CEDERJ – CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA

DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CURSO: Engenharia de Produção DISCIPLINA: Mecânica Geral

CONTEUDISTA: Jorge Alberto Rodriguez Duran

Aula 6 –Forças distribuidas

Meta

Localização do centróide de seções planas e cálculo da resultante de forças continuamente distribuidas por unidade de comprimento.

Objetivos

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. Localizar o centróide de uma seção plana.
2. Calcular a resultante e o seu ponto de aplicação para uma força continuamente distribuida.

Introdução

Em aulas anteriores vimos que qualquer sistema de forças pode ser reduzido uma única força e a um binário atuando em um ponto. Este sistema força-binário tem no sólido um efeito equivalente ao efeito do conjunto de forças do sistema original. Na presente aula estas ideias serão utilizadas para definir o centro de gravidade CG de corpos com espessura constante. Para o caso em que a densidade de massa destes corpos for uniforme, a espessura pode ser desconsiderada o CG coincide com o centro geométrico ou centróide da seção plana.

Analisaremos também o conceito de forças continuamente distribuidas por unidade de comprimento, que constitui, conjuntamente com o conceito de força ou momento concentrado, uma idealização amplamente utilizada na modelagem de componentes e estruturas. As forças distribuidas servem para tratar de problemas envolvendo pressão de gases e fluidos, assim como forças de origem magnética ou gravitacional.

Centro de gravidade e centróide

Uma placa de espessura *t* constante apoiada no plano x_1x_2 (fig 6.1) estará sob a ação do seu próprio peso *W*. Em cada elemento infinitesimal de área dA atuará uma parte, também infinitesimal *dW*, do peso total tal que $W = \int dW$. Como as forças *dW* constituem um conjunto de forças paralelas entre sim e perpendiculares ao plano x_1x_2, a menor distância entre a linha de ação de cada uma delas até o eixo x_1 será a respectiva coordenada x_2. O momento elementar de cada *dW* no eixo x_1 será então $dM_{x1}=x_2 \cdot dW$ e o resultante $M_{x1} = \int x_2 \cdot dW$. O sistema força *W* - binário M_{x1} aplicado no eixo x_1 é equivalente a uma única força resultante *W* qua atua a uma distância $\bar{x}_2$ tal que:

$$\bar{x}_2 \cdot W = M_{x1} = \int x_2 \cdot dW \qquad (1)$$

Mediante um raciocínio similar chegamos à expressão para $\bar{x}_1$:

$$\bar{x}_1 \cdot W = M_{x2} = \int x_1 \cdot dW \qquad (2)$$

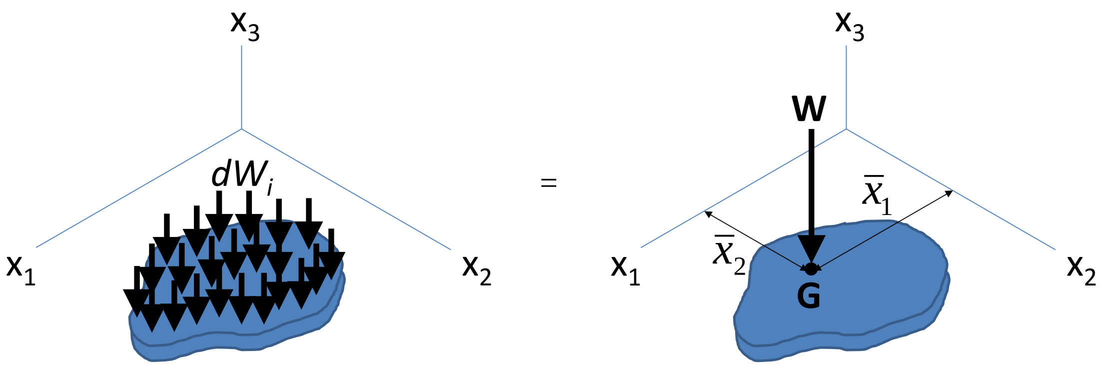

Figura 6.1 – O peso próprio de uma placa de espessura constante apoiada no plano x_1x_2 está distribuido *dW* por toda a superfície de contato. O sistema equivalente consiste do peso total *W* aplicado no centro de gravidade *G* da placa.

