

**CEDERJ – CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA**

**DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**

CURSO: Engenharia de Produção      DISCIPLINA: Mecânica Geral

**CONTEUDISTA:** Jorge Alberto Rodriguez Duran

## **Aula 7 –Estruturas**

### **Meta**

Apresentar o método dos nós e o método das seções para a determinação das forças de tração ou compressão nas barras de treliças planas simples

### **Objetivos**

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

1. Aplicar as equações de equilíbrio para calcular as reações em treliças planas simples.
2. Aplicar o método dos nós (ou o método das seções) para calcular as forças de tração e compressão nas barras de treliças planas simples.

### **Introdução**

O equilíbrio de forças e momentos só pode ser aplicado a sistemas convenientemente isolados de estruturas ou máquinas. Estes sistemas podem estar constituídos pela estrutura ou máquina

como um todo, ou por partes das mesmas. Em ambos os casos deve-se percorrer a periferia do sistema e identificar as forças que fazem contato direto (forças concentradas, distribuídas) ou indireto (de gravidade, eletromagnéticas, etc). Para modelar estas forças utilizamos certas idealizações, como as mostradas nas figuras 4.1 e 4.2. O esboço do sistema isolado com todas as forças presentes é chamado de diagrama de corpo livre DCL, conforme vimos na aula 4.

Nesta aula vamos aplicar as condições de equilíbrio a um tipo especial de estrutura chamado de “treliça”. A treliça é um conjunto de barras retas (figura 7.1a) cujo comprimento é bem maior do que as suas dimensões transversais. As junções ou nós (figura 7.1b) das barras estão constituídas por elementos de fixação removíveis como pinos, parafusos, rebites ou também permanentes, como é o caso das soldas.



a



b

Figura 7.1 – As treliças espaciais permitem cobrir grandes vãos com um número limitado de colunas (a). Por esse motivo são muito utilizadas em aeroportos e centros de convenções. As articulações entre as barras podem ser feitas mediante parafusos (b).

As forças de reação necessárias para garantir o equilíbrio das barras de uma treliça plana consistem de uma força normal e uma tangencial atuando em algum ponto da circunferência do furo por onde passam os elementos de fixação (Figura 7.2). As forças tangenciais são forças de atrito entre estes elementos e as barras. Problemas de atrito serão tratados na aula 10 mas desde já podemos adiantar que as forças de atrito são empiricamente estimadas como o produto da força normal  $\mathbf{N}$  entre as superfícies e um coeficiente de atrito  $\mu$  cujo valor oscila entre 0.2 e 0.4. Os pinos ou elementos de fixação estarão por tanto solicitados por duas forças ortogonais entre si: a força normal  $\mathbf{N}$  e a força tangencial ou de atrito  $\mu \mathbf{N}$ . O sistema

equivalente a estas duas forças é composto por uma força normal  $\mathbf{N}$  e um binário  $\mu \mathbf{N} r$ , onde  $r$  é o raio do pino (Figura 7.2). Ambos vetores estarão aplicados no centróide do pino. Este sistema força-binário será equivalente a uma única força  $\mathbf{N}$  aplicada a uma distância  $d = \mu r$  do centro do pino. O raio dos pinos já é um valor pequeno em comparação com as dimensões da treliça. A distância  $d$  é um valor ainda menor (entre 20 e 40 % de  $r$ ). Por este motivo e para todos os efeitos práticos, o sistema equivalente de forças consiste de uma única força  $\mathbf{N}$  atuando no centro geométrico do pino (Figura 7.2) o que transforma às barras da treliça em membros de duas forças. Como sabemos, um membro de duas forças só estará em equilíbrio se estas forças forem colineares. Assim podemos concluir que as barras de qualquer treliça estarão sempre solicitadas em tração ou compressão.

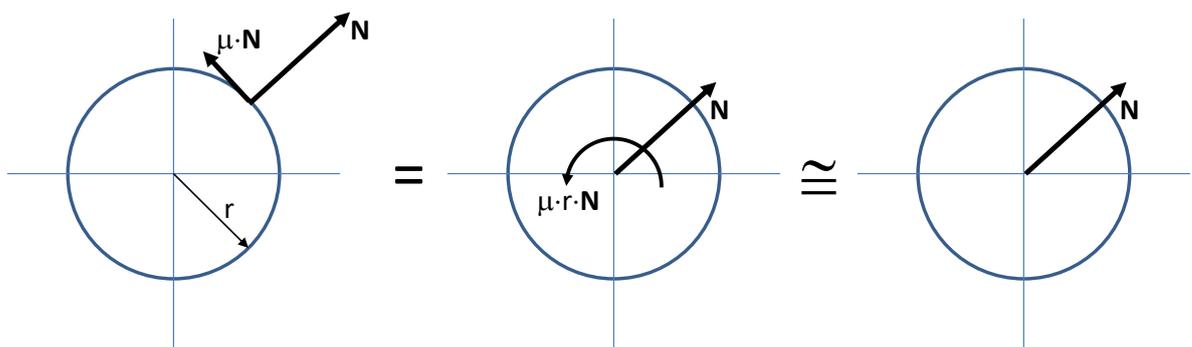


Figura 7.2 – Apesar das articulações das treliças transmitirem momentos, é possível considerar que o sistema de forças é estaticamente equivalente a uma única força atuando no centro geométrico do elemento de fixação.

