

**CEDERJ – CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA  
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**

CURSO: Engenharia de Produção    DISCIPLINA: Mecânica Geral

CONTEUDISTA: Jorge Alberto Rodriguez Duran

**Aula 8 – Vigas**

**Meta**

Obtenção dos gráficos de forças internas em elementos tipo vigas

**Objetivos**

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

- 1 Aplicar o método das seções para obter as equações que representam a variação dos esforços internos ao longo (na direção axial) de elementos tipo vigas.
- 2 Plotar as equações das forças internas identificando as seções críticas.

**Introdução**

Na aula 7 – Estruturas aprendimos a calcular os esforços de tração e compressão nas barras das treliças. Estas barras são elementos delgados cujo comprimento é bem maior do que as suas dimensões transversais. O elemento tipo viga se enquadra nesta definição e por tanto as barras das treliças podem ser modeladas como vigas.

Quando queremos encontrar os esforços em apenas algumas vigas aplicamos o método das seções. De acordo com este método, se toda a treliça está em equilíbrio, partes dela (no caso as vigas) também o estarão. É possível então estabelecer um referencial local às vigas de maneira que um dos eixos (quase sempre o  $x_1$ ) coincida com a maior dimensão do elemento, ou seja, como o comprimento. A partir daí aplicamos as equações de equilíbrio e determinamos as forças axiais (de tração ou compressão, na direção de  $x_1$ ) nas vigas cortadas pela seção.

É importante destacar que as forças internas determinadas pelo método das seções constituem resultantes de vários esforços infinitesimais distribuídos em toda a seção de corte. Como sabemos esse vários esforços infinitesimais podem ser reduzidos, como qualquer sistema de forças, a uma força e um momento resultantes aplicados no centróide da seção. Mediante o método das seções procuramos pelas componentes desses esforços resultantes. Por este motivo teremos, no caso mais geral, 6 tipos de forças internas (três momentos e três forças). As vigas da treliça constituem um caso particular no qual apenas um dos esforços internos não é zero (a força axial de tração ou compressão). Nessa situação todas as outras componentes escalares do equilíbrio se reduzem às identidades  $0=0$ .

### **Equações e gráficos das forças internas**

As equações das forças internas para elementos tipo viga serão funções das cargas externas aplicadas e da distância até a origem do referencial. Vamos definir essa distância na direção  $x_1$  pela variável  $x$ . Considere o DCL de uma viga AB prismática (de igual seção em todo seu comprimento, como as barras das treliças, por exemplo) solicitada por uma força externa de tração  $P$  que passa pelo centróide (Figura 1). O referencial cartesiano está situado no extremo esquerdo da viga com o eixo  $x_1$  indicando a direção axial.

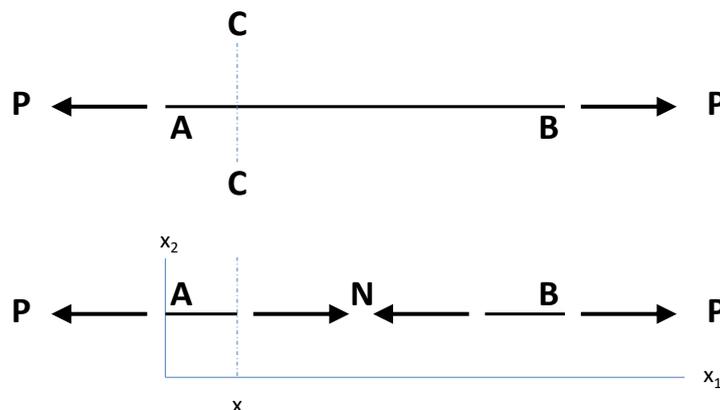


Figura 1 – Viga prismática AB cortada por uma seção a uma distância  $x$  na direção  $x_1$ .

Um corte transversal da viga pela seção CC fornece dois novos DCLs. O efeito de cada uma das partes da viga sobre a outra se reduz a um único esforço axial interno **N**. Se a viga como um todo estava em equilíbrio, cada um das novas partes também o estará. Assim o esforço axial **N** deverá ser suficiente para satisfazer a seguinte equação:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \sum F_{x1} = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P \quad \text{Eq. 1}$$

Observamos que **N** é uma função de **P** mas não da variável **x**. Isto significa que para qualquer corte ou seção entre  $0 \leq x \leq AB$  a força interna permanece constante. Todas as seções da viga **AB** devem resistir uma força interna axial resultante de valor constante e igual ao esforço externo aplicado **P**. O gráfico de **N(x)** para esta viga é portanto uma linha horizontal, como mostrado na Figura 2.

