CEDERJ – CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA

DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CURSO: Engenharia de Produção   DISCIPLINA: Mecânica Geral

CONTEUDISTA: Jorge Alberto Rodriguez Duran

Aula 4 –Estática dos corpos rígidos em duas dimensões

Meta

Obter os diagramas de corpo livre de corpos em duas dimensões e aplicar as equações de equilíbrio para definir todos os esforços externos envolvidos.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. Desenhar diagramas de corpo livre em duas dimensões.
2. Aplicar as equações de equilíbrio e calcular todas as forças externas.

Introdução

Na aula anterior vimos que qualquer sistema de forças atuando em um corpo rígido pode ser reduzido a um sistema força-binário. As equações que expressam este conceito são as seguintes:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum \mathbf{F} \\ \mathbf{M_{OR}} &= \sum \mathbf{M_O} \end{aligned} \tag{1}$$

Desta forma o efeito de todas as forças e momentos que atuam no corpo é equivalente ao efeito de uma única força **R** aplicada em algum ponto e de um único momento (binário) $\mathbf{M_{OR}}$. O binário é um vetor livre e não estará necessariamente vinculado ao ponto de aplicação de **R**, embora por convenção se especifique com o susbcrito correspondente. Os sistemas de forças **F** e de momentos $\mathbf{M_o}$ originais são ditos de equivalentes a **R** e $\mathbf{M_{OR}}$, respectivamente.

Na presente aula aplicaremos estes conceitos na determinação de esforços desconhecidos e/ou reações nos vínculos do corpo com outros corpos em situações de equilíbrio. Também abordaremos e aplicaremos um conceito central para todo o engenheiro: o diagrama de corpo livre, ou DCL.

Equilíbrio de corpos em duas dimensões

Imagine uma situação em que um corpo rígido submetido a um sistema de forças externas **F** encontra-se em equilíbrio. Isto significa que as forças externas não imprimem ao corpo qualquer movimento de translação e/ou rotação. Como o sistema **F** é equivalente a uma força e binário resultantes **R** e $\mathbf{M_{OR}}$ de acordo com a equação (1), o equilíbrio implica em que o sistema força-binário equivalente ao sistema de forças externas é igual a zero:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum \mathbf{F} = 0 \\ \mathbf{M_{OR}} &= \sum \mathbf{M_O} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Um fato importante deve ser destacado neste momento. Para cada força externa atuando no corpo haverá uma força interna de reação $\mathbf{F_i}$. Se o sistema de partículas que formam o corpo é perfeitamente rígido de maneira que não haja separação entre elas, as forças $\mathbf{F_i}$ entre partículas vizinhas serão iguais. Estas forças cancelam-se por pares para fornecer o equilíbrio interno. Por este motivo não aparecem nas equações (2). Para o caso de um corpo ou sistema de partículas que não seja completamente rígido, o equilíbrio só será satisfeito se as equações (2) se cumprem também em sub-sistemas isolados do corpo que incluam forças externas e internas. Este é o caso dos sólidos deformáveis que será tratado na disciplina Resistência dos Materiais.

Em um referencial cartesiano $x_1x_2x_3$ as equações (2) geram um sistema de 6 equações escalares:

$$\begin{array}{lll} \sum F_{x1} = 0 & \sum F_{x2} = 0 & \sum F_{x3} = 0 \\ \sum M_{x1} = 0 & \sum M_{x2} = 0 & \sum M_{x3} = 0 \end{array} \tag{3}$$

Para problemas planos as forças na direção x_3 e os momentos em torno dos eixos x_1 e x_2 derivam nas identidades triviais 0=0 e as equações (3) se reduzem a:

$$\sum F_{x1} = 0 \qquad \sum F_{x2} = 0 \qquad \sum M_O = 0 \tag{4}$$

Os binários $\mathbf{M_O}$ tendem a girar o corpo em torno do eixo x_3. Sendo vetores livres o ponto escolhido para efetuar o somatório poderá ser qualquer ponto do corpo ou mesmo fora deste. As equações (4) são independentes entre sim, logo podemos concluir que em problemas planos as equações de equilíbrio permitem o cálculo de, no máximo, três incógnitas.

Reações nos apoios

Uma máquina ou estrutura pode ser modelada como um único corpo rígido desde que os vínculos com apoios ou outras máquinas e estruturas sejam removidos e susbtituídos pelos seus efeitos na forma de esforços ou binários. De maneira geral estes esforços ou binários são chamados de reações nos apoios, embora em alguns casos não atuem em apoios externos. Em todos os casos trata-se de modelos ou idealizações relativas à natureza dos efeitos nos corpos.