Uma treliça rígida elementar (Figura 7.3 a) está constituída por três barras ( $b$ ) e três nós ( $n$ ). Observe que todas as forças estão aplicadas nos nós e que a estrutura não colapsará sob a ação destas forças, daí o nome de treliça rígida. Uma fórmula relacionando o número de barras ( $b$ ) e de nós ( $n$ ) para a treliça rígida da figura 7.3 (a) será:

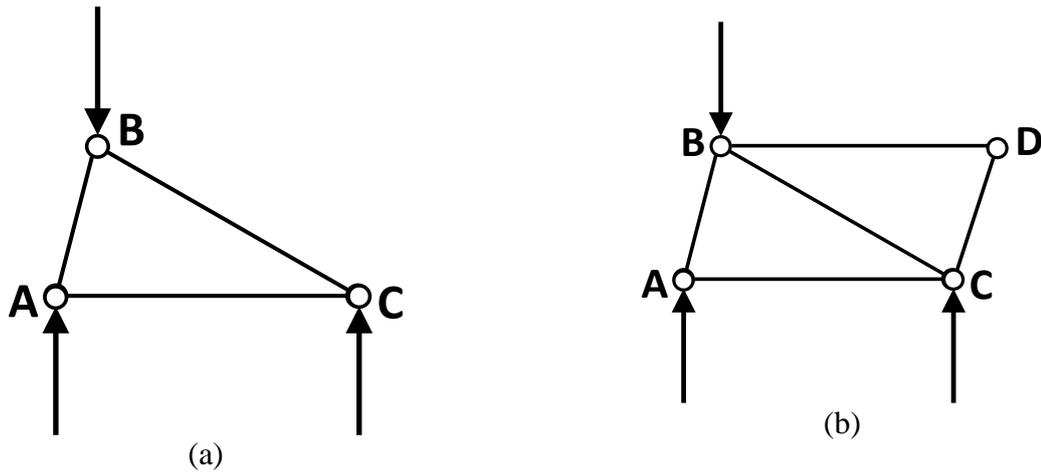


Figura 7.3 – Exemplos de treliça rígida (a) e treliça simples (b).

$$b = 2n - 3 \quad (1)$$

A adição de duas novas barras em dois nós da treliça rígida e de um novo nó para unir as duas novas barras (figura 7.3 b) gera uma treliça simples que não altera a relação entre o número de barras e o de nós (equação 1). As treliças planas simples serão as únicas abordadas na presente aula e por esse motivo as chamaremos, a partir de agora, simplesmente de treliças.

### Determinação das reações em treliças

A aplicação das equações de equilíbrio a treliças planas simples segue os mesmos padrões estudados anteriormente. A treliça inteira é considerada um corpo rígido e isolada dos apoios. As características dos esforços que estes apoios exercem sobre a treliça e que irão fazer parte do diagrama de corpo livre da mesma, dependem das idealizações estudadas em aulas anteriores. A melhor maneira de desenvolver este tópico é mediante um exemplo.

**Exemplo 1** – Obtenha uma expressão para as reações nos apoios **A** e **C** em função das dimensões e do carregamento aplicado **P** para a treliça mostrada na figura 7.4 (a).

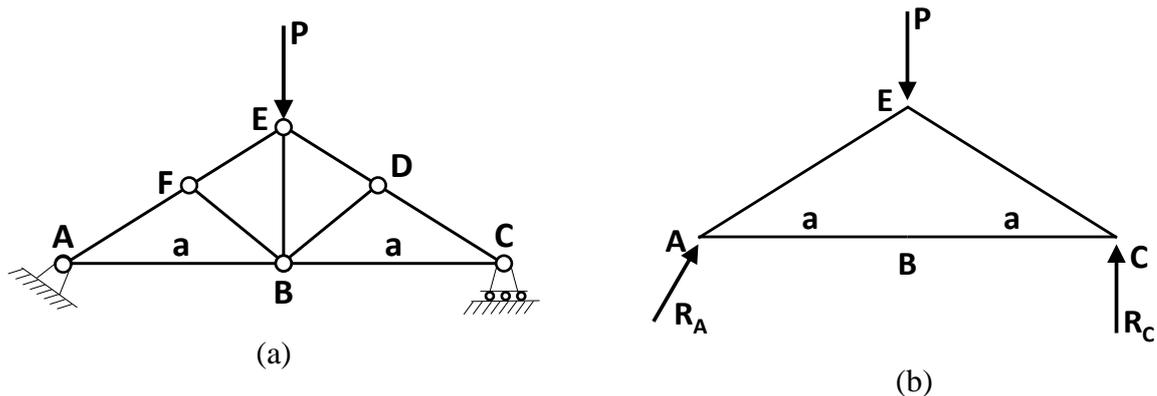


Figura 7.4 – Treliça e DCL da treliça do exemplo 1.