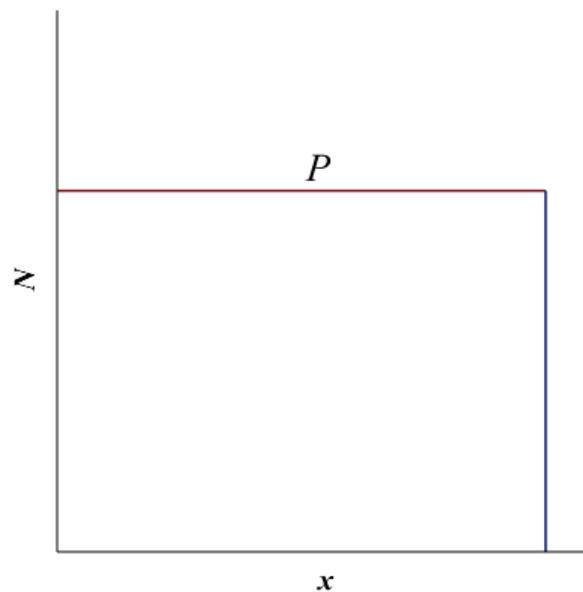


Figura 2 – Gráfico de  $N(x)=P$  para a viga da Figura 1.

Em alguns tipos de estruturas as cargas estão aplicadas diretamente nos membros e não apenas nos nós como nas treliças. Estas forças transversais geram outras dois tipos de forças internas chamadas de esforço cortante **EQ** e momento fletor **MF**. Considere uma viga apoiada em rótulas e solcitada por uma força transversal **P** a uma distância **a** do apoio **A** (Figura 3). As reações nas rótulas tem direção desconhecida mas como a

única força externa é transversal à viga, a direção das reações é automaticamente definida por esta força. Aplicando as equações de equilíbrio no plano tem-se  $R_A = Pb/L$  e  $R_B = Pa/L$  onde  $L=a+b$ . Como esperado, a reação será maior no apoio mais próximo da seção de aplicação da carga  $P$ , ou seja  $R_B > R_A$ .

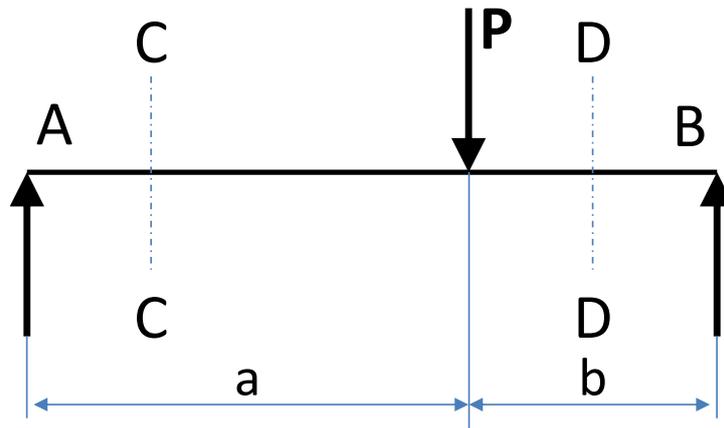


Figura 3 – Diagrama de corpo livre de uma viga sob apoios do tipo rótula e solicitada por uma força transversal P.

O corte da viga na seção CC (Figura 3) revela a existência de um cortante e fletor internos (Figura 4). O somatório de forças na direção  $x_2$  e de momentos em torno do eixo  $x_3$  (perpendicular ao papel) na seção CC fornece expressões para estas incôgnitas.