Partes das estruturas e máquinas também podem ser isoladas para fins de análises e neste caso as reações nos apoios seriam os esforços que atuam na interface destas partes com as outras dentro das estruturas e máquinas. Uma única parte do conjunto pode também ser mentalmente secionada e o efeito da parte restante substituido pelas reações nos apoios que neste caso correspondem a esforços internos.

Para problemas planos as reações nos apoios podem ser classificadas em três grupos:

1 Forças com linha de ação conhecida (Figura 4.1 a): Neste caso o apoio restringe a translação do corpo em uma direção conhecida. A força de reação atuará nesta direção e será a única incôgnita no apoio. Exemplos típicos são os apoios de roletes, cabos e superfícies livres de atrito.

2 Forças com linha de ação desconhecida (Figura 4.1 b): O apoio restringe a translação do corpo em todas as direções. A força total de reação será representada pelas suas duas componentes no referencial cartesiano. Haverá duas incôgnitas no apoio. Neste grupo os exemplos típicos são as juntas com pinos, apoios de eixos em mancais de rolamento e superfícies rugosas onde não é possível desprezar o atrito.

3 Forças e binários (Figura 4.2): O apoio restringe a translação em todas as direções e também a rotação no plano. As reações podem então ser reduzidas a uma força e um binário. Haverá três incôgnitas no apoio, duas componentes da força e um momento de binário. Este tipo de apoio é conhecido como engaste e ocorre por exemplo em barras ou vigas chumbadas na parede.

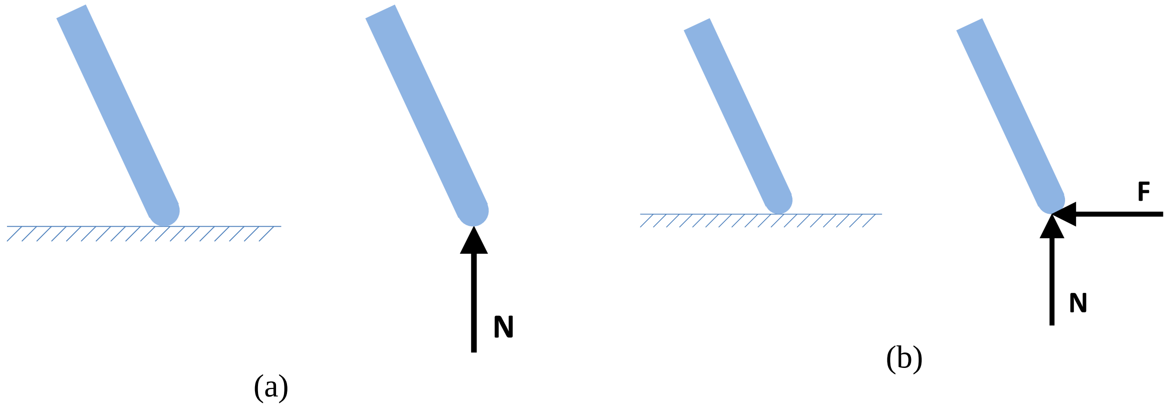

Figura 4.1 – Uma superfície sem atrito reage com um único esforço normal **N** (a) enquanto que na presença de atrito (b) a superfície reage também com uma força horizontal **F**.

Diagramas de corpo livre DCL

As condições de equilíbrio no plano (Eqs 4) são relações que devem ser satisfeitas pelas forças externas, tanto aplicadas como reativas (reações nos apoios) em corpos rígidos isolados. A melhor maneira de conduzir o processo de isolamento de sistemas ou sub-sistemas para aplicar as condições de equilíbrio consiste em fazer um esboço de qualidade onde se representem todas as forças externas que atuam no corpo. Este esboço é conhecido como diagrama de corpo livre DCL e da sua precisão depende decisivamente a solução de qualquer problema de mecânica geral.

