CEDERJ – CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA

DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CURSO: Engenharia de Produção DISCIPLINA: Mecânica Geral

CONTEUDISTA: Jorge Alberto Rodriguez Duran

Aula 2 –Forças no Espaço.

Meta

Utilização da notação vetorial cartesiana para representar forças no espaço.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. Representar forças no espaço mediante vetores cartesianos e encontrar a resultante de um sistema de forças concorrentes.
2. Posicionar um ponto no espaço com relação a outro mediante o vetor de posição e representar forças no espaço que atuam na direção de um vetor de posição.

Introdução

A primeira aula deste curso foi dedicada à representação de forças no plano. Foi visto que as forças podem ser representadas por vetores que carregam, além da intensidade, informações referentes à direção e sentido das mesmas. As análises foram limitadas ao caso de forças concorrentes e no plano. Foram estudadas duas formas básicas de representar vetores: a escalar e a cartesiana. Na primeira o vetor se representa por um par ordenado de números reais que correspondem às componentes no plano $\mathbf{v}=[v_1\ v_2]$. Na segunda este mesmo par ordenado de componentes no plano aparece multiplicando aos vetores unitários nas direções dos eixos cartesianos $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e_1} + v_2\mathbf{e_2}$.

Também na primeira aula a resultante de forças concorrentes foi calculada mediante a soma das componentes da representação escalar em cada eixo, enquanto que a direção desta resultante foi calculada por trigonometria. Na presente aula todos estes conceitos serão estendidos naturalmente ao espaço tri-dimensional. Para operações vetoriais em três dimensões a notação vetorial cartesiana é a mais indicada e por este motivo será a única utilizada na presente aula.

Sistema de coordenadas destro

Sabe-se que os vetores são objetos matemáticos independentes do referencial. Para utilizar a notação vetorial cartesiana, porêm, é necessário definir um referencial. Neste curso será utilizado o referencial cartesiano. Um referencial cartesiano destro no espaço (figura 2.1) é aquele no qual o dedo polegar da mão direita aponta no sentido positivo do eixo x_3, enquanto que o restante dos dedos da mesma mão, estendidos, apontam na direção positiva do eixo x_1. Quando se fecham, estes dedos varrem o plano horizontal desde o eixo x_1 até o eixo x_2. A direção e sentido dos semi-eixos positivos é dada pelos vetores unitários $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ e $\mathbf{e_3}$, também mostrados na figura 2.1.

Notação vetorial cartesiana em 3D

Considere os diferentes vetores mostrados no primeiro octante do sistema destro $x_1x_2x_3$ (figura 2.2). Uma primeira aplicação da regra do paralelogramo resulta em $\mathbf{v=v'+v3}$ enquanto que uma segunda retorna $\mathbf{v'=v_1+v_2}$. Eliminando $\mathbf{v'}$ destas duas equações obtem-se:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} \tag{1}$$

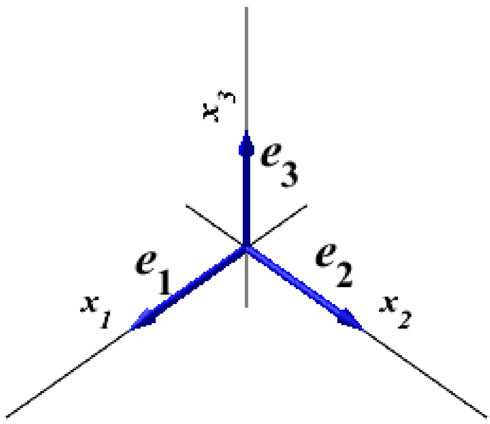

Figura 2.1 – Sistema destro de coordenadas cartesianas e os respectivos vetores de base.

