

**CEDERJ – CENTRO DE EDUCAÇÃO SUPERIOR A DISTÂNCIA  
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO**

CURSO: Engenharia de Produção    DISCIPLINA: Mecânica Geral

CONTEUDISTA: Jorge Alberto Rodriguez Duran

**Aula 9 – Cabos**

**Meta**

Obtenção dos diagramas de corpo livre e das forças internas de tração em cabos biapoiados.

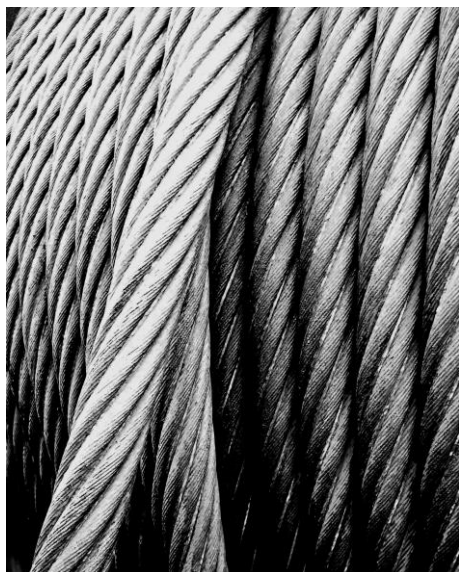
**Objetivos**

Esperamos que, ao final desta aula, você seja capaz de:

- 1 Aplicar as equações de equilíbrio e o método das seções para obter sistemas de equações de solução única que definem todos os esforços atuantes em cabos.
- 2 Calcular as forças de tração máximas em cabos.

**Introdução**

Cabos são elementos amplamente utilizados para transmitir potência com ganho mecânico na indústria de construção de maquinária. Outras áreas de utilização incluem os elevadores, pontes pênséis, transmissão de energia elétrica etc. São geralmente feitos de metal, sendo o aço o material preferido. Os cabos estão constituídos por vários fios que se entrelaçam formando uma espiral (Figura 1 a). As terminações mais comuns consistem em fazer um laço no cabo e abraçar um dedal (Figura 1 b). O dedal, que pela sua vez, conecta o terminal do cabo a uma abraçadeira. Desta forma a (única) força de reação estará na mesma direção do cabo. Como esta direção é desconhecida, as reações (no plano) terão duas componentes, uma vertical e uma horizontal. Os cabos podem estar solicitados por forças concentradas e distribuídas. As próximas análises se limitam a cabos com cargas concentradas.



(a)



(b)

Figura 1 – Vários cabos de aço (a) e uma das formas mais comuns de terminal utilizado nos apoios (b). A única força de reação será colinear com o cabo mas como a inclinação deste é desconhecida, no plano esta reação se representa pelas suas duas componentes [3].

### **Cabos que suportam cargas concentradas**

Um exemplo de cabo solicitado por forças externas concentradas se mostra na Figura 2. Como os cabos são elementos flexíveis, a resistência à flexão é o suficientemente baixa como para ser desprezada. Desconsiderando também o peso próprio, qualquer trecho do cabo entre duas forças verticais pode ser considerado como um elemento de duas forças. Desta forma o cabo será solicitado apenas por forças internas colineares ou de tração. Nos apoios, a única reação será igual e de sentido contrário a esta força interna de tração. O processo de análise começa, como sempre, por isolar o cabo dos apoios, substituir os vínculos eliminados pelos esforços com que eles reagem à ação do componente (reações) e com a aplicação das equações de equilíbrio. Com base na Figura 2 temos:

$$\begin{aligned}
\sum M_A = 0 &\Rightarrow -d \cdot Bx + (a + b + c) \cdot By = a(Q1 + Q2) + b \cdot Q2 \\
\sum M_B = 0 &\Rightarrow d \cdot Ax - (a + b + c) \cdot Ay = -c(Q1 + Q2) - b \cdot Q1 \\
\sum F_y = 0 &\Rightarrow Ay + By = Q1 + Q2
\end{aligned}
\tag{Eq. 1}$$