**Solução** – Utilizaremos o tradicional sistema de referência cartesiano  $x_1x_2$  (não mostrado na figura). Isolamos a treliça inteira e a consideramos como um corpo completamente rígido. Esta idealização implica em desconsiderar todas as forças de tração e compressão na barras, assim como as correspondentes reações nos pinos que as conectam. O apoio em **A** reage ao efeito da treliça com uma única força  $R_A$  de direção desconhecida, enquanto que no apoio em **C** surge uma reação vertical  $R_C$ , como mostrado no DCL da figura 7.4 (b). O somatório de momentos em **A** tem que ser zero para garantir o equilíbrio do sistema logo o módulo de  $R_C$  será:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot R_C = a \cdot P \Rightarrow R_C = \frac{P}{2} \quad (2)$$

Aplicando as outras duas equações vetoriais de equilíbrio temos:

$$\begin{aligned} \sum F_{x1} = 0 &\Rightarrow R_{Ax1} = 0 \\ \sum F_{x2} = 0 &\Rightarrow R_{Ax2} + R_C = P \Rightarrow R_{Ax2} = R_C = \frac{P}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Tanto o carregamento quanto a treliça são simétricos e por este motivo as reações independem das dimensões da treliça. Por simplicidade, desenvolvimos os somatórios considerando apenas

as componentes escalares das forças. Em problemas planos esta abordagem é sempre a mais indicada devido a sua simplicidade.

### Determinação das forças internas em treliças

Sabemos que todas as barras de uma treliça constituem membros de duas forças e consequentemente só podem estar em tração e compressão. Pela terceira lei de Newton, as solicitações nas barras são iguais e de sentido contrário às solicitações nos pinos. Estas forças são internas à treliça como um todo mas externas às barras e pinos. Para determiná-las é preciso isolar sub-sistemas da treliça original e aplicar as equações de equilíbrio.

A abordagem que trabalha com todas as barras e pinos da treliça como sub-sistemas, ou seja, àquela na que se faz o desmembramento total da treliça, recebe o nome de *método dos nós*. Neste caso será possível calcular todas as forças em todas as barras e pinos. Outro método consiste em isolar algumas seções para calcular os esforços em apenas algumas barras de interesse. Este segundo método é conhecido como o *método das seções*. Demonstraremos ambos os métodos mediante exemplos.

**Exemplo 2** – Calcule pelo método dos nós, todas as forças atuantes nas barras e pinos da treliça do exemplo 1, reproduzida com todas as dimensões necessárias na figura 7.5. Considere os dados da tabela 1.

Tabela 1 – Dados numéricos do exemplo 2.

P	a	b	c
KN	mm		
15	100	$a/4$	$4/5 \cdot a$

**Solução** – Utilizaremos o método dos nós. Para isto será necessário construir o DCL de todos os nós e barras da treliça. Todas as forças serão inicialmente consideradas trativas nas barras, logo saindo dos elementos. Um sinal negativo na resposta numérica significa que o sentido

assumido não é o correto e por tanto a força é compressiva. A análise será simplificada pela simetria da treliça e do carregamento.

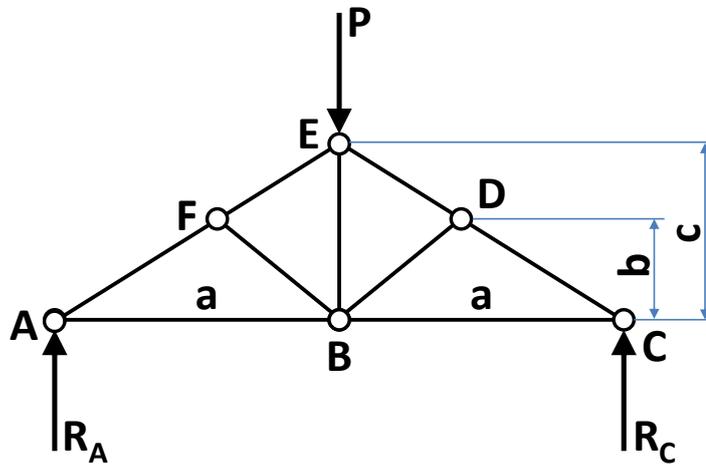


Figura 7.5 – Treliça do exemplo 1 com as dimensões necessárias para calcular o comprimento de todas as barras.

O primeiro passo consiste em realizar uma análise geométrica para definir o comprimento de todas as barras. Como as distâncias  $b$  e  $c$  são função de  $a$  (tabela 1), podemos parametrizar a treliça, ou seja, calcular todas suas dimensões em função do parâmetro  $a$ . Esta abordagem tem algumas vantagens: 1) A solução pode ser estendida a treliças de outro tamanho, desde que as proporções permaneçam iguais; 2) O desenvolvimento algébrico até o final do problema facilita a identificação e correção de eventuais erros cometidos durante as análises e 3) É possível separar a influência de cada variável ou parâmetro nos resultados finais. Algumas aplicações sucessivas do teorema de Pitágoras para os triângulos retângulos incluídos na treliça permitem obter os seguintes resultados para as barras AF, FE e FB. Acompanhe o procedimento com base na figura 7.6 e os resultados na figura 7.7.