Como os vetores do membro direito da equação (1) são paralelos aos eixos coordenados, eles podem ser representados pelo produto da sua intensidade vezes o vetor unitário que identifica a direção do respectivo eixo. Por exemplo $\mathbf{v_1}=v_1 \cdot \mathbf{e_1}$. Desta forma um vetor **v** cujas componentes escalares v_1, v_2 e v_3 atuam nas direções positivas dos vetores unitários $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ e $\mathbf{e_3}$ terá sua representação cartesiana dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e_1} + v_2 \mathbf{e_2} + v_3 \mathbf{e_3} \qquad (2)$$

Mediante a notação vetorial cartesiana é possível separar a intensidade e a direção de cada um dos vetores componentes de **v**. A figura 2.3 mostra o vetor **v** e as suas componentes na direção dos eixos coordenados, de acordo com a equação (2). Da mesma forma que a regra do paralelogramo, é possível aplicar sucessivamente o teorema de Pitágoras para calcular a intensidade do vetor **v**:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \qquad (3)$$

Os ângulos diretores α, β e γ (figura 2.2) definem a direção de **v**. Estes ângulos se formam entre o vetor **v** e as direções positivas dos eixos e estarão sempre entre 0º e 180º. Os cossenos destes ângulos podem ser calculados a partir da intensidade dos vetores que os formam.

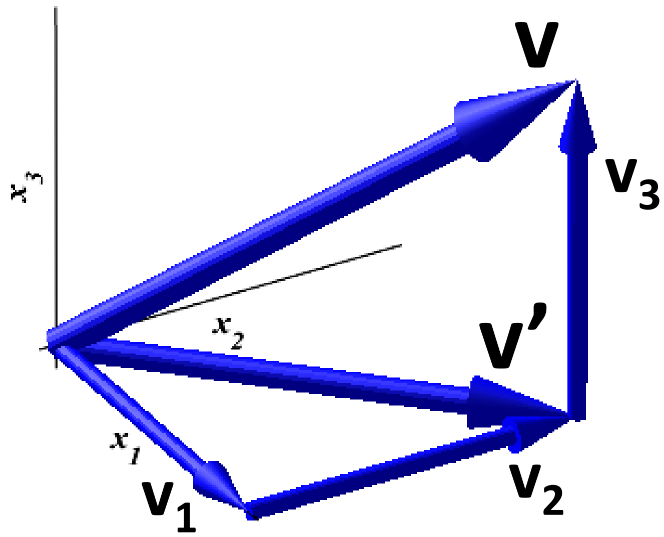

Figura 2.2 – Duas aplicações sucesivas da regra do paralelogramo permitem obter o vetor **v** como a soma dos vetores $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$.

$$\cos\alpha = \frac{v_1}{v} \qquad \cos\beta = \frac{v_2}{v} \qquad \cos\gamma = \frac{v_3}{v} \tag{4}$$

Substituindo a equação (4) em (2) tem-se:

$$\mathbf{v} = v\cos\alpha\,\mathbf{e_1} + v\cos\beta\,\mathbf{e_2} + v\cos\gamma\,\mathbf{e_3} \tag{5}$$

Pela equação (5) se v=1, ou seja se o vetor **v** for unitário, as suas componentes serão os próprios cossenos diretores. Neste caso pode-se igualar a 1 a equação (3) e obter a seguinte relação entre os cossenos diretores:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{6}$$

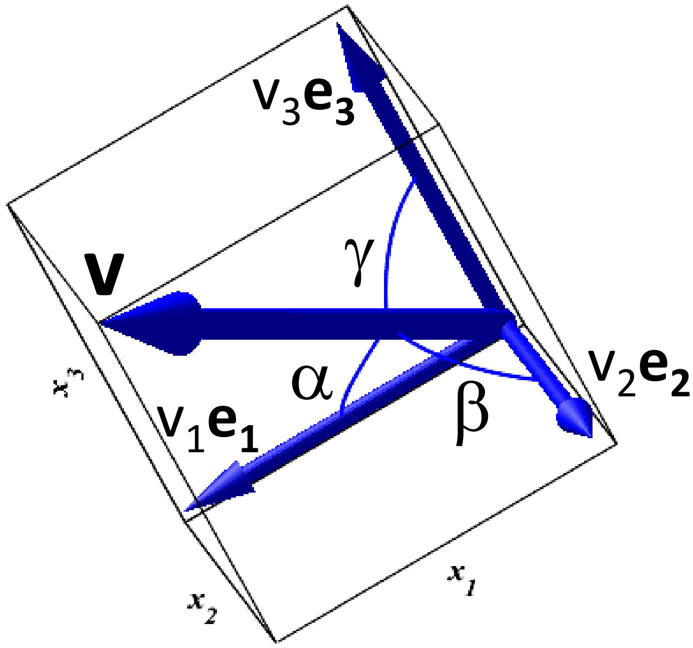

Figura 2.3 – O vetor **v**, suas componentes na direção dos eixos coordenados e os ângulos diretores α, β e γ.