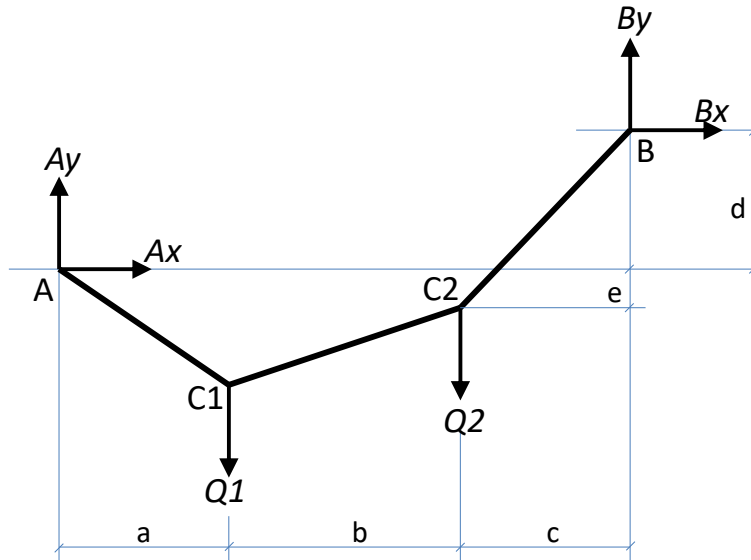


Figura 2 – Exemplo de cabo biapoiado com cargas concentradas verticais.

O número de incôgnitas (4) é superior ao de equações (3) o que inviabiliza a solução do sistema da Eq. 1 (consideramos que Q1 e Q2 são conhecidas). Para obter uma equação complementar é necessário conhecer as coordenadas de ao menos um dos pontos de aplicação das cargas Q. No nosso caso esse ponto é o C2. Isolando a porção C2 B do cabo e aplicando o equilíbrio de momentos em C2 (para que a equação complementar seja independente da força de tração no cabo T) (Figura 3) temos:

$$\sum M_{C2} = 0 \Rightarrow -(d + e) \cdot Bx + c \cdot By = 0
\tag{Eq. 2}$$

Como Bx é agora uma função de By (ou viceversa) o número de incôgnitas na Eq. 1 diminui para três e o sistema passa a ser solúvel. A Eq. 3 mostra a forma matricial do sistema composto pelas equações 1 e 2. O DCL da Figura 3 revela ainda um fato interessante: A componente horizontal da força de tração no cabo é constante em todo o cabo e igual (neste caso) a Bx. Basta aplicar o equilíbrio de forças na direção horizontal para termos como resultado a Eq. 4. Obviamente a força máxima T<sub>max</sub> no

cabo ocorre no trecho em que o  $\cos(\theta)$  for mínimo (ou o ângulo  $\theta$  for o mais próximo de  $90^\circ$ ).