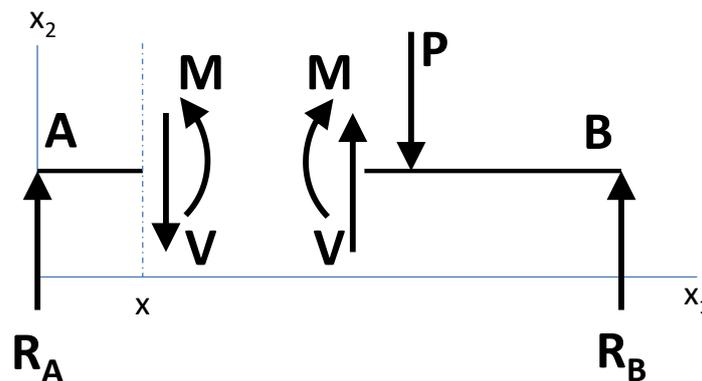


Figura 4 – Um cortante  $V(x)$  e um fletor  $M(x)$  internos, a serem determinados pelas equações de equilíbrio, surgem ao seccionar a viga em CC.

$$\begin{aligned} \sum F_{x2} = 0 &\Rightarrow V = \frac{P \cdot b}{L} = R_A \quad 0 \leq x \leq a \\ \sum M_{x3} = 0 &\Rightarrow M = \frac{P \cdot b}{L} \cdot x \quad 0 \leq x \leq a \end{aligned} \quad \text{Eq. 2}$$

A partir da  $x = a$  as equações para  $V(x)$  e  $M(x)$  serão diferentes. Considerando o corte na seção DD temos:

$$\begin{aligned} \sum F_{x2} = 0 &\Rightarrow V = \frac{P \cdot b}{L} - P = P \left( \frac{b}{L} - 1 \right) \\ &V = P \left( \frac{b-L}{L} \right) = -P \left( \frac{a}{L} \right) = -R_B \quad a \leq x \leq L \\ \sum M_{x3} = 0 &\Rightarrow M = \frac{P \cdot b}{L} \cdot x - P(x-a) \\ &M = P \left( \frac{b}{L} x - x + a \right) \\ &M = P \left( x \left( \frac{b}{L} - 1 \right) + a \right) \quad a \leq x \leq L \end{aligned} \quad \text{Eq. 3}$$

A Figura 5 mostra os gráficos obtidos plotando as equações anteriores ao longo do comprimento da viga. Os valores máximos de  $V_{\max} = R_B$  e  $M_{\max} = abP/L$  ocorrem em  $x = a$ .

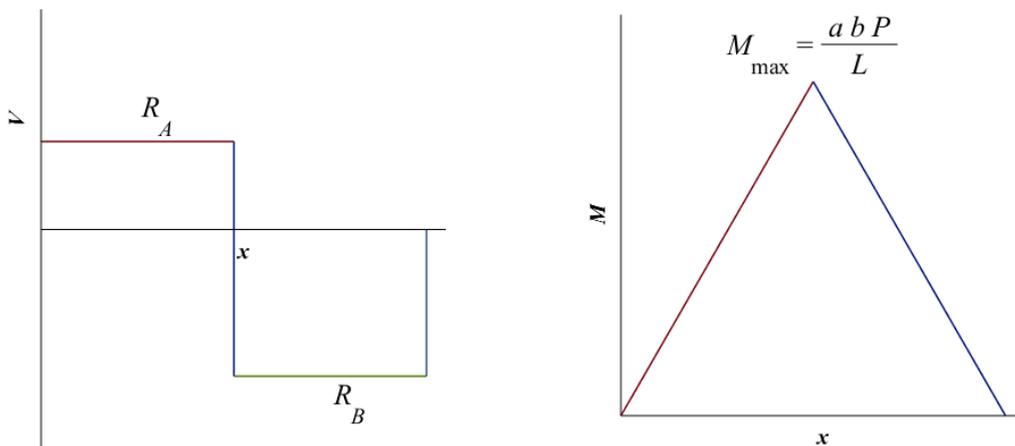


Figura 5 – Gráficos de Esforço Cortante EQ e Momento Fletor MF para a viga da Figura 3.

**Exemplo:** A Figura 6 mostra uma viga bi-apoiada de comprimento  $L$  solicitada por um carregamento uniformemente distribuído  $w$ . Obtenha as equações e os gráficos do esforço cortante e momento fletor na viga para  $w = 1 \text{ N/m}$  e  $L = 1 \text{ m}$ .