Assim chegamos à conclussão de que as infinitas forças de peso dW são equivalentes a uma única força resultante *W* aplicada no centro de gravidade G da placa e cujas coordenadas são $\bar{x}_1\bar{x}_2$.

Os pesos elementares *dW* de um corpo dependem de propriedades físicas como a densidade ρ de massa *m* e de peso γ, e também do volume *dV* e da aceleração da gravidade *g*. Uma expressão relacionando estas grandezas é a seguinte:

$$dW = dm \cdot g = \rho \cdot dV \cdot g = \rho \cdot t \cdot dA \cdot g \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (1) e (2) temos:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 \cdot W &= \int x_1 \cdot \rho \cdot t \cdot g \cdot dA \\ \bar{x}_2 \cdot W &= \int x_2 \cdot \rho \cdot t \cdot g \cdot dA \end{aligned} \qquad (4)$$

O peso total da placa, para espessura e densidade de massa constantes será $W=\rho \cdot t \cdot g \cdot A$. Neste caso o centro de gravidade coincide com o centro geométrico da placa (centróide), este sim, independente das propriedades físicas do corpo.

$$\bar{x}_1 = \frac{\int x_1 \cdot dA}{A}$$
$$\bar{x}_2 = \frac{\int x_2 \cdot dA}{A} \qquad (5)$$

As integrais do membro direito das equações (5) são conhecidas como momentos de área de primeira ordem *Q* com relação aos respectivos eixos:

$$Q_{x1} = \int x_2 \cdot dA$$
$$Q_{x2} = \int x_1 \cdot dA \qquad (6)$$

Se o corpo tiver um eixo de simetria, o centróide estará sobre este eixo pois nessa situação os momentos de área de primeira ordem positivos $x \cdot da$ cancelam-se com os negativos $-x \cdot da$ e a integral é zero. Para o caso de placas compostas por retângulos e outras formas conhecidas, a seguinte fórmula para a determinação do centróide da placa composta pode ser deduzida utilizando um procedimento similar ao descrito acima:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum \bar{x}_{1i} \cdot A_i}{\sum A_i}$$
$$\bar{x}_2 = \frac{\sum \bar{x}_{2i} \cdot A_i}{\sum A_i} \qquad (7)$$

Exemplo 1 – Obtenha a posição do centróide **C** de um triângulo de base *b* e altura *h*.

Solução: Calculamos primeiramente os momentos de área de primeira ordem pela equação (6). É necessário transformar os diferenciais de área em diferencias de comprimento para utilizar integrais simples. O processo está descrito na figura 6.2.

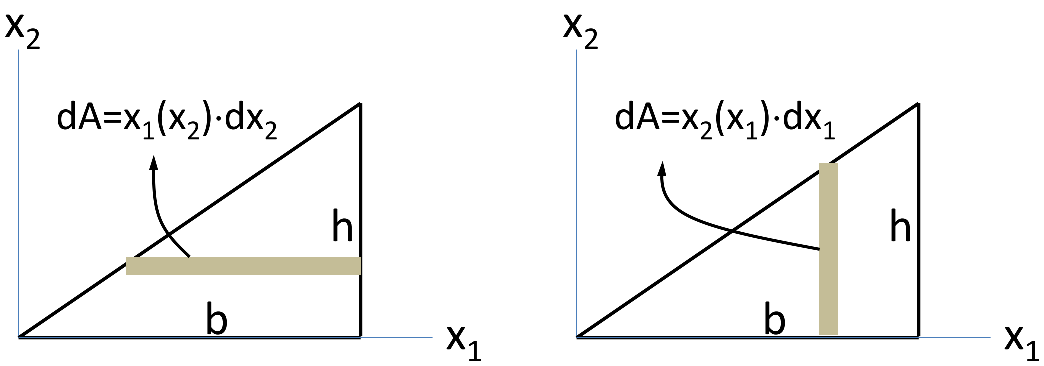

Figura 6.2 – O diferencial de área *dA* pode ser expresso em termos do diferencial dx_1 ou dx_2, dependendo da variável de integração.

$$Q_{x1} = \int x_2 \cdot dA = \int_0^h x_2 \cdot [b - x_1(x_2)] \cdot dx_2$$
$$Q_{x2} = \int x_1 \cdot dA = \int_0^b x_1 \cdot x_2(x_1) \cdot dx_1$$