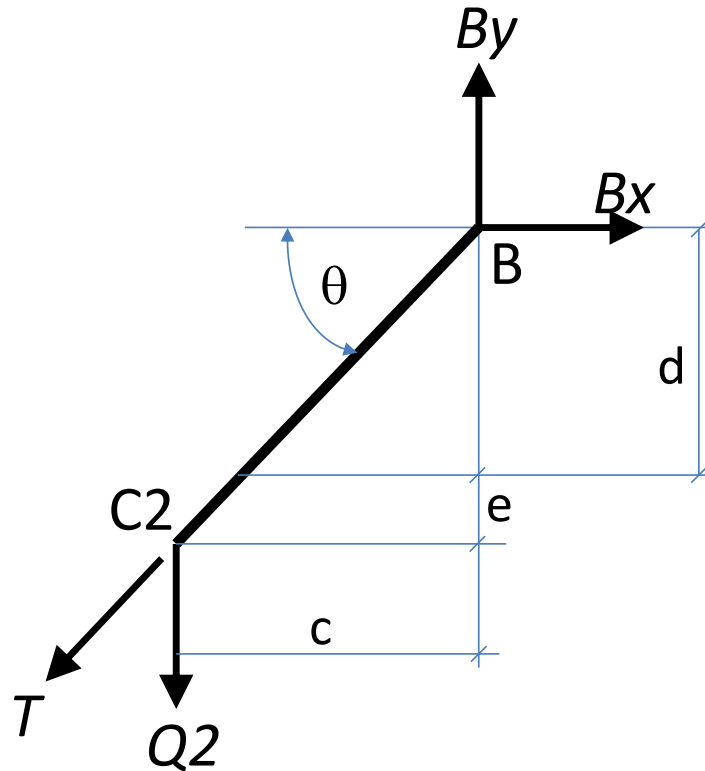


Figura 3 – Diagrama de corpo livre da porção C2 B do cabo. Como discutido, a força de tração no cabo é colinear com o mesmo.

$$\begin{bmatrix} d & -L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & L \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(d+e) & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Ax \\ Ay \\ Bx \\ By \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \cdot (Q1+Q2) - b \cdot Q1 \\ a \cdot (Q1+Q2) + b \cdot Q2 \\ Q1+Q2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 3}$$

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_x = T \cdot \cos\theta = Bx \quad \text{Eq. 4}$$

**Exemplo 1:** Calcule as reações nos apoios e a força  $T_{max}$  para o cabo da Figura 2 com os dados da Tabela 1.

**Solução:** Para resolver este exemplo simplesmente substituímos os valores numéricos da Tabela 1 na Eq. 3. A solução do sistema retorna os valores mostrados na Eq. 5 para o vetor  $\mathbf{x}$  das reações nos apoios.

Tabela 1 – Dados numéricos para o exemplo 1

a, m	b, m	c, m	d, m	e, m	Q1, KN	Q2, KN
3	4	6	2	1	12	10

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} Ax \\ Ay \\ Bx \\ By \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{212}{9} \\ \frac{92}{9} \\ \frac{212}{9} \\ \frac{9}{106} \\ \frac{9}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23,6 \\ 10,2 \\ 23,6 \\ 11,8 \end{bmatrix} \text{ KN} \quad \text{Eq. 5}$$

A componente horizontal da força de tração, que como sabemos é constante para todo o cabo, se calcula pela Eq. 4:

$$T_x = T \cdot \cos\theta = Bx = \frac{212}{9} \text{ KN} = 23,6 \text{ KN} \quad \text{Eq. 6}$$

A tração máxima  $T_{max}$  depende do ângulo que a porção do cabo analisado faz com a horizontal. Por este motivo será necessário primeiramente encontrar a coordenada vertical  $f$  do ponto C1. Para isto aplicamos o equilíbrio ao corpo livre A C1 (Figura 4).

$$\begin{aligned} \sum M_{C1} = 0 &\Rightarrow -a \cdot Ay - f \cdot Ax = 0 \\ \Rightarrow f = -a \frac{Ay}{Ax} &= -3 \cdot \frac{92}{9} \cdot \left( -\frac{9}{212} \right) = \frac{69}{53} \text{ m} = 1,3 \text{ m} \end{aligned} \quad \text{Eq. 7}$$

As declividades dos diferentes trechos do cabo são as seguintes:

$$AC1 \Rightarrow \frac{f}{a} = \frac{1,3}{3} = 0,43$$

$$C1C2 \Rightarrow \frac{f-e}{b} = \frac{1,3-1}{4} = 0,075$$

$$C2B \Rightarrow \frac{d+e}{c} = \frac{2+1}{6} = 0,5$$

Eq. 8

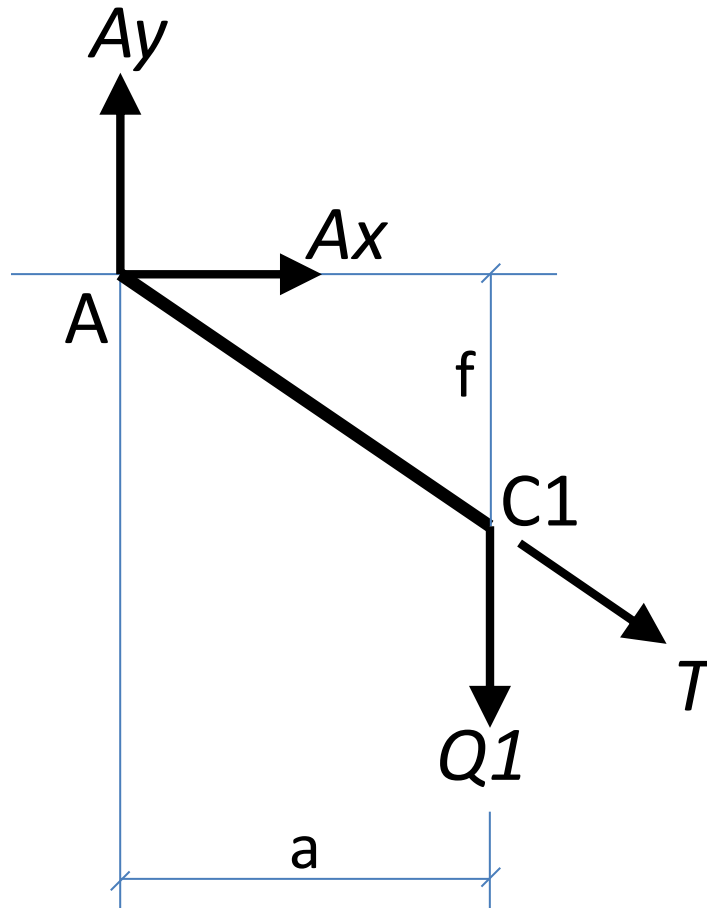


Figura 4 – Diagrama de corpo livre A C1 do cabo da Figura 2.

A maior declividade ocorre por tanto na porção C2 B. O cosseno do ângulo  $\theta$  que a força de tração faz com a horizontal (Figura 3) e  $T_{max}$  serão:

$$\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + (d+e)^2}} = \frac{6}{\sqrt{6^2 + (3)^2}} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5}$$

$$T_{max} = \frac{Bx}{\cos\theta} = \frac{212}{9} \cdot \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{106}{9} \cdot \sqrt{5} \cong 26,3 \text{ KN}$$

Eq. 9

É interessante notar como o cabo suporta uma força maior do que a soma das duas forças verticais ( $26,3 \text{ KN} > 22 \text{ KN}$ ). Pode-se concluir que os cabos serão mais eficientes quando utilizados na posição vertical (máximo de  $\theta$ ).

**Atividade 1:** O cabo A C1 C2 da Figura 5 suporta duas cargas conhecidas  $Q1$  e  $Q2$ . As distâncias  $a$ ,  $b$  e  $d$  são dadas. Obtenha expressões para as seguintes incôgnitas em função dos parâmetros dados:

- A carga  $P$  que mantêm o conjunto em equilíbrio.
- O  $T_x$  no cabo.
- A distância  $c$ .
- O  $T_{max}$  no cabo.
- As reações em A.