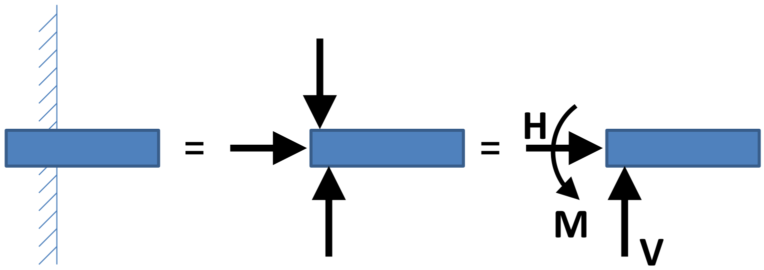

Figura 4.2 – Um corpo engastado tem os seus movimentos horizontal e vertical restringidos, assim como o giro em torno do eixo que sai do papel. Este tipo de apoio fornece duas forças e um momento de reação.

Exemplo 1 – Considere o suporte em forma de T mostrado na figura 4.3. Um vetor de carga **F** é aplicado no ponto B. Para os dados da tabela 1 obtenha o diagrama de corpo livre DCL do suporte.

Tabela 1 – Dados numéricos para o exemplo 1.

a, m	b, m	c, m	**F**, N
2	4	6	$F_1\mathbf{e_1} + F_2\mathbf{e_2} =$ $300\,\mathbf{e_1} - 120\,\mathbf{e_2}$

Solução: Identificamos que o apoio em A pertence ao grupo 1 e produz uma única força na direção vertical (que chamaremos de **A**), enquanto que em O teremos uma força com linha de ação desconhecida (grupo 2 das reações). Esta reação em O terá uma componente vertical $\mathbf{O_v}$ e uma horizontal $\mathbf{O_h}$. Observe que convêm aplicar primeiro o somatório de momentos da equação (4) no ponto O pois desta forma calculamos diretamente a reação em A. A equação (4) está em função dos módulos, logo trata-se de um somatório escalar de momentos. Utilizaremos no entanto, primeiramente o método vetorial e depois o escalar, este último mais simples e direto para problemas no plano.

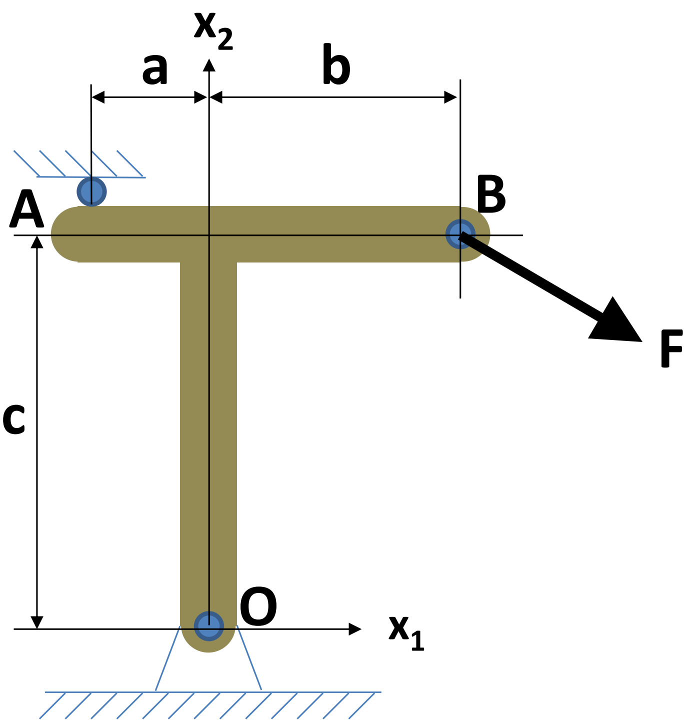

Figura 4.3 – Suporte em forma de T do exemplo 1.

$$\sum \mathbf{M_O} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{r_{OA}}\, x\, \mathbf{A} + \mathbf{r_{OB}}\, x\, \mathbf{F} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{r_{OA}}\, x\, \mathbf{A} = -\mathbf{r_{OB}}\, x\, \mathbf{F}$$

Utilizamos a notação vetorial cartesiana para o representar os vetores de posição e de força (figura 4.4). Os produtos vetoriais se calculam expandindo os seguintes determinantes:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ -a & c & 0 \\ 0 & A & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ b & c & 0 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad (-a \cdot A)\cdot \mathbf{e_3} = (F_1 \cdot c - F_2 \cdot b)\cdot \mathbf{e_3}$$