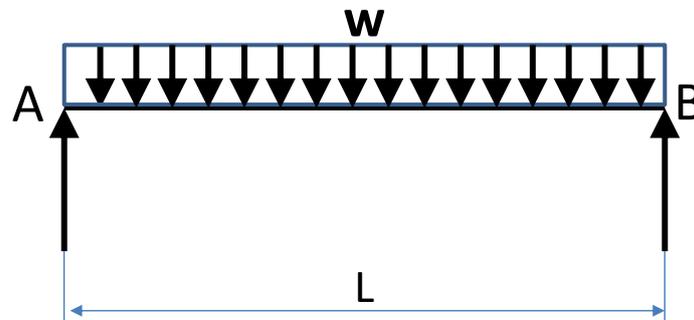


Figura 6 – Esquema de uma viga simplesmente apoiada sob um carregamento  $w$ .

O DCL desta viga foi obtido na aula 6 do presente curso. Consiste em substituir a força distribuída por uma concentrada que lhe é estáticamente equivalente. Esta força concentrada tem a sua linha de ação no centro da viga e tem um valor igual à área do retângulo  $P = wL$ . As reações nos apoios serão  $R_A = R_B = wL/2$ .

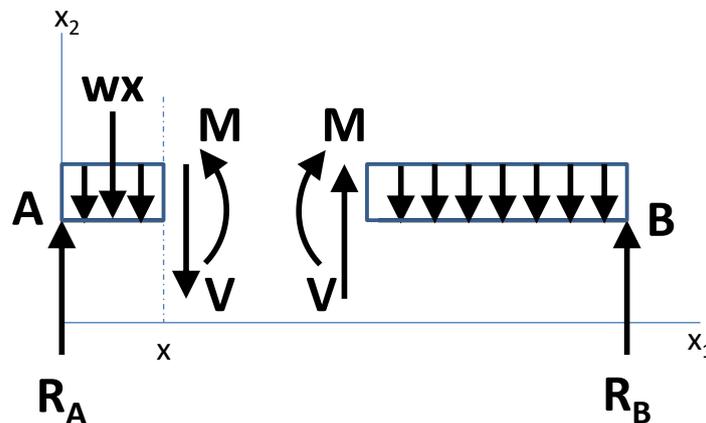


Figura 7 – Para determinar as equações das forças internas o carregamento distribuído se substitui por uma resultante  $wx$  variável com a distância até o referencial.

Uma única seção feita a qualquer distância da origem do referencial será suficiente para obter as equações das forças internas  $V(x)$  e  $M(x)$ , como mostrado na Figura 7. Observe que a força concentrada  $wL$  utiliza-se *apenas* para o cálculo das reações nos apoios. Para as forças internas trabalhamos também com uma resultante do

carregamento mas que varia com a distância  $x$  (Figura 7). Aplicando o equilíbrio ao DCL à esquerda do corte temos:

$$\begin{aligned} \sum F_{x2} = 0 &\Rightarrow V = \frac{w \cdot L}{2} - w \cdot x = w \left( \frac{L}{2} - x \right) & 0 \leq x \leq L \\ \sum M_{x3} = 0 &\Rightarrow M = \frac{w \cdot L}{2} \cdot x - w \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{w}{2} (L \cdot x - x^2) & 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad \text{Eq. 4}$$

As equações 4 são plotadas na Figura 8 para os dados do problema. O valor máximo do cortante ocorre nos apoios e é  $V_{max} = R_A = R_B = wL/2 = 1/2 \text{ N}$ . Já o fletor máximo é  $M_{max} = wL^2/8 = 1/8 \text{ N.m}$ , coincide com  $V = 0$  e obtém-se substituindo  $x=L/2$  na Eq. 4.