A equação (6) mostra que, da mesma forma como ocorre no plano, no espaço os três cossenos diretores não são independentes entre sim. Será necessário conhecer ao menos dois deles para poder calcular o terceiro pela equação (6).

Resultante de forças concorrentes

As operações de adição de vetores cartesianos consistem em somar as respectivas componentes. Por tanto para determinar o vetor resultante de um sistema de forças concorrentes basta expressar cada força como um vetor cartesiano (Eq. (2)) e somar algebricamente as suas componentes de acordo com a seguinte equação:

$$\mathbf{FR} = \sum \mathbf{F} = \sum F_1 \mathbf{e_1} + \sum F_2 \mathbf{e}_2 + \sum F_3 \mathbf{e}_3 \qquad (7)$$

onde $\sum F_i$ (i=1..3) é o somatório das componentes cartesianas de **F** nas direções x_i.

Exemplo 1: Utilize a notação vetorial cartesiana para representar a força mostrada na figura 2.4.

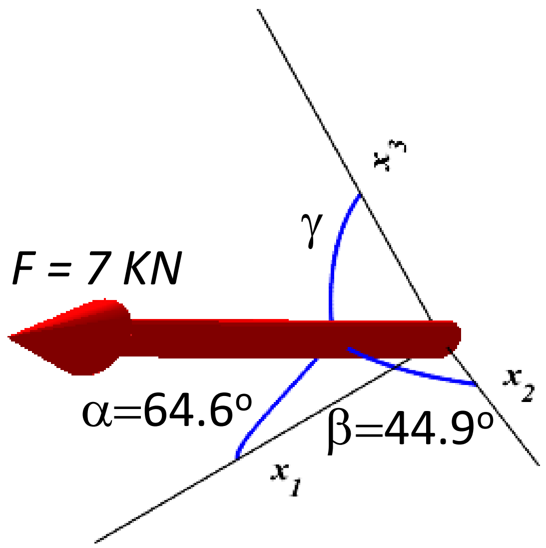

Figura 2.4 – Vetor de força com intensidade igual a 7 KN com os ângulos diretores no referencial cartesiano.

Solução: Apenas dois dos três ângulos diretores são fornecidos na figura. O terceiro pode ser calculado utilizando a equação 6.

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\cos^2 64.6^o-\cos^2 44.9^o} = \pm 0{,}57$$
$$\gamma = \cos^{-1}(0{,}57) = 55{,}2^o \qquad \gamma = \cos^{-1}(-0{,}57) = 124{,}8^o$$

As duas soluções para o ângulo γ são matematicamente possíveis. Deve-se lembrar, no entanto, que o ângulo diretor se forma entre o vetor e a direção positiva do eixo em questão. Como o vetor de força está no primeiro octante, o ângulo γ só poderá ser 55,2º. Para expressar a força F=7 KN na notação vetorial cartesiana utiliza-se a equação (5).

$$\mathbf{F} = F\cos\alpha\,\mathbf{e_1} + F\cos\beta\,\mathbf{e_2} + F\cos\gamma\,\mathbf{e_3} = 7\cdot\cos(64{,}6)\mathbf{e_1} + 7\cdot\cos(44{,}9)\mathbf{e_2} + 7\cdot\cos(55{,}2)\mathbf{e_3}$$
$$\mathbf{F} = 3\mathbf{e_1} + 5\mathbf{e_2} + 4\mathbf{e_3} \quad KN$$

Exemplo 2: Determine a intensidade e os ângulos de direção coordenados da força resultante **FR** que atua no ponto comum das forças $\mathbf{F_A}$ e $\mathbf{F_B}$ (figura 2.5). A intensidade de $\mathbf{F_A}$ e $\mathbf{F_B}$, em KN, se mostra na figura e os ângulos de direção estão tabelados a seguir:

Tabela 1 – Ângulos de direção coordenados dos vetores de força mostrados na figura 2.5.

