figura 9 mostra a seção transversal de uma viga metálica com perfil em L. Defina a posição do centroide da seção e calcule os momentos de inércia e produto de inércia com relação aos eixos centroidais. A viga tem a mesma largura das abas $w = 60 \text{ mm}$ e espessura $t = 10 \text{ mm}$.

Solução: Para posicionar o centroide dividimos a seção nos retângulos A e B e aplicamos as fórmulas da aula 6 “Forças distribuídas”. Utilizamos como referencial inicial a base do perfil. Pela simetria da seção apenas uma das distâncias até o centroide será calculada. A [Figura 10](#) mostra os parâmetros utilizados em todas as equações do presente exemplo.

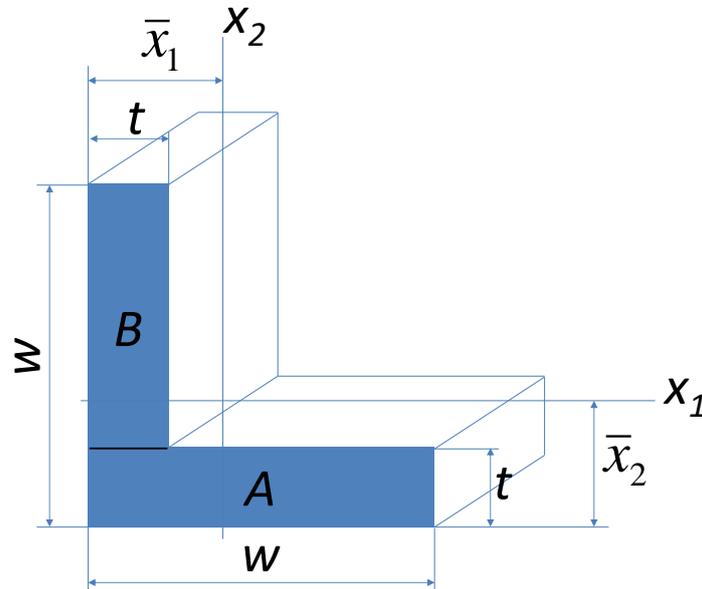


Figura 9 – Perfil de uma viga em L (Exemplo 6).

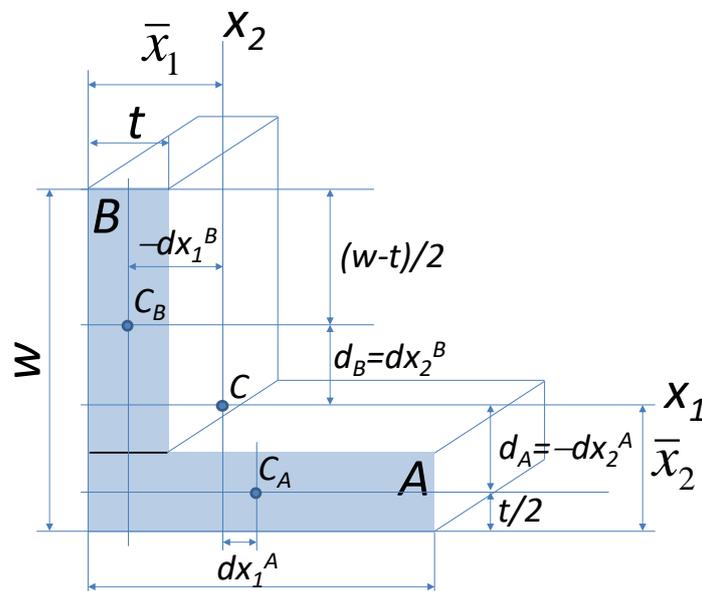


Figura 10 – Perfil do Exemplo 6 mostrando a posição do centroide bem como as distâncias necessárias para a aplicação do teorema dos eixos paralelos.