A função $x_2(x_1) = \frac{h}{b} \cdot x_1$ logo o desenvolvimento das integrais é o seguinte:

$$Q_{x1} = \int_0^h x_2 \cdot \left[b - \frac{b}{h} \cdot x_2 \right] \cdot dx_2 = \frac{b \cdot h^2}{6}$$
$$Q_{x2} = \int_0^b x_1 \cdot \frac{h}{b} \cdot x_1 \cdot dx_1 = \frac{h \cdot b^2}{3}$$

A área de um triângulo $A=bh/2$ logo, utilizando a equação (5), calculamos a posição do centróide. Os resultados se mostram na figura 6.3.

$$\bar{x}_1 = \frac{Q_{x2}}{A} = \frac{2 \cdot h \cdot b^2}{3 \cdot b \cdot h} = \frac{2}{3} b$$
$$\bar{x}_2 = \frac{Q_{x1}}{A} = \frac{2 \cdot b \cdot h^2}{6 \cdot b \cdot h} = \frac{1}{3} h$$

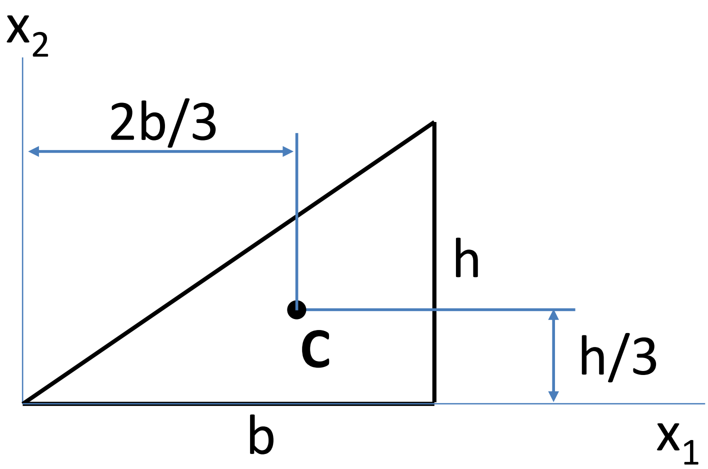

Figura 6.3 – Posição do centróide de um triângulo.

Atividade 1 – (Atende ao objetivo 1) – Obtenha a posição do centróide **C** para a seção mostrada na figura 6.4.

Comentários da atividade: Trata-se uma figura composta por dois retângulos. Utiliza-se a equação (7). Como o eixo x_2 é um eixo de simetria, o centróide já estará sobre ele. A tarefa se resume então a encontrar a posição de **C** a partir da base da seção. O resultado $\bar{x}_2 = \frac{3}{4} \cdot h$ é independente da largura b da seção.

Forças continuamente distribuídas

Retomando o que dissemos na introdução da presente aula, os modelos que consideram as cargas continuamente distribuídas se utilizam para representar forças devido à pressão de gases e fluídos, e também forças volumétricas como a gravidade. A figura 6.5 mostra uma viga sob a ação de um conjunto de forças paralelas. A variação infinitesimal da resultante destes carregamentos *dF* por unidade de comprimento $q(x_1)=dF/dx_1$ é conhecida como intensidade da força distribuída. As funções $q(x_1)$ mais utilizadas na prática são $q(x_1)=constante$ e $q(x_1)=Ax_1+B$, onde A e B são constantes.

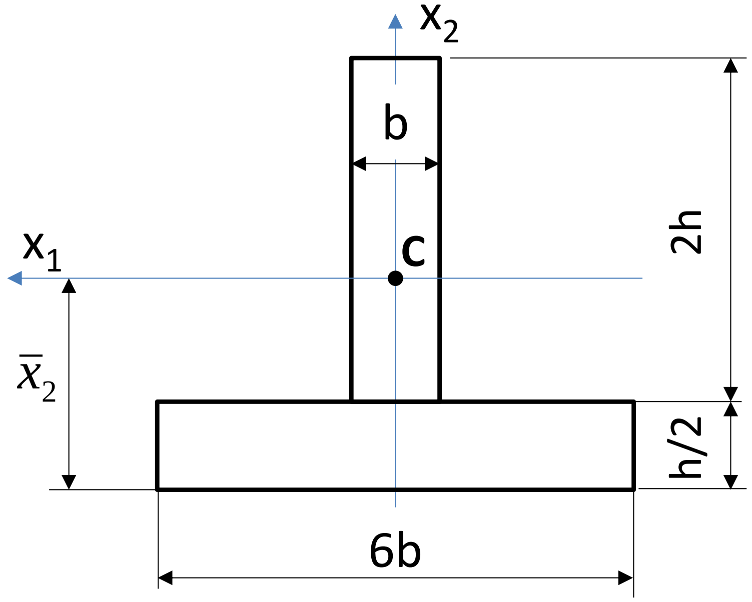

Figura 6.4 – Corresponde à atividade 1.