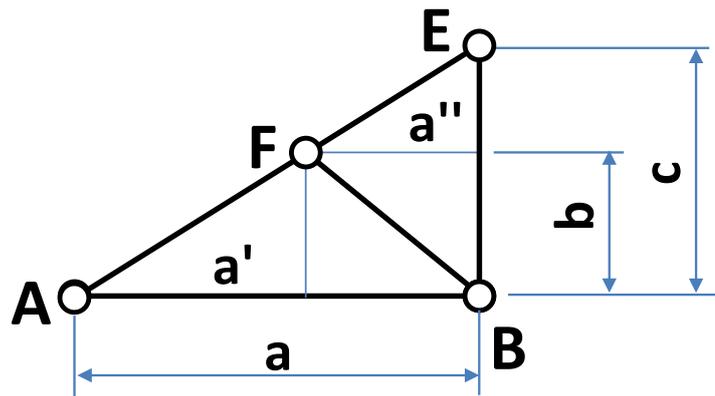


Figura 7.6 – Geometria da metade esquerda da treliça.

$$\frac{b}{a'} = \frac{c-b}{a''} = \frac{c}{a} = \frac{\frac{4}{5}a}{a} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad a' = \frac{5}{4}b = \frac{5}{4} \frac{4}{5}a = \frac{5}{16}a$$

$$a'' = \frac{5}{4}(c-b) = \frac{5}{4}\left(\frac{4}{5}a - \frac{a}{4}\right) = \frac{11}{16}a$$

$$AF^2 = b^2 + (a')^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{16}a\right)^2 \quad \Rightarrow \quad AF = \frac{\sqrt{41}}{16}a \quad (4)$$

$$FE^2 = (c-b)^2 + (a'')^2 = \left(\frac{11}{20}a\right)^2 + \left(\frac{11}{16}a\right)^2 \quad \Rightarrow \quad FE = \frac{11\sqrt{41}}{80}a$$

$$FB^2 = b^2 + (a'')^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{11}{16}a\right)^2 \quad \Rightarrow \quad FB = \frac{\sqrt{137}}{16}a$$

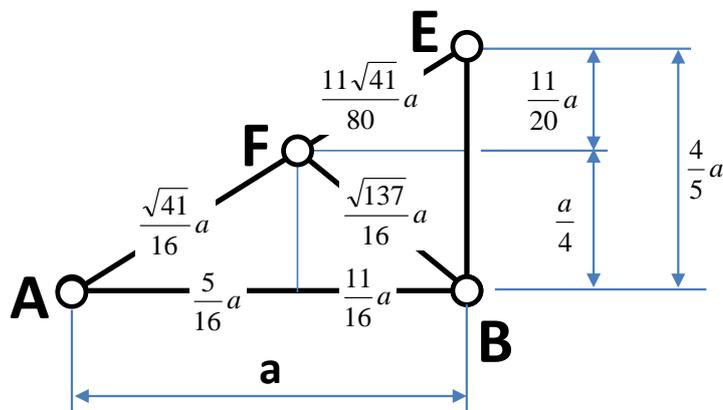


Figura 7.7 – Dimensões das barras da treliça em função do parâmetro  $a$ .

O DCL de todos os pinos e barras da metade esquerda da treliça se mostram na figura 7.8. Começamos aplicando as equações de equilíbrio (na sua forma escalar) ao nó **A**. Observe que para projetar a força  $F_{AF}$  nas direções  $x_1$  e  $x_2$  utilizamos o ângulo formado entre as barras AB e AF. O seno deste ângulo será igual ao quociente do cateto oposto pela hipotenusa

$$\frac{a/4}{\sqrt{41}/16a} = \frac{4}{\sqrt{41}} \text{ enquanto que o cosseno será } \frac{5/16a}{\sqrt{41}/16a} = \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

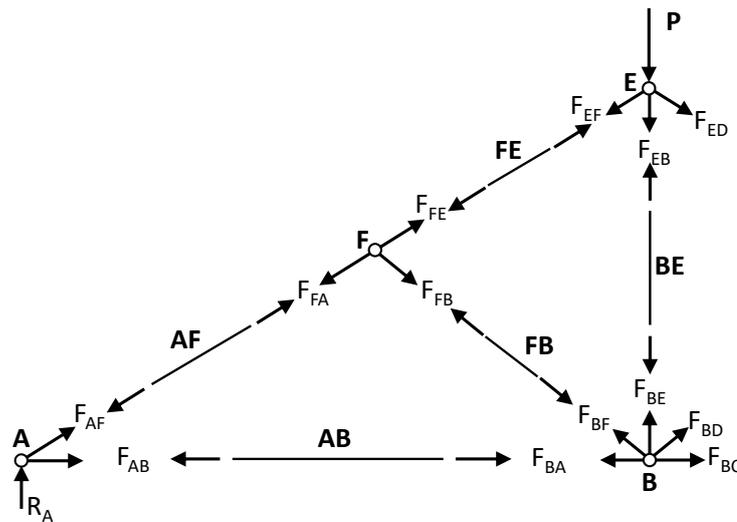


Figura 7.8 – Diagrama de corpo livre de todos os pinos e barras da metade esquerda da treliça do exemplo 2.

$$\sum F_{x2} = 0 \Big|_{\text{nó A}} \Rightarrow R_A + F_{AF} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 0 \tag{5}$$

$$F_{AF} = -\frac{R_A \cdot \sqrt{41}}{4} = -\frac{P \cdot \sqrt{41}}{2 \cdot 4} = -15 \cdot \frac{\sqrt{41}}{8} = -12 \text{ KN}$$

O resultado negativo indica que a barra AB está sendo comprimida.