ângulo	$\mathbf{F_A}$	$\mathbf{F_B}$
α	74,48	32,29
β	36,68	80,26
γ	57,69	59,53

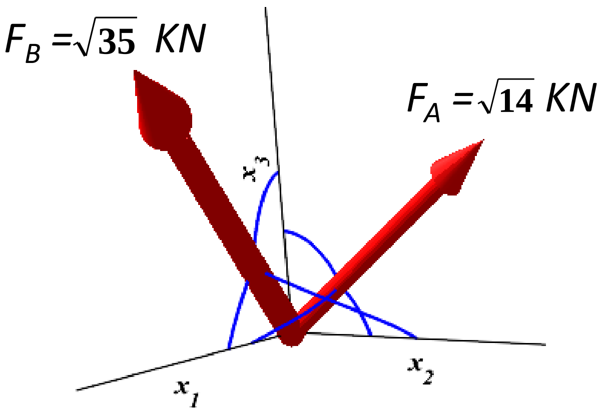

Figura 2.5 – Vetores de força do exemplo 2.

Solução: Primeiramente é necessário representar as forças mediante a notação vetorial cartesiana (equação (5)):

$$\mathbf{F_A} = F_A \cos\alpha_A \, \mathbf{e_1} + F_A \cos\beta_A \, \mathbf{e_2} + F_A \cos\gamma_A \, \mathbf{e_3} =$$
$$\mathbf{F_A} = \sqrt{14} \cdot \cos\left(74{,}48^o\right)\mathbf{e_1} + \sqrt{14} \cdot \cos\left(36{,}68^o\right)\mathbf{e_2} + \sqrt{14} \cdot \cos\left(57{,}69^o\right)\mathbf{e_3}$$
$$\mathbf{F_A} = 1\mathbf{e_1} + 3\mathbf{e_2} + 2\,\mathbf{e_3} \quad KN$$
$$\mathbf{F_B} = F_B \cos\alpha_B \, \mathbf{e_1} + F_B \cos\beta_B \, \mathbf{e_2} + F_B \cos\gamma_B \, \mathbf{e_3} =$$
$$\mathbf{F_B} = \sqrt{35} \cdot \cos\left(32{,}29^o\right)\mathbf{e_1} + \sqrt{35} \cdot \cos\left(80{,}26^o\right)\mathbf{e_2} + \sqrt{35} \cdot \cos\left(59{,}53^o\right)\mathbf{e_3}$$
$$\mathbf{F_B} = 5\mathbf{e_1} + 1\mathbf{e_2} + 3\mathbf{e_3} \quad KN$$

De acordo com a equação (7) o vetor cartesiano resultante das forças $\mathbf{F_A}$ e $\mathbf{F_B}$ será:

$$\mathbf{FR} = \mathbf{F_A} + \mathbf{F_B} = \left(F_{A1} + F_{B1}\right)\mathbf{e_1} + \left(F_{A2} + F_{B2}\right)\mathbf{e}_2 + \left(F_{A3} + F_{B3}\right)\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{FR} = \left(1+5\right)\mathbf{e_1} + \left(3+1\right)\mathbf{e_2} + \left(2+3\right)\mathbf{e_3}$$
$$\mathbf{FR} = 6\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e_2} + 5\mathbf{e_3} \quad KN$$

A intensidade de **FR** se calcula pela equação (3) como a raiz quadrada de soma dos quadrados das componentes em cada eixo cartesiano:

$$FR = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2} = \sqrt{6^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{77} \cong 8{,}7 \quad KN$$

Os ângulos de direção coordenados se calculam pela equação (4):

$$\cos\alpha = \frac{FR_1}{FR} = \frac{6}{\sqrt{77}} \qquad \cos\beta = \frac{FR_2}{FR} = \frac{4}{\sqrt{77}} \qquad \cos\gamma = \frac{FR_3}{FR} = \frac{5}{\sqrt{77}}$$
$$\alpha = 46{,}87^o \qquad \beta = 62{,}86^o \qquad \gamma = 55{,}26^o$$

Os resultados do exemplo 2 se mostram na figura 2.6.