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum \bar{x}_{2i} \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{\bar{x}_{2A} \cdot A_A + \bar{x}_{2B} \cdot A_B}{A_A + A_B} = \frac{\frac{t}{2} \cdot w \cdot t + \left(\frac{w-t}{2} + t\right)(w-t) \cdot t}{w \cdot t + (w-t) \cdot t} \quad \text{Eq. 21}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{t^2 - t \cdot w - w^2}{2 \cdot t - 4 \cdot w} = 18,6 \text{ mm} = \bar{x}_1$$

Os eixos centroidais dos retângulos A e B não coincidem com os do perfil em L logo utilizaremos o teorema dos eixos paralelos tanto para o cálculo dos momentos de inércia Eq. 12 como do produto de inércia Eq. 20. Começamos pelo momento de inércia em torno do eixo x_1 (igual ao I_{x2}):

$$I_{x1}^A = \bar{I}_{x1}^A + A_A \cdot d_A^2 = \frac{w}{12} \left(\frac{t}{2}\right)^3 + w \cdot t \cdot \left(\bar{x}_2 - \frac{t}{2}\right)^2 = 1,12 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I_{x1}^B = \bar{I}_{x1}^B + A_B \cdot d_B^2 = \frac{t \cdot (w-t)^3}{12} + (w-t) \cdot t \cdot \left(\frac{w-t}{2} + t - \bar{x}_2\right)^2 = 2,38 \times 10^5 \text{ mm}^4 \quad \text{Eq. 22}$$

$$I_{x1} = I_{x1}^A + I_{x1}^B = 3,5 \times 10^5 \text{ mm}^4 = I_{x2}$$

Os eixos centroidais de cada retângulo são também eixos de simetria e os produtos de inércia em relação a eles será zero. Observe que durante a aplicação do teorema dos eixos paralelos algumas distâncias dx_1 e dx_2 são negativas. Por exemplo, o centroide C_A do retângulo A está no quarto quadrante logo dx_1^A será positivo e dx_2^A negativo. O oposto acontece com as distâncias dx_1 e dx_2 para o retângulo B já que C_B está no segundo quadrante (Figura 10).

$$I_{x1x2}^A = \bar{I}_{x1x2}^A + A_A \cdot dx_1^A \cdot dx_2^A =$$

$$= 0 + w \cdot t \cdot \left(\frac{w}{2} - \bar{x}_1\right) \cdot \left(-\left(\bar{x}_2 - \frac{t}{2}\right)\right) = -92980 \text{ mm}^4$$

$$I_{x1x2}^B = \bar{I}_{x1x2}^B + A_B \cdot dx_1^B \cdot dx_2^B =$$

$$= 0 + (w-t) \cdot t \cdot \left(-\left(\bar{x}_1 - \frac{t}{2}\right)\right) \cdot \left(\frac{w+t}{2} - \bar{x}_2\right) = -1,116 \times 10^5 \text{ mm}^4 \quad \text{Eq. 23}$$

$$I_{x1x2} = I_{x1x2}^A + I_{x1x2}^B = -2,045 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

5.0 Equações de transformação e momentos principais de Inércia.

Os momentos e produtos de inércia estudados na presente aula fornecem uma ideia da distribuição dos pontos de uma determinada área em relação a um referencial cartesiano arbitrário. Em determinadas situações práticas pode ser necessário calcular os momentos e produtos de inércia para referenciais cartesianos girados de um certo ângulo θ (aqui considerado positivo no sentido anti-horário) em relação ao original (Figura 11). A forma mais eficiente de calcular as equações que relacionam as propriedades de área nestes dois referenciais consiste em organizar os momentos e produtos de inércia como elementos de uma matriz de momentos de inércia \mathbf{I} e aplicar as equações de transformação das matrizes entre uma base e outra.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{x1} & I_{x1x2} \\ I_{x2x1} & I_{x2} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 24}$$

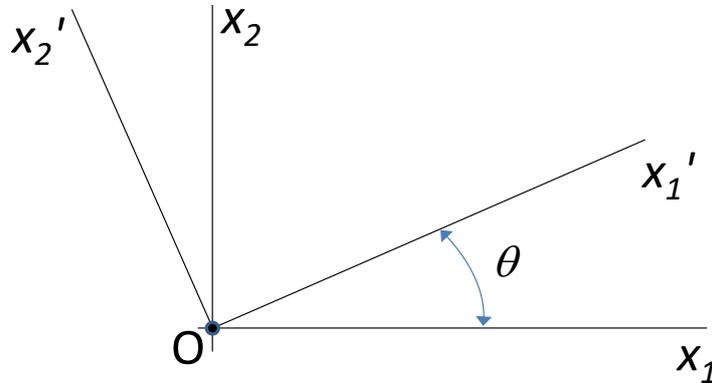


Figura 11 –A matriz da transformação \mathbf{T} que permite girar a representação cartesiana do tensor \mathbf{I} entre duas bases é composta por funções trigonométricas do ângulo θ .