$$\sum F_{x1} = 0 \Big|_{\text{nó A}} \Rightarrow F_{AB} + F_{AF} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 0 \tag{6}$$

$$F_{AB} = -F_{AF} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = -(-12) \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 9.4 \text{ KN}$$

A aplicação das equações de equilíbrio ao nó F retorna o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
 \sum F_{x2} = 0 \Big|_{\text{nó F}} &\Rightarrow -F_{FA} \cdot \frac{\frac{a}{\sqrt{41}}}{16} - F_{FB} \cdot \frac{\frac{a}{\sqrt{137}}}{16} + F_{FE} \cdot \frac{\frac{11}{11\sqrt{41}}a}{80} = 0 \\
 &\Rightarrow -F_{FA} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} - F_{FB} \cdot \frac{4}{\sqrt{137}} + F_{FE} \cdot \frac{44}{11\sqrt{41}} = 0 \quad (7) \\
 \sum F_{x1} = 0 \Big|_{\text{nó F}} &\Rightarrow -F_{FA} \cdot \frac{\frac{5}{\sqrt{41}}a}{16} + F_{FB} \cdot \frac{\frac{11}{\sqrt{137}}a}{16} + F_{FE} \cdot \frac{\frac{11}{11\sqrt{41}}a}{80} = 0 \\
 &\Rightarrow -F_{FA} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} + F_{FB} \cdot \frac{11}{\sqrt{137}} + F_{FE} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = 0
 \end{aligned}$$

Que, após a substituição dos valores conhecidos e na sua forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} -0,34 & 0,62 \\ 0,94 & 0,78 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{FB} \\ F_{FE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,5 \\ -9,37 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} F_{FB} \\ F_{FE} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ou seja, a barra FB está descarregada enquanto que a força compressiva na barra FE permanece igual à da barra AF ( $F_{FE} = F_{AF} = -12 \text{ KN}$ ). Observe também que, apesar de que continuamos tratando à força  $F_{AF} = F_{FA}$  como positiva, no momento de substituir seu valor colocamos o sinal negativo na frente, ou seja  $F_{AF} = -12 \text{ KN}$ . Continuando com o nó E temos:

$$\begin{aligned}
 \sum F_{x1} = 0 \Big|_{\text{nó E}} &\Rightarrow -F_{EF} \cdot \frac{\frac{11}{11\sqrt{41}}a}{80} + F_{ED} \cdot \frac{\frac{11}{11\sqrt{41}}a}{80} = 0 \Rightarrow F_{EF} = F_{ED} \\
 \sum F_{x2} = 0 \Big|_{\text{nó E}} &\Rightarrow -P - F_{EB} - F_{EF} \cdot \frac{\frac{20}{11\sqrt{41}}a}{80} - F_{ED} \cdot \frac{\frac{20}{11\sqrt{41}}a}{80} = 0 \quad (9) \\
 &\Rightarrow -P - F_{EB} - F_{EF} \cdot \left( \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{41}} \right) = 0 \Rightarrow F_{EB} = 0
 \end{aligned}$$

Devido à simetria da treliça e do carregamento, a mesma análise desenvolvida até aqui poderia ter começado no nó C, obtendo-se os mesmos resultados. Por este motivo, ao chegar ao nó B as forças  $F_{BD}$  e  $F_{BC}$  da figura 7.8 já são conhecidas e iguais a  $F_{BF}$  e  $F_{BA}$ , respectivamente. No caso particular desta treliça apenas as barras externas suportam esforços. A figura 7.9 mostra o resultado final com todas as forças de reação nas barras e nos apoios da treliça do exemplo 2. Observe que resolvimos um problema com 11 incôgnitas a partir de uma única força  $P$  dada

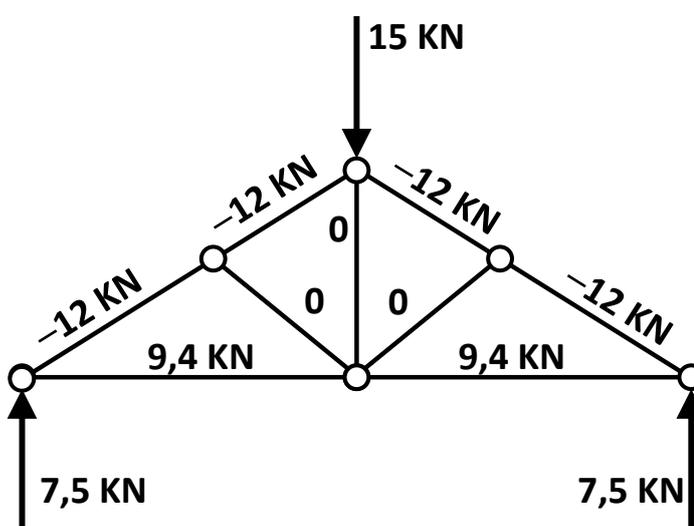


Figura 7.9 – Forças de reação à força externa de 15 kN nos elementos e apoios da treliça.