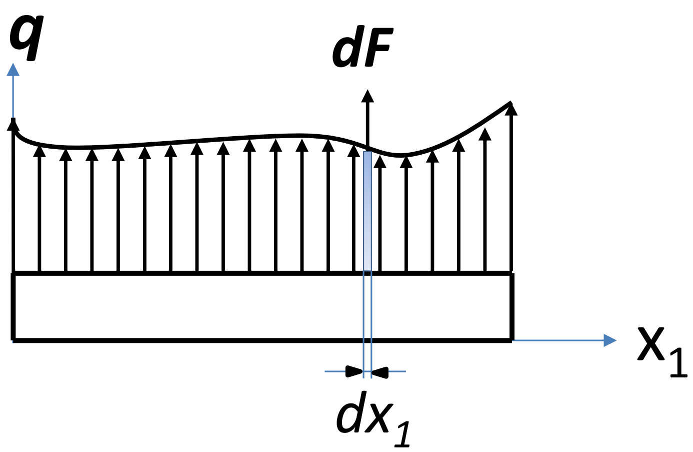

Figura 6.5 – Força continuamente distribuída de intensidade *q(x)*.

De aulas anteriores sabemos que dois sistemas de forças serão equivalentes se produzem o mesmo sistema força-binário resultantes. Para corpos em equilíbrio, sistemas equivalentes de forças implicam nas mesmas equações de equilíbrio. Podemos utilizar estes conceitos para substituir as forças continuamente distribuídas por uma resultante **R** aplicada em algum ponto do diagrama de carga $q(x_1)$. Considere a situação mostrada na figura 6.6. Vamos a escrever primeiramente as equações de equilíbrio escalares para o sistema de forças distribuídas de intensidade q (Eq. 8) e depois para a resultante R (Eq. 9), esta última considerada atuando a uma distância $\bar{x}$ do apoio esquerdo.

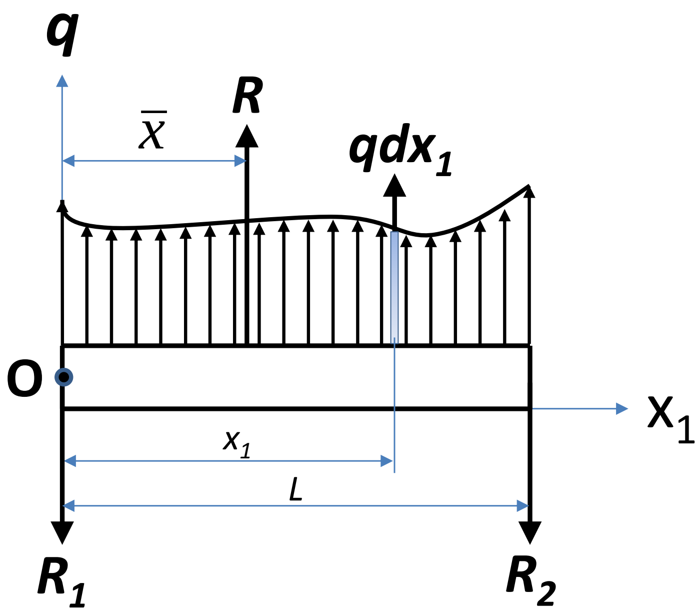

Figura 6.6 – Diagrama de corpo livre de uma viga bi-apoiada com um carregamento distribuído.

$$\begin{aligned} &\sum F = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_L q \cdot dx_1 = R_1 + R_2 \\ &\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_L x_1 \cdot q \cdot dx_1 = L \cdot R_2 \end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} &\sum F = 0 \quad \Rightarrow \quad R = R_1 + R_2 \\ &\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_1 \cdot R = L \cdot R_2 \end{aligned} \qquad (9)$$