A diferença dos momentos de inércia de massa utilizados em análises dinâmicas, a matriz \mathbf{I} aqui utilizada não representa um tensor já que não está associada a nenhuma grandeza física. Assim, as transformações matriciais que desenvolveremos a continuação devem ser entendidas apenas como o meio mais eficaz, na opinião do autor, para se chegar às equações de transformação dos momentos e produtos de inércia e não como uma aplicação propriamente dita da álgebra tensorial.

Consideramos $I_{x1x2} = I_{x2x1}$ logo a nossa matriz \mathbf{I} será simétrica. Na diagonal as componentes de \mathbf{I} são os momentos de inércia em relação aos eixos coordenados enquanto que as componentes fora da diagonal são os produtos de inércia. Para calcular as componentes de \mathbf{I} em um referencial $x'_1x'_2$ que está inclinado de um certo ângulo θ em sentido anti-horário com relação a x_1x_2 (Figura 11) primeiramente introduzimos a matriz de transformação \mathbf{T} composta pelos cossenos dos ângulos formados entre o novo e o velho referencial:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 25}$$

Para simplificar as equações adotaremos os símbolos s e c para substituir os senos e cossenos, respectivamente. Designando por \mathbf{I}' a matriz dos momentos de inércia no novo referencial temos:

$$\mathbf{I}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{T}^T$$

$$\begin{bmatrix} I_{x'1} & -I_{x'1x'2} \\ -I_{x'2x'1} & I_{x'2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{x1} & I_{x1x2} \\ I_{x2x1} & I_{x2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 26}$$

Na Eq. 26 \mathbf{T}^T é a transposta da matriz \mathbf{T} . As equações de transformação resultantes da multiplicação matricial são:

$$\begin{aligned} I_{x'1} &= I_{x1} \cdot c^2 + I_{x2} \cdot s^2 + 2 \cdot I_{x1x2} \cdot s \cdot c \\ I_{x'1x'2} &= -(I_{x1} - I_{x2}) \cdot s \cdot c + I_{x1x2} \cdot (c^2 - s^2) \end{aligned} \quad \text{Eq. 27}$$

O expoente das funções trigonométricas pode ser reduzido de 2 para 1 ao custo de dobrar o argumento destas (de θ para 2θ) mediante as identidades $c(2\theta) = c^2 - s^2$, $s(2\theta) = 2 \cdot s \cdot c$, $s^2 = \frac{1}{2}(1 - c(2\theta))$ e $c^2 = \frac{1}{2}(1 + c(2\theta))$ resultando em:

$$\begin{aligned} I_{x'1} &= \frac{I_{x1} + I_{x2}}{2} + \frac{I_{x1} - I_{x2}}{2} \cdot c(2\theta) + I_{x1x2} \cdot s(2\theta) \\ I_{x'1x'2} &= -\frac{I_{x1} - I_{x2}}{2} \cdot s(2\theta) + I_{x1x2} \cdot c(2\theta) \end{aligned} \quad \text{Eq. 28}$$

Estas (Eq. 27 e Eq. 28) são as equações de transformação dos momentos de inércia. Elas mostram como os momentos e produtos de inércia de áreas variam com a orientação dos eixos coordenados (dada pelo ângulo θ) quando se conhecem os valores da matriz \mathbf{I} (ou seja os valores de I_{x1} , I_{x2} e I_{x1x2}) na orientação original ($\theta = 0$). Há duas formas de analisar graficamente a variação das componentes da matriz de momentos de inércia com a inclinação dos eixos centroidais: 1) plotando as curvas da Eq. 27 na forma explícita $\mathbf{I}(\theta)$ ou 2) na forma paramétrica em coordenadas $I_{x1}(\theta)$ vs. $I_{x1x2}(\theta)$ (Eq. 28). As duas formas serão utilizadas no próximo exemplo.

Exemplo 7—Considere uma viga metálica com perfil em L, similar à do Exemplo 6 (Figura 12) mas com dimensões diferentes ($w = 100 \text{ mm}$ e $t = 15 \text{ mm}$). Calcule a posição do centroide, os momentos e o produto de inércia com relação aos eixos centroidais. Plote a variação do momento de inércia da seção com relação ao eixo x'_1 e do produto de inércia $I_{x'1x'2}$ quando os eixos centroidais giram entre 0 e π , tanto na forma explícita como na forma paramétrica. Comente os resultados.

Solução: Utilizando as equações desenvolvidas no Exemplo 6 determinamos os parâmetros solicitados. Os resultados se mostram na Tabela 1.

Tabela 1 – Posição do centroide e momento e produto de inércia para o perfil em L da Figura 12 (Exemplo 7).