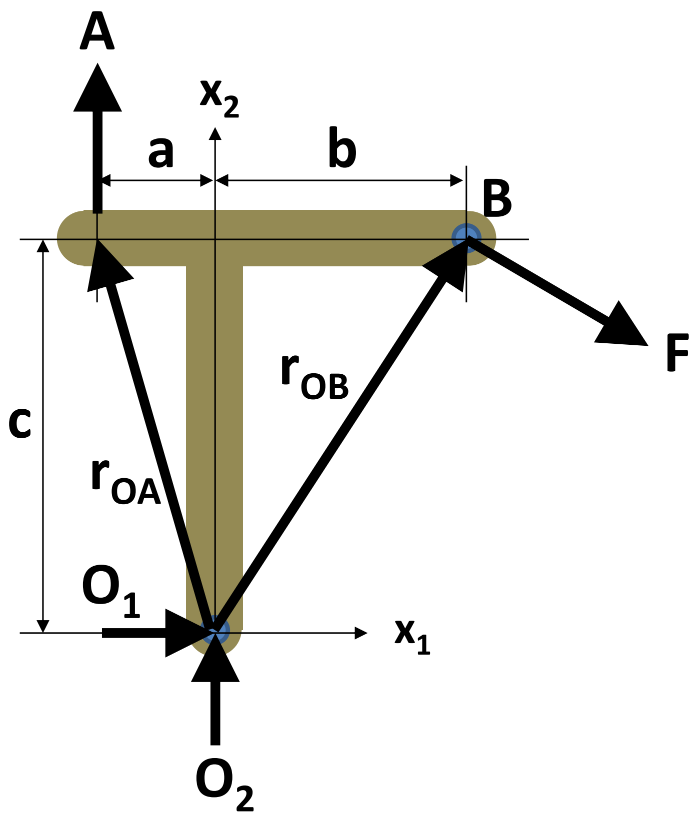

Figura 4.4 – Suporte em T com a marcação dos vetores de força e dos vetores posição dos pontos onde estas forças estão aplicadas.

Como esperado, as componentes cartesianas dos momentos estão fora do plano. Obviamente o sinal de igualdade só será preservado se ambas as componentes forem iguais, logo:

$$A = -\frac{F_1 \cdot c - F_2 \cdot b}{a} = -\frac{300 \cdot 6 - (-120) \cdot 4}{2} = -1140 \ N$$

O sinal negativo da reação em A indica que o sentido é contrário àquele assumido na figura 4.4. O mesmo resultado seria obtido utilizando os módulos (escalares) dos momentos no somatório:

$$\sum M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad -a \cdot A = 120 \cdot b + 300 \cdot c \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{120 \cdot b + 300 \cdot c}{a} = -1140 \ N$$

As componentes da reação em O podem agora ser calculadas aplicando o equilíbrio de forças da equação (4):

$$\sum F_{x1} = 0 \quad \Rightarrow \quad O_1 + F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad O_1 = -F_1 = -300\ N$$
$$\sum F_{x2} = 0 \quad \Rightarrow \quad O_2 + A + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad O_2 = -A - F_2 = -(-1140) - (-120) = 1260\ N$$

Dos resultados numéricos podemos concluir que a reação O_1 atua para a esquerda enquanto que O_2 atua para cima.

Exemplo 2 – A figura 4.5 mostra uma viga engastada em balanço com uma força **F** aplicada na extremidade. Para os dados da tabela 2, obtenha o DCL da viga.

Tabela 2 – Dados numéricos para o exemplo 2.

a, m	α, graus	F, N
6	30	400

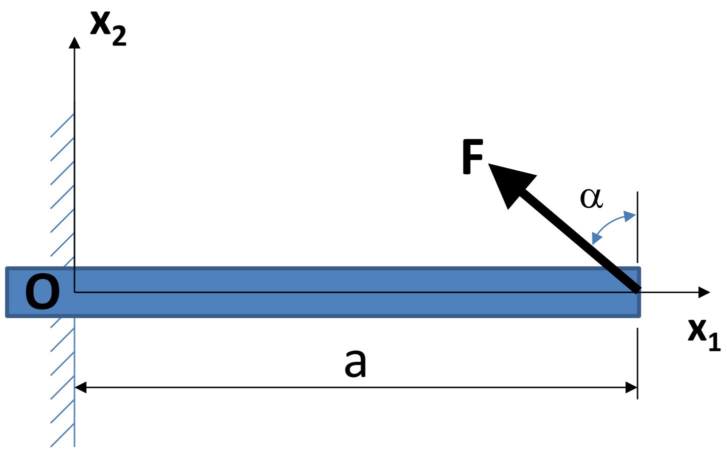

Figura 4.5 - Viga engastada em balanço com uma força F aplicada na extremidade.