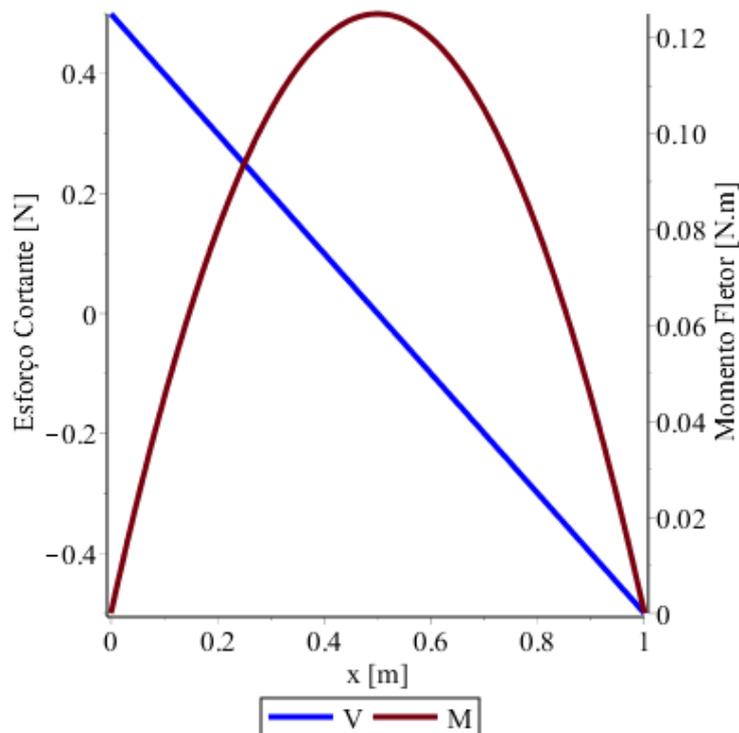


Figura 8 – Sistema de dois eixos mostrando os gráficos de cortante e de momento, de acordo com as equações 4, para a viga da Figura 6 e considerando  $w = 1 \text{ N/m}$  e  $L = 1 \text{ m}$ .

**Atividade 1:** Obtenha as equações e plote os gráficos de  $V(x)$  e  $M(x)$  para a viga mostrada na Figura 9. Considere  $w_0 = 6000 \text{ N/m}$  e  $L = 2 \text{ m}$ .

**Resposta comentada:** Observe que neste caso convém utilizar um referencial com origem na extremidade em balanço da viga. Dessa forma não será necessário nem

mesmo calcular as reações nos apoios. O primeiro passo consiste em encontrar a função  $w(x) = w_0/L x$  que descreve a variação linear do carregamento (no referencial adotado). A resultante estática de um carregamento na forma triangular será a área do triângulo. Para uma distância  $x$  qualquer desde a origem está resultante será igual à metade do produto da altura vezes a base  $\frac{w_0 \cdot x}{L} \cdot \frac{x}{2} = \frac{w_0 \cdot x^2}{2 \cdot L}$ . A linha de ação desta força passa pelo centróide do triângulo, situado a  $1/3$  da base do lado maior. Por fim, o equilíbrio fornece as seguintes equações e gráficos para  $V(x)$  e  $M(x)$ , respectivamente. Os máximos do EQ  $V_{máx}=6 \text{ KN}$  e do MF  $M_{máx}=4 \text{ KN.m}$  coincidem na seção do engaste  $x=L$ , como esperado.

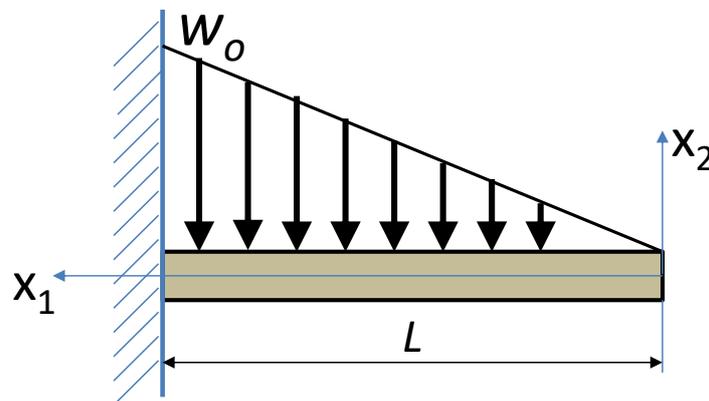


Figura 9 – Viga engastada e solicitada por um carregamento distribuído de variação linear. Corresponde à atividade 1.

$$\begin{aligned} \sum F_{x_2} = 0 &\Rightarrow V = -\frac{w_0 \cdot x^2}{2 \cdot L} & 0 \leq x \leq L \\ \sum M_{x_3} = 0 &\Rightarrow M = -\frac{w_0 \cdot x^3}{6 \cdot L} & 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad \text{Eq. 5}$$