Parâmetro	Valor	Unidades
$\bar{x}_1 = \bar{x}_2$	30,47	Mm
$I_{x2} = I_{x1}$	$2,49 \times 10^6$	mm^4
I_{x1x2}	$-1,46 \times 10^6$	mm^4

A substituição dos valores de $I_{x1} = I_{x2}$ e I_{x1x2} da Tabela 1 na Eq. 27 gera duas equações que são função de uma única variável (o ângulo θ). Estas equações constituem a forma explícita $\mathbf{I}(\theta)$ e os seus respectivos gráficos aparecem na

Figura 13 (esquerda). Já a forma paramétrica (onde θ é o parâmetro) se mostra na Figura 13 (direita). Este último gráfico é conhecido como o círculo de Mohr para os momentos de inércia. Nos dois casos, os pontos sobre as curvas ou sobre o círculo representam pares de valores de I_{x1} e I_{x1x2} para diferentes inclinações θ dos eixos centroidais. Com base nos gráficos podemos fazer as seguintes observações:

1. A curva dos momentos de inércia tem valores extremos (máximos e mínimos) em duas inclinações específicas dos eixos centroidais ($\pi/4$ e $3\pi/4$ para este caso). Estas são as direções principais θ_{p1} e θ_{p2} e os eixos assim orientados são os eixos principais de inércia.
2. Nas orientações principais o círculo de Mohr intercepta o eixo horizontal, ou seja, os momentos de inércia I_{x1} passam por valores extremos.
3. Sempre que o momento de inércia I_{x1} passa por um valor extremo o produto de inércia é zero. Este resultado não é casual já que na Eq. 27 $I_{x'1x'2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{d\theta}(I_{x'1})$

ou $I_{x'1x'2} = \frac{d}{d(2\theta)}(I_{x'1})$ na Eq. 28.

4. O mínimo do produto de inércia I_{x1x2} (que ocorre em $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ no exemplo) não coincide com o valor zero do momento de inércia e sim com o valor médio deste $I_m = (I_{x1} + I_{x2})/2$.
5. As duas curvas retornam aos seus valores de partida em $\theta = \pi$, como deveriam, pois isto equivale a inverter o sentido dos eixos centroidais mas conservando a sua direção original.

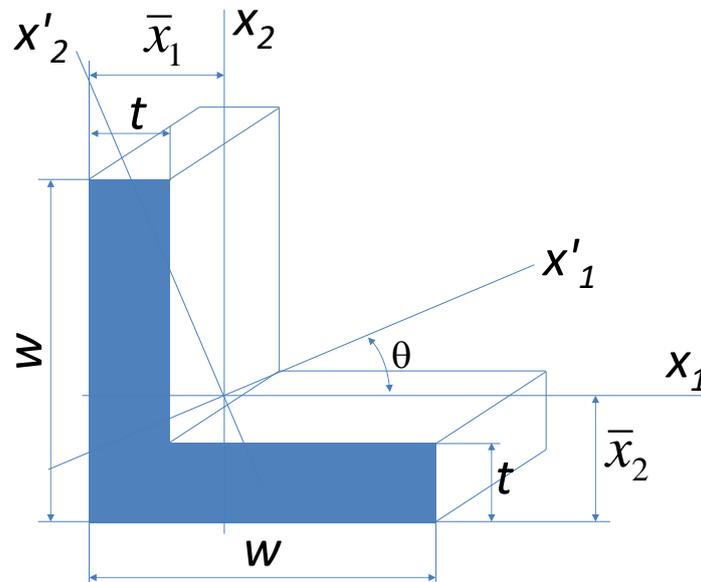


Figura 12 – Perfil em L similar ao do Exemplo 6. Os momentos e o produto de inércia do perfil variam com o ângulo de giro dos eixos centroidais.