**Comentários:** Ao final deste exemplo observamos que em cada nó é possível aplicar apenas os somatórios de forças nas direções  $x_1$  e  $x_2$ . Assim, haverá duas equações por cada nó ou  $2n$  equações para toda a treliça, que podem ser resolvidas para  $2n$  incôgnitas. Para o presente exemplo  $2n=9+3=12$  (ver equação 1) mas o número de incôgnitas era de apenas 11, ou seja, o método dos nós, sozinho, permitiria, não apenas encontrar as forças nas barras e pinos, como também as reações nos apoios. Neste curso, porém, daremos preferência à sequência demonstrada mediante os exemplos 1 e 2, ou seja, calcularemos primeiramente as reações nos apoios mediante o equilíbrio da treliça, e depois as forças nos nós e barras que a compoem mediante o método dos nós.

**Exemplo 3** – Calcule o módulo da força na barra FB ( $F_{FB}$ ) da treliça mostrada na figura 7.10. Utilize o método das seções. Os dados geométricos e de carregamento se mostram na tabela 2.

Tabela 2 – Dados numéricos do exemplo 3.

P KN	W KN	a mm	b	c
15	12	100	a/4	4/5·a

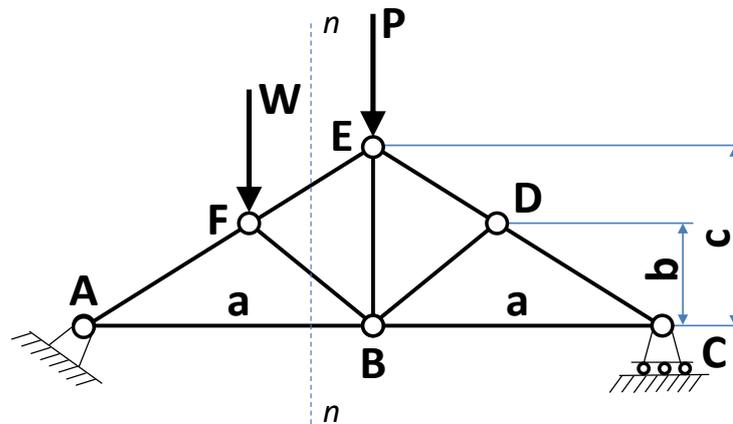


Figura 7.10 – Treliça do exemplo 3. A seção  $nn$  permite separar a treliça em dois corpos rígidos, cada um deles com os seus respectivos diagramas de corpo livre.

**Solução:** Da mesma forma que a treliça inteira (exemplo 1) e cada um dos nós e barras que a compoem (exemplo 2) foram considerados como um corpo rígido em equilíbrio, partes ou seções da treliça também estarão em equilíbrio. É nesta idéia simples que baseia-se o poderoso método das seções, largamente utilizado na análise estrutural. Começamos calculando as reações nos apoios. As relações geométricas obtidas no exemplo 2 permanecem válidas, especialmente as análises relacionadas com a Eq. (4) e as figuras 7.6 e 7.7

Começamos aplicando o equilíbrio à treliça inteira considerada como um corpo rígido (Figura 7.11):

$$\sum \mathbf{M}_A = 0 \Rightarrow 2 \cdot a \cdot R_C = a \cdot P + \frac{5}{16} a \cdot W$$

$$R_C = \frac{1}{2} \left( P + \frac{5}{16} \cdot W \right)$$
(10)

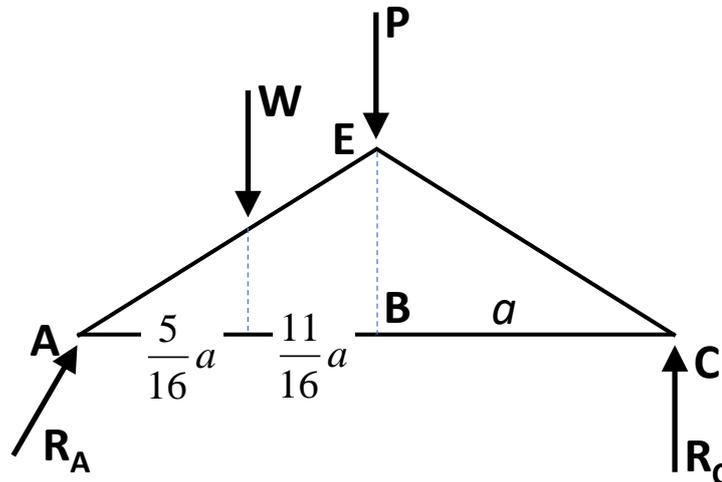


Figura 7.11 – DCL da treliça inteira do exemplo 3.

$$\sum \mathbf{F}_{x1} = 0 \Rightarrow R_{Ax1} = 0$$

$$\sum \mathbf{F}_{x2} = 0 \Rightarrow R_{Ax2} + R_C = P + W$$

$$R_{Ax2} = P + W - \frac{1}{2} \left( P + \frac{5}{16} \cdot W \right) = \frac{P}{2} + \frac{11}{16} \cdot W$$
(11)

Isolando a parte à esquerda do corte ou seção *nn* teremos um corpo rígido sollicitado pelas forças externas de módulos  $W$ ,  $R_A$ ,  $F_{BA}$ ,  $F_{FB}$  e  $F_{FE}$  (figura 7.12). Como  $W$  e  $R_A = R_{Ax2}$  são conhecidas, as três equações de equilíbrio no plano serão suficientes para encontrar as forças nas barras cortadas pela seção *nn*. Observe que a linha de ação das forças  $F_{FE}$  e  $F_{AB}$  passa pelo nó A o que significa que elas não tem braço de alavanca em relação a este ponto. Como consequencia seus momentos em relação a A serão zero. Isto permite a determinação da força  $F_{FB}$  mediante uma única equação.