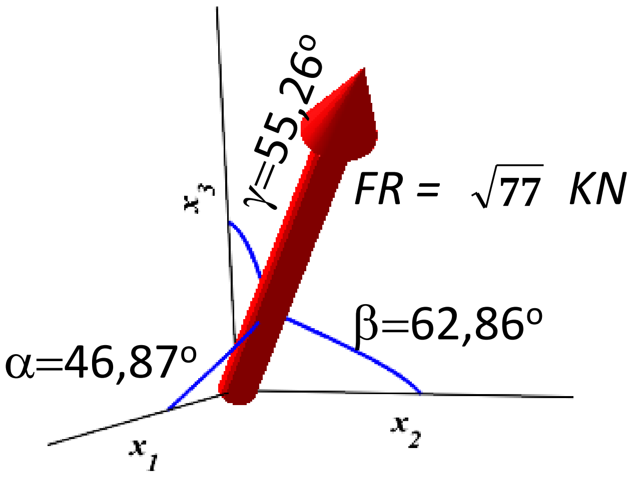

Figura 2.6 – Vetor resultante e ângulos de direção para o exemplo 2.

Atividade 1: Atende ao objetivo 1: Considere a situação de forças concorrentes no espaço descrita na tabela 2. Determine as incógnitas solicitadas.

Tabela 2 – Descrição de um sistema de forças concorrentes no espaço.

Força	Intensidade, KN	Ângulos de direção, (º)		
		α	β	γ
$\mathbf{F_A}$	6	125	65	?
$\mathbf{F_B}$	?	?	?	?
FR	12	90	90	0

Comentários da Atividade: Trata-se de um sistema de duas forças cuja resultante tem intensidade e direção conhecidas. Na sua forma cartesiana o vetor **FR** é:

$$\mathbf{FR} = FR\cos\alpha_R\,\mathbf{e_1} + FR\cos\beta_R\,\mathbf{e_2} + FR\cos\gamma_R\,\mathbf{e_3}$$
$$\mathbf{FR} = 12\cos 90^o\,\mathbf{e_1} + 12\cos 90^o\,\mathbf{e_2} + 12\cos 0^o\,\mathbf{e_3}$$
$$\mathbf{FR} = 12\mathbf{e_3} \quad KN$$

É necessário calcular o ângulo incógnita de cada força utilizando a equação (6). Para a força $\mathbf{F_A}$ tem-se:

$$\cos^2\gamma_A = 1-\cos^2\alpha_A - \cos^2\beta_A = 1-\cos^2 125 - \cos^2 65 = 1-0{,}32-0{,}17 = 0{,}49$$
$$\cos\gamma_A = 0{,}7 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma_A = 45{,}4^o$$

Seguidamente representamos os vetores cartesianos de força $\mathbf{F_A}$ e $\mathbf{F_B}$ utilizando a equação (5):

$$\mathbf{F_A} = F_A\cos\alpha_A\,\mathbf{e_1} + F_A\cos\beta_A\,\mathbf{e_2} + F_A\cos\gamma_A\,\mathbf{e_3} =$$
$$\mathbf{F_A} = 6\cdot\cos\left(125^o\right)\mathbf{e_1} + 6\cdot\cos\left(65^o\right)\mathbf{e_2} + 6\cdot\cos\left(45{,}4^o\right)\mathbf{e_3}$$
$$\mathbf{F_A} = -3{,}44\mathbf{e_1} + 2.53\mathbf{e_2} + 4{,}21\mathbf{e_3} \quad KN$$
$$\mathbf{F_B} = F_{B1}\,\mathbf{e_1} + F_{B2}\,\mathbf{e_2} + F_{B3}\,\mathbf{e_3}$$

Para calcular a resultante deste sistema de forças concorrentes no espaço utilizamos a equação (7):

$$\mathbf{FR} = \mathbf{F_A} + \mathbf{F_B} = \left(F_{A1}+F_{B1}\right)\mathbf{e_1} + \left(F_{A2}+F_{B2}\right)\mathbf{e}_2 + \left(F_{A3}+F_{B3}\right)\mathbf{e}_3$$
$$12\mathbf{e_3} = \left(-3{,}44+F_{B1}\right)\mathbf{e_1} + \left(2{,}53+F_{B2}\right)\mathbf{e_2} + \left(4{,}21+F_{B3}\right)\mathbf{e_3}$$

Os vetores **FR** e $\mathbf{F_A}+\mathbf{F_B}$ serão iguais desde que as suas respectivas componentes também o sejam, o que resulta em três equações que permitem determinar as componentes de $\mathbf{F_B}$ bem como a intensidade desta força:

$$-3{,}44 + F_{B1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{B1} = 3{,}44\ KN$$
$$2{,}53 + F_{B2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{B2} = -2{,}53\ KN$$
$$4{,}21 + F_{B3} = 12 \qquad \Rightarrow \qquad F_{B3} = 7{,}79\ KN$$
$$F_B = \sqrt{3{,}44^2 + \left(-2{,}53\right)^2 + 7{,}79^2} = 8{,}8\ KN$$