Uma expressão para os valores extremos do momento de inércia e para o ângulo em que eles ocorrem pode ser obtida utilizando os métodos de análise de funções do cálculo

elementar. As operações algébricas necessárias se simplificam se utilizarmos a Eq. 28. Os resultados são:

$$I_{x_1}^{\max} = \frac{I_{x_1} + I_{x_2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_1} - I_{x_2}}{2}\right)^2 + I_{x_1x_2}^2}$$

$$\theta_p = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2 \cdot I_{x_1x_2}}{I_{x_1} - I_{x_2}}\right)$$

Eq. 29

Para o Exemplo 7 os valores numéricos são os seguintes:

$$I_{x_1}^{\max} = 3,95 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x_1}^{\min} = 1,02 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\theta_p = 0,78 \text{ rad} = -45^\circ$$

Eq. 30

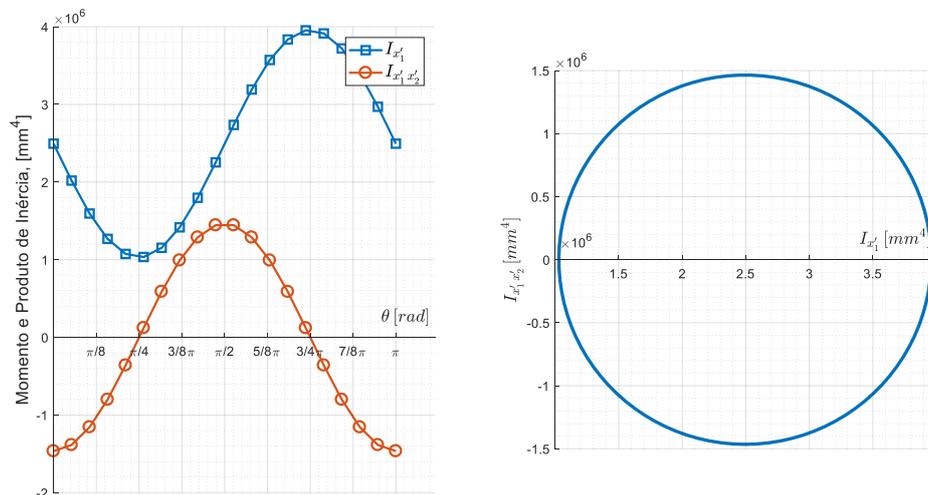


Figura 13 – Gráficos mostrando a variação dos momentos e do produto de inércia com a inclinação dos eixos centroidais para o perfil do Exemplo 7.

Atividade 4: O perfil I padronizado de abas largas da Figura 14 tem $I_1 = 145 \times 10^6 \text{ mm}^4$ e $I_2 = 20,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$. Observe que os eixos 1 e 2 são eixos centroidais e também de simetria. Plote os gráficos equivalentes aos da Figura 13 para este perfil e discuta os resultados.

Comentários da Atividade 4: Em virtude da simetria do perfil os eixos centroidais são também principais de inércia logo $I_{\max} = I_1$, $I_{\min} = I_2$, $I_{12} = 0$ e $\theta_p = 0^\circ$. Em qualquer outra orientação dos eixos os momentos de inércia deixarão de ser extremos e os produtos de inércia deixarão de ser iguais a zero, como verificado na Figura 15.

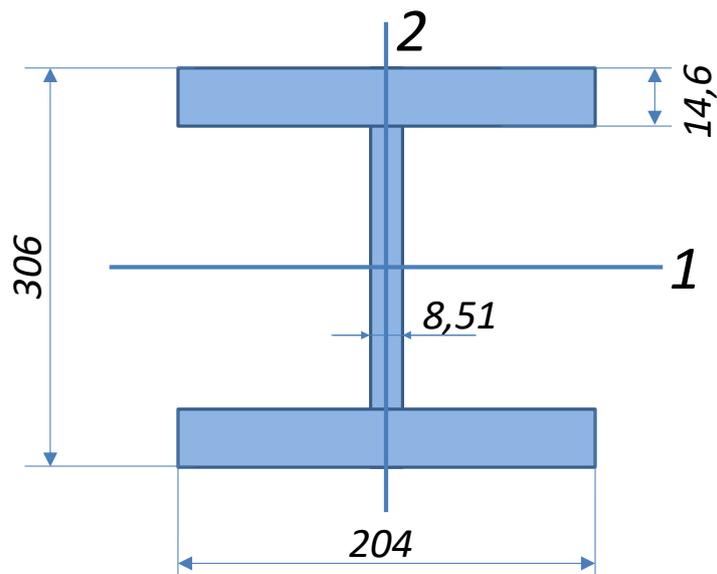


Figura 14 – Perfil I padronizado correspondente à Atividade 4. Todas as dimensões estão em mm.