### Conclusões

Na presente aula vimos que as vigas são elementos cujo comprimento é bem maior do que as suas dimensões transversais. Na maioria das vezes é possível utilizar modelos no plano para a análise das forças externas e das reações que atuam nas vigas. Neste curso tratamos apenas de vigas estaticamente determinadas que são aquelas em que as três equações independentes do equilíbrio no plano são suficientes para determinar as forças incôgnitas do problema. Estas equações também permitem determinar os

esforços internos (Força Normal (N), Esforço cortante EQ (V) e Momento Fletor MF (M)) que mantem a integridade estrutural das vigas. Quando a seção de corte localiza-se a uma distância variável do referencial, obtemos as equações dos esforços internos ( $N(x_1)$ ,  $V(x_1)$  e  $M(x_1)$ ).

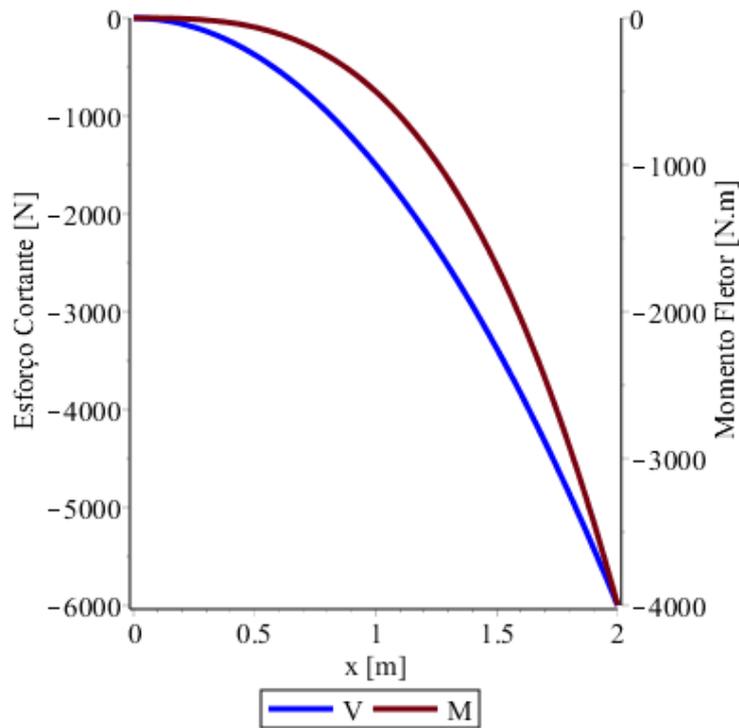


Figura 10 – Gráficos de EQ e MF da atividade 1.

A análise dos gráficos de esforços internos permite a localização das seções críticas. Não devemos esquecer que os esforços internos estão distribuídos em toda a seção de corte. Pelo equilíbrio encontramos apenas a resultante destes esforços. A análise da distribuição dos esforços internos em cada seção se faz através da sua intensidade, expressa mediante o conceito de tensão em um ponto, a ser discutido na disciplina Resistência dos Materiais.

### Resumo

As componentes escalares das equações de equilíbrio no plano são:

$$\sum F_{x1} = 0 \quad \sum F_{x2} = 0 \quad \sum M_{x3} = 0 \quad \text{Eq. 6}$$

A aplicação destes equações às seções das vigas constitui a essência do método das seções. Desta forma pode-se obter a variação dos esforços internos como função das distâncias até o referencial. As funções de uma variável assim obtidas são geralmente polinômios cujos gráficos podem ser esboçados com relativa simplicidade. A partir dos gráficos (ou mediante os métodos de análises do cálculo elementar) é possível definir as distâncias (ou seções) críticas das vigas.

### **Referências Bibliográficas**

- 1 Beer FP, Johnston ER Jr (1994), "Mecânica Vetorial para Engenheiros", 5ª ed. Makron Books, São Paulo, Brasil.
- 2 Hibbeler RC (2010), "Estática Mecânica para Engenharia", Pearson Prentice Hall, 12ª edição, São Paulo, Brasil.
- 3 Crandall SH, Dahl NC, Lardner TJ (1978), "An Introduction to the Mechanics of Solids", 3rd ed. McGraw-Hill Inc. Tokyo, Japan.