$$\sum \mathbf{M}_A = 0 \Rightarrow \mathbf{r}_{AF} \times \mathbf{F}_{FB} + \mathbf{r}_{AF} \times \mathbf{W} = 0$$
(12)

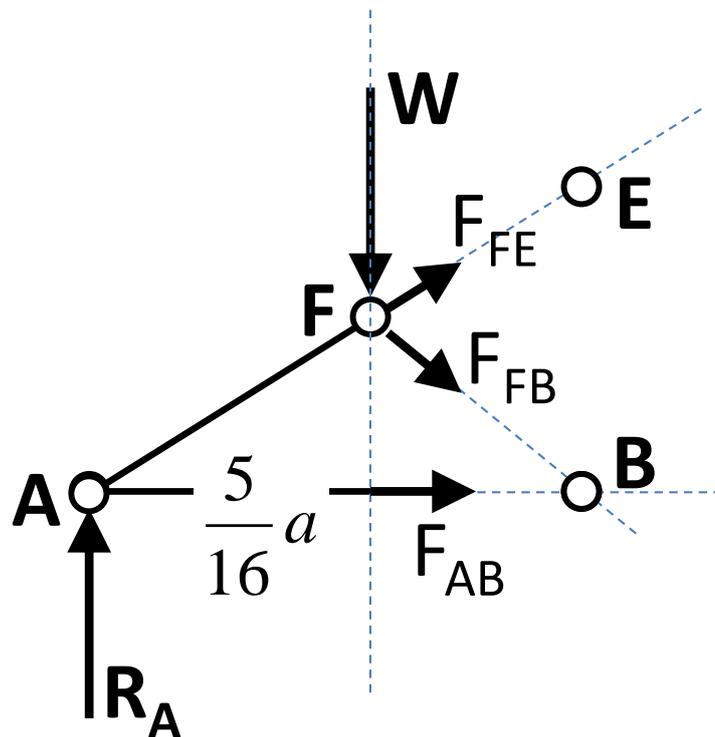


Figura 7.12 – Diagrama de corpo livre da treliça à esquerda da seção  $nn$ .

Para efetuar os produtos vetoriais devemos estabelecer um referencial e expressar os vetores de força e de posição como vetores cartesianos. Em problemas planos, no entanto, estamos dando preferência ao trabalho com escalares. Escrevendo então a Eq. (12) em função das componentes temos:

$$r_{AF} \cdot F_{FB} \cdot \text{sen}(\alpha) + r_{AF} \cdot W \cdot \text{sen}(\beta) = 0 \quad (13)$$

Onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os ângulos entre o vetor de posição  $r_{AB}$  e as forças  $F_{FB}$  e  $W$ , respectivamente.

Note que o produto  $r_{AF} \cdot \text{sen}(\beta) = \frac{5}{16}a$ . Já para o ângulo  $\alpha$  observamos que a lei dos senos,

quando aplicada ao triângulo formado pelos nós FEB, retorna:

$$\frac{\frac{4}{5}a}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\frac{\sqrt{137}}{16}a}{\text{sen}(\gamma)} \quad (14)$$

Onde  $\gamma$  é o ângulo entre as barras FE e EB. Da figura 7.6 temos:

$$\text{sen}(\gamma) = \frac{\frac{11}{16}a}{\frac{11\sqrt{41}}{80}a} = \frac{5}{\sqrt{41}} \quad (15)$$

Por tanto:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\frac{5}{\sqrt{41}} \cdot \frac{4}{5}a}{\frac{\sqrt{137}}{16}a} = \frac{64}{\sqrt{41}\sqrt{137}} = \frac{64}{5617} \sqrt{41}\sqrt{137} \quad (16)$$

Substituindo estes resultados na equação (13) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{41}}{16}a \cdot F_{FB} \cdot \frac{64}{5617} \sqrt{41}\sqrt{137} + \frac{5}{16}a \cdot W &= 0 \\ F_{FB} &= -\frac{5}{64}W \sqrt{137} = -\frac{5}{64} \cdot 12 \cdot \sqrt{137} \cong -11 \text{ KN} \end{aligned} \quad (17)$$

Podemos, apesar de não ser solicitado no exemplo, calcular as demais forças nas barras cortadas, novamente aplicando as equações de equilíbrio. O estudante deve verificar os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} F_{FE} &= -12 \text{ KN} \\ F_{AB} &= 19,7 \text{ KN} \end{aligned} \quad (18)$$

**Atividade 1 – Atende aos objetivos 1 e 2.** Considere a treliça mostrada na figura 7.13. Determine as reações nos apoios e as forças em todas as barras em função da carga externa aplicada  $P$ .