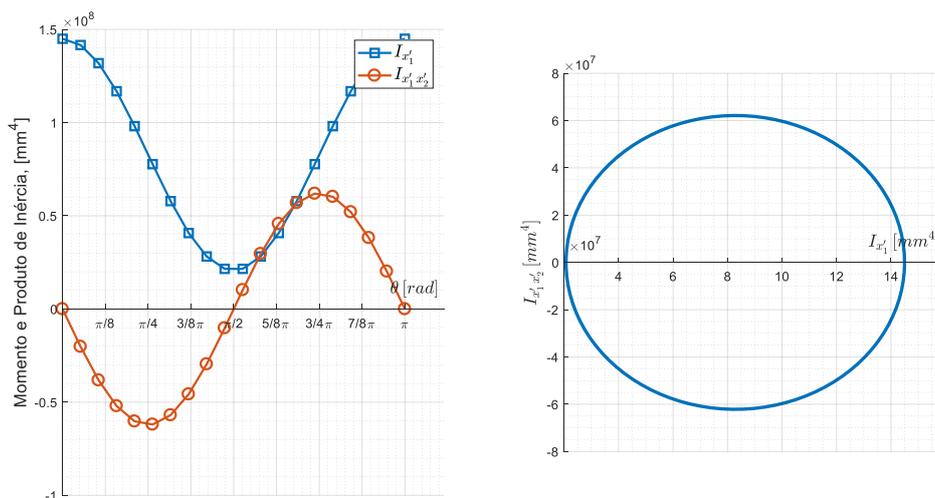


Figura 15 – Gráficos correspondentes à Atividade 4.

6.0 Conclusões:

Nesta aula definimos e aprendemos a calcular algumas das mais importantes propriedades geométricas das superfícies planas, como o são os momentos de inércia e os produtos de inércia. Especificamente o momento de inércia constitui uma medida da resistência da área a girar na presença de momentos fletores. Quanto maior o **I** em torno de um determinado eixo, menor a curvatura para um mesmo momento em torno do eixo ortogonal. Para alguns perfis estruturais e outras áreas, os eixos centroidais nem sempre estão orientados na direção dos eixos principais de inércia. A orientação destes eixos e os valores extremos de **I** que nela atuam devem ser calculados pela Eq. 29.

A localização dos eixos principais de inércia tem uma aplicação prática imediata: durante o projeto estrutural seria desejável orientar os perfis de maneira que o momento fletor estivesse aplicado na direção do I_{min} (logo perpendicular ao I_{max}) diminuindo a curvatura e conseqüentemente as chances de falha do elemento.

7.0 Resumo:

As equações para o cálculo dos momentos axiais I e polar J de inércia em relação a eixos que passam pelo centroide da área são:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{x1} &= \int_A x_2^2 \cdot dA \\ \bar{I}_{x2} &= \int_A x_1^2 \cdot dA \\ J &= \bar{I}_{x1} + \bar{I}_{x2} \end{aligned} \quad \text{Eq. 31}$$

Se houver necessidade de calcular os momentos de inércia em relação a eixos não centroidais utilizamos o teorema dos eixos paralelos:

$$I_x = \bar{I}_x + A \cdot d^2 \quad \text{Eq. 32}$$

O produto de inércia se calcula como o somatório (ou integral) dos produtos elementares simultâneos de momentos de área. Da mesma forma que para os momentos de inércia, quando os eixos de interesse não passam pelo centroide se utiliza o teorema dos eixos paralelos:

$$\begin{aligned} \bar{I}_{x1x2} &= -\int_A x_1 x_2 dA \\ I_{x1x2} &= \bar{I}_{x1x2} + A \cdot dx_1 \cdot dx_2 \end{aligned} \quad \text{Eq. 33}$$

Os momentos e o produto de inércia variam com a inclinação dos eixos centroidais. Os valores extremos de \mathbf{I} e a direção dos eixos principais de inércia se calculam pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} I_{x1min}^{max} &= \frac{I_{x1} + I_{x2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x1} - I_{x2}}{2}\right)^2 + I_{x1x2}^2} \\ \theta_p &= \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot I_{x1x2}}{I_{x1} - I_{x2}} \right) \end{aligned} \quad \text{Eq. 34}$$

8.0 Referências Bibliográficas

- 1 Beer FP, Johnston ER Jr (1994), "Mecânica Vetorial para Engenheiros", 5ª ed. Makron Books, São Paulo, Brasil.

- 2 Hibbeler RC (2010), "Estática Mecânica para Engenharia", Pearson Prentice Hall, 12ª edição, São Paulo, Brasil.
- 3 Crandall SH, Dahl NC, Lardner TJ (1978), "An Introduction to the Mechanics of Solids", 3rd ed. McGraw-Hill Inc. Tokyo, Japan.