Para calcular os ângulos de direção coordenados utilizamos a equação (4):

$$\cos\alpha = \frac{F_{B1}}{F_B} = \frac{3{,}44}{8{,}8} \qquad \cos\beta = \frac{F_{B2}}{F_B} = \frac{-2{,}53}{8{,}8} \qquad \cos\gamma = \frac{F_{B3}}{F_B} = \frac{7{,}79}{8{,}8}$$

$$\alpha = 67{,}21^o \qquad \beta = 106{,}5^o \qquad \gamma = 28{,}7^o$$

Para finalizar mostramos a tabela original da atividade 1 agora com todas as células preenchidas:

Força	Intensidade, KN	Ângulos de direção, (º)		
		α	β	γ
$\mathbf{F_A}$	6	125	65	45,4
$\mathbf{F_B}$	8,8	67,21	106,5	28,7
FR	12	90	90	0

Vetores de Posição

Um vetor de posição permite definir a posição relativa de um ponto com relação a outro no espaço. Por exemplo, o vetor **r** da figura 2.7 é o segmento de reta orientada que une os pontos A e B no sistema cartesiano $x_1x_2x_3$. As componentes cartesianas de **r** serão as projeções das distâncias entre os pontos A e B em cada eixo:

$$\mathbf{r} = (x_{1B} - x_{1A})\mathbf{e_1} + (x_{2B} - x_{2A})\mathbf{e}_2 + (x_{3B} - x_{3A})\mathbf{e}_3 \qquad (8)$$

Se a origem do referencial coincide com o ponto A, por exemplo, as distâncias x_{iA} (i=1..3) = 0 e a equação (8) se simplifica para:

$$\mathbf{r} = x_{1B}\,\mathbf{e_1} + x_{2B}\,\mathbf{e}_2 + x_{3B}\,\mathbf{e}_3 \qquad (9)$$

Deve-se notar que o vetor da equação (8) é independente do referencial enquanto que o da equação (9) não. Esta (importante) diferencia, no entanto, não invalida o uso que daremos aos vetores de posição. Vetores de posição são úteis para obter o vetor cartesiano de forças cuja linha de ação passa por dois pontos. Por exemplo, se a linha de ação de uma força **F** de intensidade F passa pelos pontos A e B da figura 2.7, o vetor cartesiano desta força será:

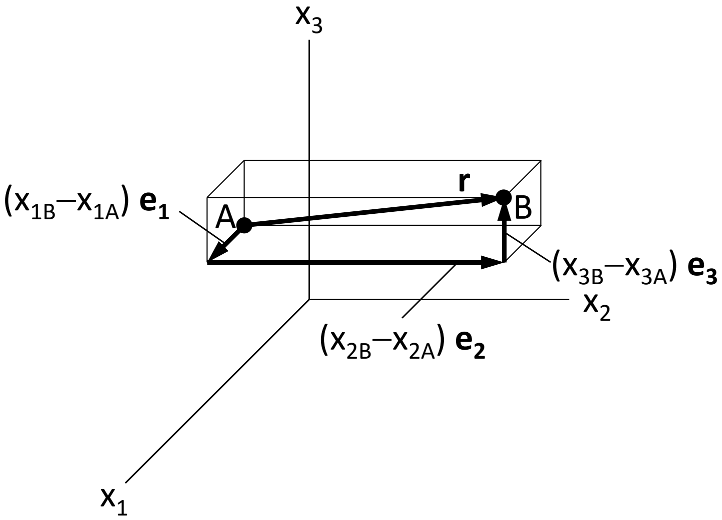

Figura 2.7 – O vetor de posição **r** é a soma dos vetores constituídos pelas projeções das distâncias entre os pontos A e B em cada eixo cartesiano.

$$\mathbf{F} = F \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = F \cdot \frac{(x_{1B} - x_{1A})\mathbf{e_1} + (x_{2B} - x_{2A})\mathbf{e}_2 + (x_{3B} - x_{3A})\mathbf{e}_3}{\sqrt{(x_{1B} - x_{1A})^2 + (x_{2B} - x_{2A})^2 + (x_{3B} - x_{3A})^2}} \qquad (10)$$

O vetor **r**/r é unitário e a multiplicação dele por um escalar altera sua intensidade (de 1 para *F*). A orientação da força **F** permanece invariável, como deveria, já que sua linha de ação passa pelos pontos A e B.