Para que a força resultante *R* seja equivalente a força distribuída de intensidade *q* as equações 8 e 9 têm que produzir os mesmos resultados, logo:

$$
\begin{aligned}
R &= \int_L q \cdot dx_1 \\
\bar{x} &= \frac{\int_L x_1 \cdot q \cdot dx_1}{R} = \frac{\int_L x_1 \cdot q \cdot dx_1}{\int_L q \cdot dx_1}
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

A primeira das equações (10) nos diz que a resultante de um carregamento distribuído será a área sob o diagrama de carga $q(x_1)$, enquanto que a segunda nos diz que a linha de ação desta resultante passa pelo centróide do diagrama (ver equações 5 e 6).

Exemplo 2 – Considere uma viga de comprimento *L* (Figura 6.7) engastada em uma das suas extremidades (ponto O). Um certo carregamento com intensidade $w(x_1=L)=0$ e $w(x_1=0)=wo$ e variação linear age encima da viga. Obtenha o DCL da viga desprezando o peso próprio.

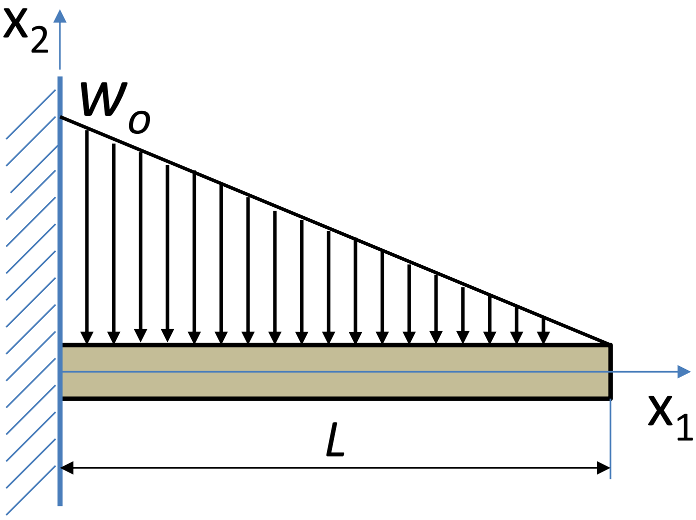

Figura 6.7 – Viga em balanço suportando um carregamento distribuído de variação linear.

Solução: Para o referencial mostrado na figura o diagrama de carga está descrito pela função $q(x_1)=wo\,(1-x_1/L)$. Podemos substituir o carregamento pelo seu equivalente estático aplicando as equações (10):

$$R=\int_L q\cdot dx_1=\int_0^L w_o\cdot\left(1-\frac{x_1}{L}\right)\cdot dx_1=w_o\cdot\left(x_1-\frac{x_1^{\;2}}{2L}\right)\Bigg|_0^L=\frac{1}{2}w_o\cdot L$$

$$\bar{x}=\frac{\int_L x_1\cdot q\cdot dx_1}{R}=\frac{\int_0^L w_o\cdot\left(x_1-\frac{x_1^{\;2}}{L}\right)\cdot dx}{\frac{1}{2}w_o\cdot L}=\frac{w_o\cdot\left(\frac{x_1^{\;2}}{2}-\frac{x_1^{\;3}}{3L}\right)\Bigg|_0^L}{\frac{1}{2}w_o\cdot L}=\frac{L}{3}$$

Como esperado, a resultante $R=wo\cdot L/2$ é a área sob o diagrama de carga (um triângulo) e a sua linha de ação passa pelo centróide do triângulo situado a $L/3$ da orígem (ver exemplo 1). Com a resultante do carregamento e a distância até sua linha de ação estamos em condições de isolar a viga do engaste e substituir o vínculo removido pelas reações de apoio R_O e M_O (figura 6.8). Aplicando as equações de equilíbrio temos:

$$\sum \mathbf{F_O}=0 \qquad \Rightarrow \qquad R_O=R$$
$$\sum \mathbf{M_O}=0 \qquad \Rightarrow \qquad M_O=\frac{1}{3}L\cdot R$$

Comentários do exemplo 1: É importante que o estudante de engenharia entenda desde agora que o procedimento descrito para substituir o carregamento distribuído por uma resultante que lhe é equivalente e a posterior utilização desta resultante nas equações de equilíbrio, só é permitido para o caso de forças *externas*. Este procedimento não pode ser utilizado para a determinação de forças e momentos *internos*. Nesses casos trabalha-se com uma resultante variável $R(x_1)$ antes de aplicar o equilíbrio.