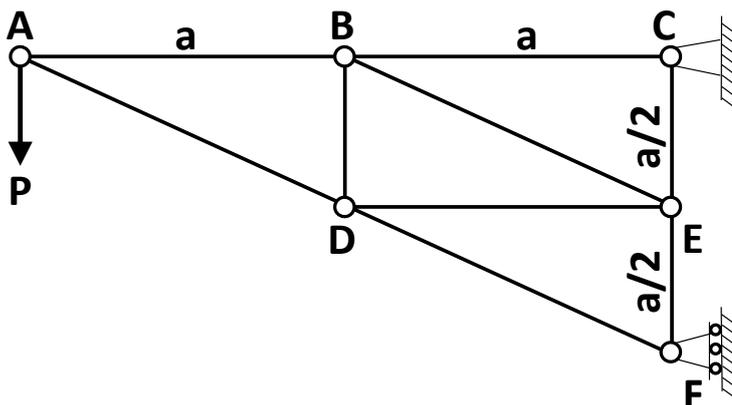


Figura 7.13 – Treliça da atividade 1.

**Comentários da atividade 1:** Seguindo o procedimento descrito nos exemplos anteriores, primeiramente isolamos a treliça e calculamos as reações nos apoios. As direções horizontal e vertical dos esforços estão representadas pelos subscritos 1 e 2 respectivamente, enquanto que o sentido é dado pelas setas ao lado de cada resposta.

$$\begin{aligned}
 R_F &= 2P && \leftarrow \\
 R_{C1} &= 2P && \rightarrow \\
 R_{C2} &= P && \uparrow
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

A seguir construímos os DCLs de cada nó e determinamos as forças nas barras. Como não será possível resolver para mais do que duas forças por nó, uma certa ordem deverá ser seguida. Uma boa dica seria começar pelas barras próximas aos apoios ou aos pontos de aplicação das forças externas. Para projetar as forças utilizamos as definições de senos e cossenos, eliminando a necessidade de calcular os ângulos. Por trigonometria calculamos o comprimento

das barras AD, DF e BE como sendo  $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ . Como de costume consideramos todas as forças saindo dos nós (ou como sendo trativas nas barras que neles se encontram). O sinal negativo na frente de algumas forças indica que estas entram nos nós (ou comprimem as barras). Para o nó A, por exemplo, temos:

$$\begin{aligned} \sum F_{x2} = 0 &\Rightarrow \frac{a/2}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} F_{AD} + P = 0 \Rightarrow F_{AD} = -\sqrt{5}P \\ \sum F_{x1} = 0 &\Rightarrow F_{AB} + \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} F_{AD} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 2P \end{aligned} \quad (20)$$

O mesmo procedimento deve ser seguido nas outras articulações da treliça. Os resultados finais se mostram na figura 7.14, sempre em função da carga externa aplicada  $P$ . Interessante notar que para esta configuração de treliça haverá três membros de força zero.

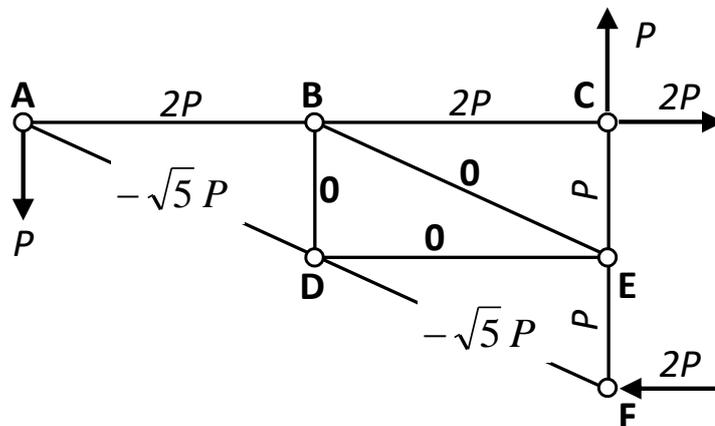


Figura 7.14 – Reações e forças nas barras da treliça da atividade 1, em função da carga externa aplicada  $P$ .

## Conclusões

Nesta aula vimos que as treliças estão constituídas por barras retas unidas por nós. Como as forças externas aplicam-se somente nos nós, as barras das treliças sofrem apenas esforços de tração e de compressão. Isto possibilita a utilização de barras delgadas, diminuindo o peso total da estrutura.

A determinação das reações nos apoios deve ser feita considerando as treliças como corpos rígidos e aplicando as equações de equilíbrio. Já os esforços em todas as barras devem ser calculados utilizando o método dos nós que consiste em aplicar as condições de equilíbrio a cada um dos nós da estrutura. Isto é equivalente a isolar os pinos que unem as barras e aplicar as equações de equilíbrio aos diagramas de corpo livre destes pinos. Para calcular os esforços em apenas algumas barras, aplica-se o método das seções que consiste em secionar a treliça e aplicar as equações de equilíbrio a uma das duas partes que resultam do corte.

### **Resumo**

As barras das estruturas são membros de duas forças e por tanto só transmitem esforços de tração ou compressão.

### **Referências Bibliográficas**

Beer FP, Johnston ER Jr (1994), "Mecânica Vetorial para Engenheiros", 5ª ed. Makron Books, São Paulo, Brasil.

Hibbeler RC (2010), "Estática Mecânica para Engenharia", Pearson Prentice Hall, 12ª edição, São Paulo, Brasil.

Crandall SH, Dahl NC, Lardner TJ (1978), "An Introduction to the Mechanics of Solids", 3<sup>rd</sup> ed. McGraw-Hill Inc. Tokyo, Japan.