Solução: O conjunto de reações que surgem no engaste podem ser reduzidas a um sistema força-binário (figura 4.6). Como no exemplo anterior, aplicam-se as condições de equilíbrio no plano (Eqs. 4) com o objetivo de calcular estas reações:

$$\sum F_{x1} = 0 \quad \Rightarrow \quad O_1 - F \cdot sen(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad O_1 = F \cdot sen(\alpha) = 400 \cdot sen(30) = 200 \ N$$
$$\sum F_{x2} = 0 \quad \Rightarrow \quad O_2 + F \cdot \cos(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad O_2 = -F \cdot \cos(\alpha) = -400 \cdot \cos(30) = -346{,}4 \ N$$
$$\sum M_O = 0 \quad \Rightarrow \quad M + a \cdot F \cdot \cos(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad M = -a \cdot F \cdot \cos(\alpha) = -6 \cdot 400 \cdot \cos(30) = -2078{,}5 \ N \cdot m$$

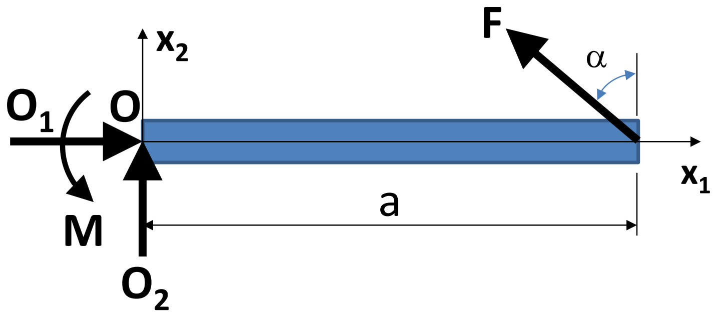

Figura 4.6 – Viga engastada em balanço com forças aplicadas reduzidas a um sistema força-binário.

Atividade 1, Atende aos objetivos 1 e 2: Resolva o exemplo 1 para os seguintes dados:

a, m	b, m	c, m	**F**, N
3	2	4	$-2300\,\mathbf{e_1} + 420\,\mathbf{e_2}$

Comentários da atividade: Siga o procedimento descrito nos exemplos sem utilizar a fórmula encontrada para as reações. Os resultados são:

$$A = 3346{,}7 \ N$$
$$O_1 = 2300 \ N$$
$$O_2 = -3766{,}7 \ N$$

Atividade 2, Atende aos objetivos 1 e 2: Resolva o exemplo 2 para os seguintes dados:

a, m	α, graus	F, N
4	60	1500

Comentários da atividade: Siga o procedimento descrito nos exemplos sem utilizar a fórmula encontrada para as reações. Os resultados são:

$$O_1 = 1299{,}1\ N$$
$$O_2 = -750\ N$$
$$M = -3000\ N.m$$

Conclusão

Baseados no princípio de que o conjunto de forças externas atuando em qualquer corpo pode ser reduzido a um sistema força-binário, vimos que as equações (4) representam a condição matemática para o equilíbrio.

Esta aula abordou também um aspecto de vital importância para qualquer engenheiro: o conceito de diagrama de corpo livre, o DCL. Este diagrama constitui uma idealização do corpo ou conjunto de corpos onde devem ser representadas todas as forças atuantes. Quando os apoios ou vínculos com outros corpos são eliminados no processo de idealização, seus efeitos devem ser substituidos pelas reações. As equações de equilíbrio devem então ser aplicadas para encontrar os esforços desconhecidos e assim completar toda a informação relacionada com o DCL.

No plano, haverá apenas três equações de equilíbrio independentes logo apenas problemas com três incógnitas poderão ser resolvidos. Se esse for o caso, o problema será estaticamente determinado. Todos os exemplos desta aula se enquadram nesta categoria. Situações estaticamente indeterminadas (mais de três incógnitas no plano) devem ser abordadas por métodos específicos que estão fora do escopo desta disciplina.

Referências Bibliográficas

Hibbeler RC (2010), “Estática: Mecânica para Engenharia”, Pearson Prentice Hall, 12ª edição, São Paulo, Brasil.

Beer FP, Johnston ER Jr (1994), “Mecânica Vetorial para Engenheiros”, 5ª ed. Makron Books, São Paulo, Brasil.

Crandall SH, Dahl NC, Lardner TJ (1978), “An Introduction to the Mechanics of Solids”, 3rd ed. McGraw-Hill Inc. Tokyo, Japan.