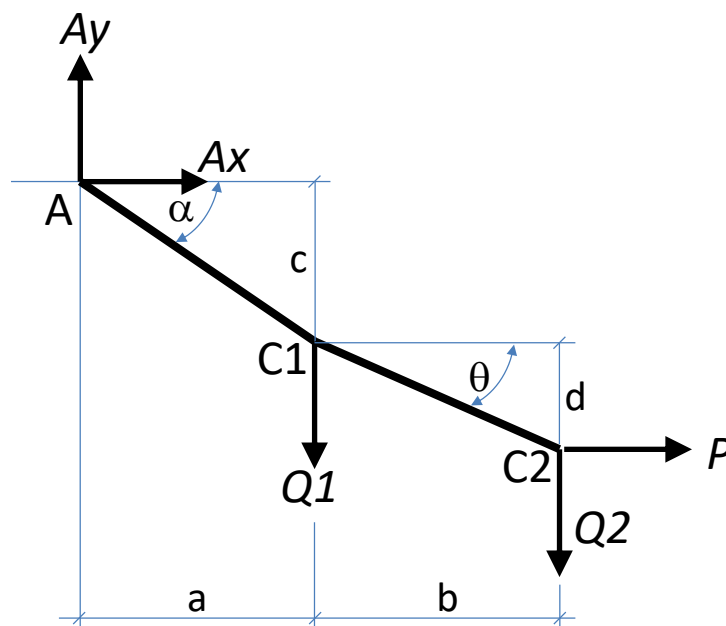


Figura 5 – Duas cargas  $Q1$  e  $Q2$  estão suspensas do cabo A C1 C2 enquanto que a força  $P$  mantêm o conjunto em equilíbrio.

**Solução:** O equilíbrio do corpo C1 C2 permite obter a seguinte expressão para  $P$  e  $T_x$ :

$$P = \frac{b}{d} \cdot Q2$$

$$Tx = T \cos\theta = \frac{b}{d} \cdot Q2$$
Eq. 10

O equilíbrio do cabo inteiro permite obter a distância  $c$  e as reações em A:

$$c = \frac{a \cdot Q1 + (a + b) \cdot Q2}{\frac{b}{d} \cdot Q2} - d$$

$$Ax = -P = -\frac{b}{d} \cdot Q2$$

$$Ay = Q1 + Q2$$
Eq. 11

A maior declividade ocorre na porção A C1 logo o  $T_{max}$  será:

$$T_{\max} = \frac{P}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{d} \cdot Q2}{\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot b \cdot Q2}{d \cdot a^2}$$
Eq. 12

### Conclusões

Os cabos são elementos flexíveis amplamente utilizados na construção civil, mecânica, na indústria do petróleo etc. A resistência à flexão das seções transversais dos cabos é desprezível e por esse motivo, para os nossos efeitos, são modelados como membros de duas forças. Como não suportam momento fletor não há necessidade de se preocupar com as distâncias de aplicação das cargas até os apoios

Os cabos podem suportar cargas concentradas ou distribuídas em seu comprimento. A presente aula tratou apenas da aplicação de cargas concentradas. As equações de equilíbrio para o diagrama de corpo livre DCL do cabo não são suficientes para determinar as reações dos apoios e DCLs adicionais são necessários. Estes diagramas revelam que o produto da tração no cabo  $T$  versus a declividade do trecho  $\cos \theta$  é uma constante, ou seja, a tração máxima corresponde ao trecho mais inclinado. Exemplos numéricos de cabos bi-apoiados resolvidos neste aula demonstraram também que a



tração no cabo é maior do que a soma das forças aplicadas verticalmente o que não diminui em nada a importância destes elementos mecânicos.

### **Resumo**

A flexibilidade dos cabos exige forças colineares com estes nos apoios o que automaticamente transforma os sistemas em estáticamente indeterminados (ver por exemplo a Eq. 1). A solução demanda o conhecimento das coordenadas de ao menos um dos pontos de aplicação das cargas e consiste em aplicar as equações de equilíbrio ao trecho do cabo em que se tem este dado (ver por exemplo a Eq. 2 e a Figura 3).

Como o produto da tração no cabo  $T$  pelo ângulo de inclinação do trecho em análise é uma constante, os valores máximos  $T_{max}$  correspondem às regiões de maior declividade (Eq. 4).

### **Referências Bibliográficas**

- 1 Beer FP, Johnston ER Jr (1994), "Mecânica Vetorial para Engenheiros", 5ª ed. Makron Books, São Paulo, Brasil.
- 2 Hibbeler RC (2010), "Estática Mecânica para Engenharia", Pearson Prentice Hall, 12ª edição, São Paulo, Brasil.
- 3 [https://en.wikipedia.org/wiki/Wire\\_rope](https://en.wikipedia.org/wiki/Wire_rope), acesso em 10/04/2016.