Exemplo 3: Considere o sistema de forças concorrentes mostrado na figura 2.8. A intensidade das forças e as distâncias até o referencial se mostram na tabela 3. Calcule a força resultante em A.

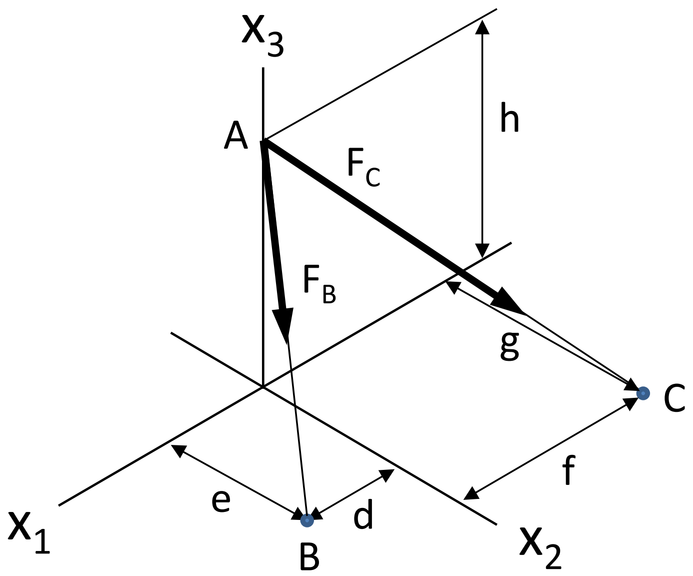

Figura 2.8 – Sistema de forças concorrentes cujas linhas de ação passam por dois pontos.

Tabela 3 – Dados numéricos do exemplo 3.

Forças, N		Distâncias, m				
F_B	F_C	d	e	f	g	h
500	350	3	6	4	4	8

Solução: Para as forças envolvidas neste problema são conhecidos dois pontos da sua linha de ação. Podemos encontrar os vetores de posição que relacionam os pontos por onde passa a linha de ação destas forças e aplicar a equação (10). Convêm deslocar a origem do referencial até o ponto A, definindo então os vetores de posição pela equação (9) que é mais simples do que a equação (8).

$$\mathbf{r_B} = d\,\mathbf{e_1} + e\,\mathbf{e}_2 - h\mathbf{e}_3 = 3\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3, \quad m$$

$$\mathbf{r_C} = -f\,\mathbf{e_1} + g\,\mathbf{e}_2 - h\mathbf{e}_3 = -4\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3, \quad m$$

$$\mathbf{F_B} = F_B \cdot \frac{\mathbf{r_B}}{r_B} = F_B \cdot \frac{3\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-8)^2}} = \frac{1500}{109}\sqrt{109}\,\mathbf{e_1} + \frac{3000}{109}\sqrt{109}\,\mathbf{e}_2 - \frac{4000}{109}\sqrt{109}\,\mathbf{e}_3, \quad N$$

$$\mathbf{F_C} = F_C \cdot \frac{\mathbf{r_C}}{r_C} = F_C \cdot \frac{-4\mathbf{e_1} + 4\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3}{\sqrt{-4^2 + 4^2 + (-8)^2}} = -\frac{175}{3}\sqrt{6}\,\mathbf{e_1} + \frac{175}{3}\sqrt{6}\,\mathbf{e}_2 - \frac{350}{3}\sqrt{6}\,\mathbf{e}_3, \quad N$$

Tendo as forças definidas por vetores cartesianos, a resultante se calcula pela equação (7):

$$\mathbf{FR} = \mathbf{F_B} + \mathbf{F_C}$$
$$\mathbf{FR} = \left(\frac{1500}{109}\sqrt{109} - \frac{175}{3}\sqrt{6}\right)\mathbf{e_1} + \left(\frac{3000}{109}\sqrt{109} + \frac{175}{3}\sqrt{6}\right)\mathbf{e}_2 + \left(-\frac{4000}{109}\sqrt{109} - \frac{350}{3}\sqrt{6}\right)\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{FR} = 0{,}77\mathbf{e_1} + 430{,}23\mathbf{e}_2 - 668{,}9\mathbf{e}_3, \quad N \qquad FR = \sqrt{0{,}77^2 + 430{,}23^2 + (-668{,}9)^2} = 795\ N$$

Atividade 2: Atende ao objetivo 2: Resolva o problema do exemplo 3 para os dados numéricos mostrados na tabela 4.