Atividade 2: (Atende ao objetivo 2) – A figura 6.9 mostra uma viga bi-apoiada solicitada pelo seu peso próprio que é modelado como uma carga distribuida de valor constante *q*. Obtenha o DCL da viga.

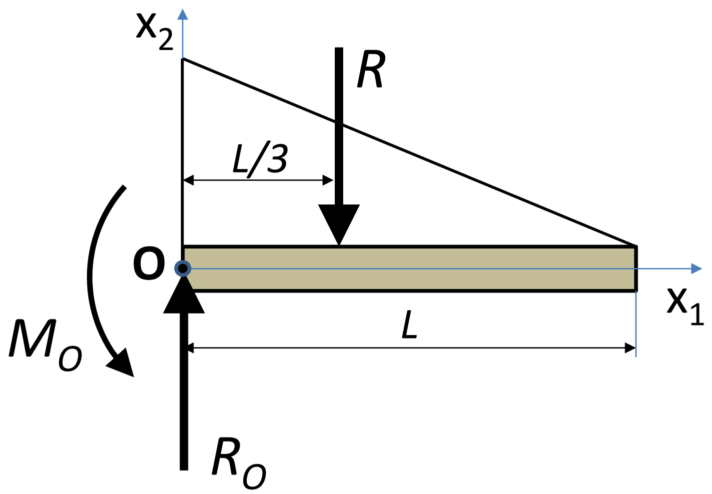

Figura 6.8 – Diagrama de corpo livre da viga em balanço da figura 6.7.

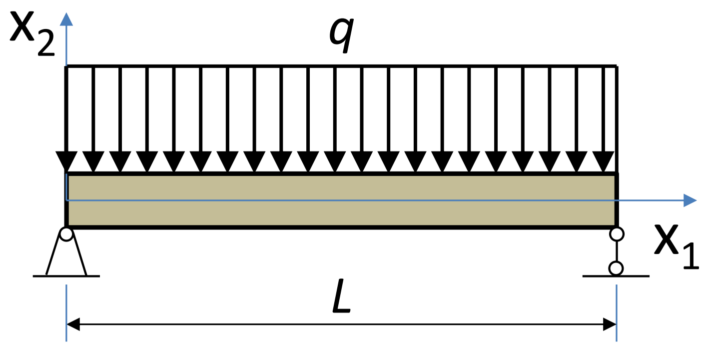

Figura 6.9 – Viga bi-apoiada solicitada pelo peso próprio de intensidade *q*.

Comentários da atividade: A carga distribuída pode ser substituída por uma resultante igual à area do retângulo descrito pelo diagrama de carga $R=q{\cdot}L$ atuando em $x_1=L/2$. Os apoios podem ser substituídos por reações verticais de valor igual a $R/2=q{\cdot}L/2$.

Conclusões

Na presente aula aprendimos a determinar as coordenadas do centro de gravidade *G* de uma placa de espessura constante. O sistema composto pelo peso total da placa *W* aplicado no ponto *G* é equivalente ao composto pelos infinitos pesos *dw* distribuídos na superfície. Para o caso de placas com densidade de massa constante o ponto *G* coincide com o centróide *C* e as coordenadas deste centro geométrico dependem então da relação entre os momentos de área de primeira ordem e a área total da seção. Desta forma o centróide é uma propriedade de área independente do material.

Na segunda parte da aula foi demonstrado que um carregamento continuamente distribuído *q* é equivalente a uma resultante cujo módulo é igual à area sob o diagrama de carga $q(x_1)$ e cuja linha de ação passa pelo centróide da figura geométrica descrita por este diagrama.

Referências Bibliográficas

Hibbeler RC (2010), “Estática Mecânica para Engenharia”, Pearson Prentice Hall, 12ª edição, São Paulo, Brasil.

Beer FP, Johnston ER Jr (1994), “Mecânica Vetorial para Engenheiros”, 5ª ed. Makron Books, São Paulo, Brasil.

Crandall SH, Dahl NC, Lardner TJ (1978), “An Introduction to the Mechanics of Solids”, 3rd ed. McGraw-Hill Inc. Tokyo, Japan.