Tabela 4 – Dados numéricos para a atividade 2.

Forças, N		Distâncias, m				
F_B	F_C	d	e	f	g	h
250	400	5	2	3	6	3

Comentários da Atividade 2: O procedimento é o mesmo descrito no exemplo 3. Os resultados são os seguintes:

$$\mathbf{r_B} = d\,\mathbf{e_1} + e\,\mathbf{e}_2 - h\,\mathbf{e}_3 = 5\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \quad m$$
$$\mathbf{r_C} = -f\,\mathbf{e_1} + g\,\mathbf{e}_2 - h\,\mathbf{e}_3 = -3\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \quad m$$
$$\mathbf{F_B} = F_B \cdot \frac{\mathbf{r_B}}{r_B} = 250 \cdot \frac{5\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3}{\sqrt{5^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{625}{19}\sqrt{38}\,\mathbf{e_1} + \frac{250}{19}\sqrt{38}\,\mathbf{e}_2 - \frac{375}{19}\sqrt{38}\,\mathbf{e}_3, \quad N$$
$$\mathbf{F_C} = F_C \cdot \frac{\mathbf{r_C}}{r_C} = 400 \cdot \frac{-3\mathbf{e_1} + 6\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3}{\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2}} = -\frac{200}{3}\sqrt{6}\,\mathbf{e_1} + \frac{400}{3}\sqrt{6}\,\mathbf{e}_2 - \frac{200}{3}\sqrt{6}\,\mathbf{e}_3, \quad N$$

$$\mathbf{FR} = \mathbf{F_B} + \mathbf{F_C}$$
$$\mathbf{FR} = \left(\frac{625}{19}\sqrt{38} - \frac{200}{3}\sqrt{6}\right)\mathbf{e_1} + \left(\frac{250}{19}\sqrt{38} + \frac{400}{3}\sqrt{6}\right)\mathbf{e}_2 + \left(-\frac{375}{19}\sqrt{38} - \frac{200}{3}\sqrt{6}\right)\mathbf{e}_3$$
$$\mathbf{FR} = 39{,}48\mathbf{e_1} + 407{,}7\mathbf{e}_2 - 284{,}9\mathbf{e}_3, \quad N \qquad FR = \sqrt{39{,}48^2 + 407{,}7^2 + (-284{,}9)^2} = 499\ N$$

Conclusão

O conhecimento da representação e análise de forças no espaço mediante vetores cartesianos amplia a gama de aplicações de forças concorrentes a estruturas reais como pontes e treliças. Os vetores de força são vetores deslizantes, o que significa que o efeito destas forças no corpo rígido independe do ponto de aplicação desde que a linha de ação seja conservada. Esta propriedade é explorada na presente aula ao utilizar vetores de posição para representar vetores cartesianos de força e calcular, a partir destes, a resultante de forças concorrentes. Esta representação é conveniente em estruturas tri-dimensionais onde é pouco prático medir os ângulos diretores.

Resumo

A presente aula constitui uma generalização da aula 1 para o espaço tri-dimensional. A notação vetorial cartesiana para representar vetores de força é a preferida nesta dimensão.

A resultante de forças concorrentes se calcula somando algébricamente as componentes dos vetores em cada eixo coordenado.

Os vetores de posição permitem definir a posição relativa de pontos em um mesmo referencial cartesiano.

Estes vetores permitem representar forças cuja linha de ação passa por dois destes pontos, uma representação alternativa á utilização dos ângulos diretores.

Referências Bibliográficas

1. Hibbeler RC (2010), “Estática Mecânica para Engenharia”, Pearson Prentice Hall, 12ª edição, São Paulo, Brasil.
2. Beer FP, Johnston ER Jr (1994), “Mecânica Vetorial para Engenheiros”, 5ª ed. Makron Books, São Paulo, Brasil.